

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：多邊形各邊分點與多邊形的關係

關 鍵 詞：給定中點或分點、求作多邊形、

尺規作圖與電腦繪圖

編 號：030405

學校名稱：

臺北縣立江翠國民中學

作者姓名：

黃子桓、陳思樺、劉登境、楊 琇

指導老師：

黃錫川



多邊形各邊分點與多邊形的關係

本文提要

初看題目：「任給一個五邊形，標定五個邊的中點後，擦掉這個五邊形，請利用這五個中點，畫出原來的五邊形」，令人有無從下手的感覺。只好從三角形開始研究，想不到研究四邊形時，就發現有「無解」與「無限多解」的兩種情形。這時，反而提昇我們對這個題目的興趣，促使我們更進一步想要了解它的究竟。五邊形的研究所花的時間最長，當發現到可以結合三角形與四邊形的作圖方法，來解決五邊形的問題時，才有了突破性的進展。一直研究到八邊形後，一般性的結論自然就呈現了。

上述的研究發展都是利用尺規作圖來完成，當多邊形的邊數愈多時，痛苦指數也愈增高，因為作圖誤差會隨著邊數增多而累加，在七邊形以上時，就快樂不起來了。雖然有正確的理論，實際操作上卻不容易掌握其精確性。何況把這些「中點」改成「分點」時，研究就觸礁了。

經過老師指點，尺規作圖不容易精確，何不想辦法改用電腦來繪圖。可是要請電腦工作，自己得先把運算的公式找到，電腦才幫得上忙。我們先定義平面上兩點坐標的運算規則，推導出給定各邊「中點」求作 n 邊形的公式後，也一併驗證了尺規作圖理論的正確性。接著企圖把「中點」改成「分點」時，公式推導就比較困難了，這需要十足的「細心」+「耐心」來計算導出，完成給定各邊「分點」求作 n 邊形的公式後，「中點」公式就只是其中一個特殊情形罷了。

電腦繪圖程式設計完成後，使我們對這項研究有更清楚的認識。當多邊形無限多解時，可藉著移動所求多邊形的「頂點」來觀察圖形的凹凸如何變動。當多邊形有唯一解時，也可藉著移動「分點」的位置，來觀察所求多邊形的圖形如何變化。甚至於多邊形無解時，也可請電腦計算，來改變分點位置，使多邊形有解。以上所述，我們都做到了。

壹、研究動機

有一天上課時，老師在黑板上畫了一個任意五邊形，取出每一邊中點後，便將原來五邊形擦掉，要我們利用這五個中點找回原來的五邊形。大家想了幾天，全給難住了，沒有人能解出來。老師鼓勵我們繼續研究，並提示可以先簡化題目，從三角形開始著手。從此，便踏上了這項研究的漫漫長路。

本項研究應用到國中數學課程內容相關教材如下：

- 一、尺規作圖：作等線段、作線段中點、作平行線
- 二、三角形兩邊中點連線性質
- 三、四邊形各邊中點連線性質
- 四、平行四邊形的性質
- 五、平面直角坐標系：線段中點公式、線段分點公式(自行導出)
- 六、一元一次方程式的解
- 七、自學 Visual Basic 程式語言

貳、研究目的

- 一、給定平面上 n 個相異點，是否可以當做 n 邊形的各邊中點？如果可以，如何作出這個 n 邊形？它被唯一決定嗎？
- 二、將平面上 n 個相異點，改為當做 n 邊形的各邊分點，結果會如何？（各分點將多邊形的每一邊分成兩線段長之比例可以不相同）
- 三、設計電腦軟體輔助研究，並展示研究成果。

參、研究過程與方法

- 一、給定平面上 n 個相異點，是否可以當做 n 邊形的各邊中點？如果可以，如何作出這個 n 邊形？它被唯一決定嗎？

我們從三角形的情形開始研究，再逐步推展到一般的 n 邊形。

(一)、三角形

設平面上三相異點為 M_1 、 M_2 、 M_3 ，是否可以找到 $\triangle A_1A_2A_3$ ？使 M_1 、 M_2 、 M_3 分別為 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三邊中點。

我們由三角形的下列性質：“任意三角形的兩邊中點連線，平行於第三邊且其長為第三邊之半。”

想到了以下作法：

1. 如圖 1，連接 $\triangle M_1M_2M_3$
2. 分別過 M_1 、 M_2 、 M_3 各作一直線與對邊平行
3. 令三直線相交於 A_1 、 A_2 、 A_3 ，則 $\triangle A_1A_2A_3$ 即為所求

上述作法，證明如下：

1. 四邊形 $A_1M_1M_2M_3$ 、 $M_1A_2M_2M_3$ 都是平行四邊形

$$\overline{A_1M_1} = \overline{M_3M_2} \text{ 且 } \overline{M_1A_2} = \overline{M_3M_2}$$

2. $\overline{A_1M_1} = \overline{M_1A_2}$ ，即 M_1 為 $\overline{A_1A_2}$ 的中點

3. 同理可證 M_2 為 $\overline{A_2A_3}$ 的中點， M_3 為 $\overline{A_3A_1}$ 的中點

故 $\triangle A_1A_2A_3$ 即為所求

因為過直線外一點只能作出一條平行線，可知圖 1 中作出的 $\triangle A_1A_2A_3$ 是唯一的。我們得知：

〔心得一〕若平面上三相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 不共線，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 分別為三角形的三邊中點，可決定唯一的 $\triangle A_1A_2A_3$ 。若 M_1 、 M_2 、 M_3 共線，則 $\triangle A_1A_2A_3$ 不存在。

其實，已知 M_1 、 M_2 、 M_3 ，要作出 $\triangle A_1A_2A_3$ ，我們只要先找到 A_1 ，再分別以 M_1 、 M_2 為對稱中心，便可得到二對稱點 A_2 、 A_3 了，所以可簡化作圖步驟如下：

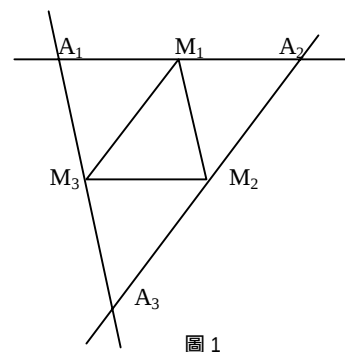


圖 1

1. 如圖 2，取 $\overline{M_1M_3}$ 中點 N
2. 延長 $\overline{M_2N}$ 到 A_1 ，使 $\overline{M_2N} = \overline{NA_1}$
3. 以 A_1 為起點，分別以 M_1 、 M_2 為對稱中心，
便可得到二對稱點 A_2 、 A_3 ，
 $\triangle A_1A_2A_3$ 即為所求

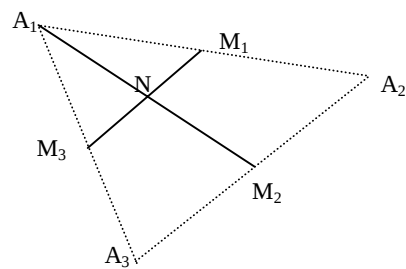


圖 2

(二)、四邊形

設平面上四相異點為 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 ，是否可以找到四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ？使 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的各邊中點。

我們利用四邊形的已知性質：“任意四邊形的各邊中點連線必形成平行四邊形”，得知：

1. 若 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 不能形成平行四邊形，就無法以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 為各邊中點找到四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。

但不能確定：

2. 若 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四邊形時，能否以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 為各邊中點找到四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ？如果可以，這樣的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有幾個？

當 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四邊形時，我們嘗試下列作法：

1. 如圖 3，連接平行四邊形 $M_1M_2M_3M_4$
2. 任作二直線分別平行 $\overline{M_1M_2}$ 、 $\overline{M_2M_3}$
3. 設二直線相交於 O，且與平行四邊形 $M_1M_2M_3M_4$ 的四邊相交於 N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4
4. 在二直線上取四點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 ，使 $\overline{A_1N_1} = \overline{N_1O}$ ，

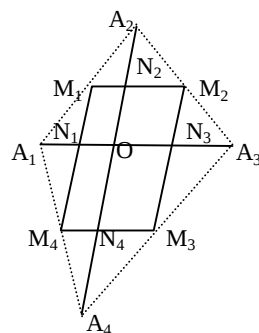


圖 3

$$\overline{A_2N_2} = \overline{N_2O}, \overline{A_3N_3} = \overline{N_3O}, \overline{A_4N_4} = \overline{N_4O}, \text{ 則}$$

四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 即為所求

上述作法證明如下：

1. $\triangle A_1A_2O$ 中， N_2 為 $\overline{A_1O}$ 中點，且 $\overline{M_1N_2} \parallel \overline{A_1O}$

直線 N_2M_1 必通過 $\overline{A_1A_2}$ 的中點

2. $M_1N_2ON_1$ 為平行四邊形， $\overline{M_1N_2} = \overline{ON_1} = \frac{1}{2}\overline{OA_1}$

故 M_1 為 $\overline{A_1A_2}$ 的中點

3. 同理 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 的中點，得證。

上述作法中，由於所作二直線可任意平行移動。因此，我們發現：

〔心得二〕若平面上四相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四邊形時，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為四邊形的各邊中點，可決定無限多個四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。

若 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 不形成平行四邊形，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不存在。

當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有無限多解時，其解包括凹、凸兩種四邊形都有。如圖 4

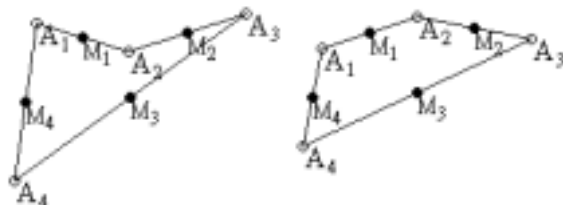


圖 4

現在有一問題如下：

既然 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四邊形，則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有無限多個。

那麼， A_1 點的位置能否任意指定？我們認為是可以的。並作了如下的證明：

已知：平面上四相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四

邊形，在平面上任取 A_1 點，以 M_1 為對稱中心，找到對稱點 A_2 。依同法，以 M_2 、 M_3 為對稱中心，依序找到對稱點 A_3 、 A_4 。即 M_1 、 M_2 、 M_3

分別為 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 的中點。

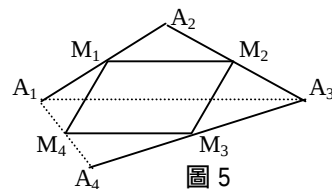


圖 5

求證： M_4 為 $\overline{A_4A_1}$ 的中點

證明：(1) 如圖 5，連接 $\overline{A_1A_3}$

(2) $\triangle A_1A_2A_3$ 中， M_1 、 M_2 分別為二邊中點

$$\overline{M_1M_2} \parallel \overline{A_1A_3} \text{ 且 } \overline{M_1M_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_3}$$

(3) $M_1M_2M_3M_4$ 為平行四邊形

$$\overline{M_3M_4} \parallel \overline{M_1M_2} \text{ 且 } \overline{M_3M_4} = \overline{M_1M_2}$$

$$\overline{M_3M_4} \parallel \overline{A_1A_3} \text{ 且 } \overline{M_3M_4} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_3}$$

(4) M_3 為 $\overline{A_3A_4}$ 的中點

M_4 為 $\overline{A_4A_1}$ 的中點

由此可見，當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有無限多解時，可任意指定 A_1 點的位置。(異於 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 即可)

(三)、五邊形

給定平面上五相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 ，是否可以找到五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ？

使 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 分別為五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的各邊中點。

我們結合上述三角形與四邊形的作圖方法，發展了下列作法：

1. 如圖 6，取一點 O ，使 $OM_2M_3M_4$ 為平行四邊形

2. 若 O 、 M_1 、 M_5 三點不共線，則取 $\overline{M_1M_5}$ 的中點 N ，

延長 $\overline{ON}$ 到 A_1 ，使 $\overline{ON} = \overline{NA_1}$

3. 作出 $\triangle A_1A_2A_5$ ，使 M_1 、 M_5 、 O 為三邊中點

4. 以 $\overline{A_2A_5}$ 為一邊，可作出四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ ，使 M_2 、

M_3 、 M_4 、 O 為四邊中點，則五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 即為所求

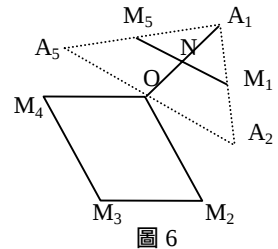


圖 6

上述做法中， O 點的取法並不唯一，祇要取出
的 O 點，能與 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 中的任三點形
成平行四邊形，再與其餘二點形成三角形，則五邊形
 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 即有唯一解。如圖 7，雖然 M_2 、 M_3 、 M_4
三點共線，無法做為平行四邊形的三個頂點，我們還
是能夠以 M_3 、 M_4 、 M_5 為三頂點來找到 O 點，使
 $OM_3M_4M_5$ 為平行四邊形，且 OM_1M_2 為三角形。

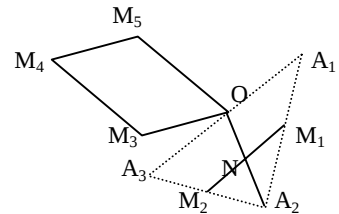


圖 7

由以上作圖得知：

(心得三) 平面上五相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 ，若存在一點 O ，使 O 與
 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 中的任三點形成平行四邊形，再與其餘二點形成三角
形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 分別為五邊形各邊中點，可決定唯一的
五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 。否則五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 不存在。

(四)、六邊形

給定平面上六相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 ，是否可以找到六邊形

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ？使 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 分別為六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的
各邊中點。

如果我們能找到一點與原來六相異點結合成兩個平行四邊形，則可利用上述
四邊形的作圖方法二次，發展出下列作法：

1. 如圖 8，取一點 O ，使 $OM_1M_2M_3$ 為
平行四邊形

2. 若 $OM_4M_5M_6$ 也是平行四邊形，則可
任取一點 A_1 ，作出一個
四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，使 M_1 、 M_2 、 M_3 、
 O 分別為四邊中點

3. 再以 $\overline{A_1A_4}$ 為一邊，作

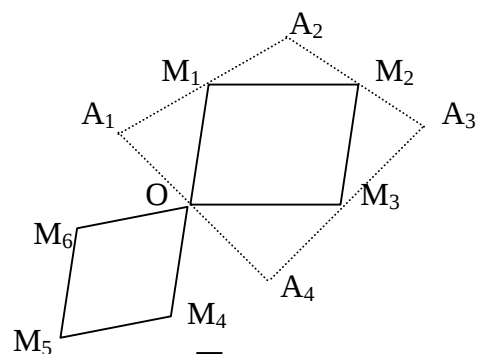


圖 8

四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ ，使 Q 、 M_4 、 M_5 、 M_6 分別為四邊中點，則六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 即為所求

上述作法中，六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 存在的條件是 $OM_1M_2M_3$ 、 $OM_4M_5M_6$ 二個都是平行四邊形才可以做到，而且可作出無限多個六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 。因此，我們得知：

〔心得四〕平面上六相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 ，若存在一點 O ，使 O 與 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 形成二個平行四邊形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 分別為六邊形的各邊中點，可決定無限多個六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 。否則六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 不存在。

依此類推，可得知七邊形(如圖 9)與八邊形(如圖 10)的情形：

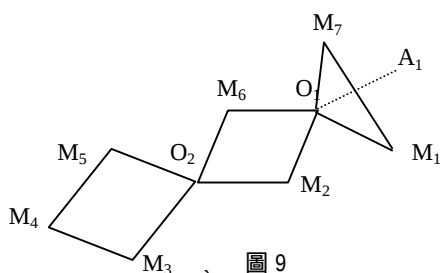


圖 9

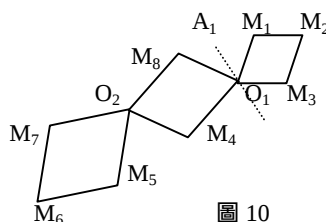


圖 10

〔心得五〕平面上七相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 ，若存在二點 O_1 、 O_2 ，使 O_1 、 O_2 與 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 形成二個平行四邊形和一個三角形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 分別為七邊形的各邊中點，可決定唯一的七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 。否則七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 不存在。

〔心得六〕平面上八相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 、 M_8 ，若存在二點 O_1 、 O_2 ，使 O_1 、 O_2 與 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 、 M_8 形成三個平行四邊形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 、 M_8 分別為八邊形的各邊中點，可決定無限多個八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 。否則八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 不存在。

綜合上面討論過程，我們得到以下的結論：

【 n 為奇數】

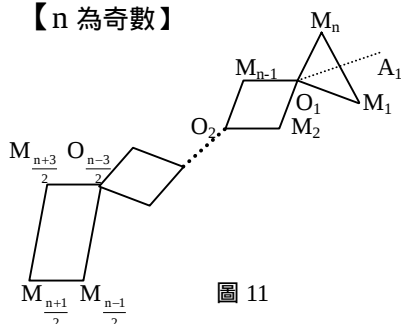


圖 11

【 n 為偶數】

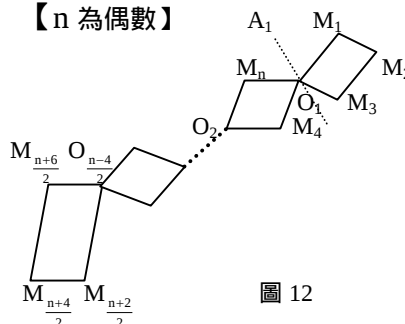


圖 12

〔結論一〕對於平面上 n 個相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n ，如圖 11、圖 12

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

若存在 $\frac{n-3}{2}$ 個點 O_1 、 O_2 、 $\dots$ 、 $O_{\frac{n-3}{2}}$ ，與這 n 個相異點形成 $\frac{n-3}{2}$ 個

平行四邊形和 1 個三角形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n 分別為 n 邊形的各邊中點，可決定唯一的 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。
否則 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 不存在。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

若存在 $\frac{n-4}{2}$ 個點 O_1 、 O_2 、 $\dots$ 、 $O_{\frac{n-4}{2}}$ ，與這 n 個相異點形成 $\frac{n-2}{2}$ 個平行四邊形，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n 分別為 n 邊形的各邊中點，可決定無限多個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。否則 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 不存在。

對於上述結論，有三點說明如下：

- (一)、 n 個相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n 在平面上的位置，必須按照順或逆時針依序指定，否則無法形成多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。
- (二)、多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 有解時，可能是凸或凹多邊形。
- (三)、多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 有解時，若發生此多邊形有相鄰三頂點共線情形，此時多邊形邊數會減少，無法滿足 n 個邊的要求，應捨棄此多邊形的解。

雖然目前研究已有初步成果，卻有二件困難尚待解決：

- (一)、當多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 有解時，我們在「尺規作圖」的實際操作過程中，發現邊數愈多，作圖時愈不容易掌握精確度，甚至於各邊的誤差會累加到無法順利繪出多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的程度。
- (二)、我們目前是利用三角形與四邊形的各邊中點連線性質來做研究，當想要進一步擴展，將「中點」改為「分點」時，分點將各邊分成二線段長的比例已不是 1：1，就無法利用中點性質來研究了。

為了要同時解決這二件困難，我們決定重起爐灶，再發展一套新的方法來研究，這個方法是引進直角坐標平面的觀念，將平面上給定的點以坐標的方式呈現。我們可定義平面上的兩點坐標的加減法與一點坐標的係數積的規則，其定義如下：

設 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 為坐標平面上的二點，

則 (1) $A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

(2) $A-B=(a_1-b_1, a_2-b_2)$

(3) $kA=(ka_1, ka_2)$

以下是我們利用坐標法所做的研究：

【因篇幅限制，我們將三角形與四邊形的研究結果列於附件一(附件第 1 頁)】

設平面上 n 相異點為 M_1 、 M_2 、 $\dots$ 、 M_n ，是否可以找到 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ？使 M_1 、 M_2 、 $\dots$ 、 M_n 分別為 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的各邊中點。

令 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 為所求多邊形， n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的各邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\dots$ 、

$\overline{A_nA_1}$ 中點依次為 M_1 、 M_2 、 $\dots$ 、 M_n 。

$$\text{則 } M_1 = \frac{A_1 + A_2}{2}, M_2 = \frac{A_2 + A_3}{2}, \dots, M_n = \frac{A_n + A_1}{2}$$

故 $A_1=2M_1-A_2$, $A_2=2M_2-A_3$, $\dots$, $A_n=2M_n-A_1$

可得 $A_1=2M_1-2M_2+\dots+(-1)^{n-1}2M_n+(-1)^n A_1$

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

$$A_1=2M_1-2M_2+\dots+2M_n-A_1$$

$$\text{得到 } A_1=M_1-M_2+\dots+M_n$$

故 A_1 有唯一解，即 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 被唯一決定。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

$$A_1=2M_1-2M_2+\dots-2M_n+A_1$$

$$\text{故 } 0A_1=M_1-M_2+\dots-M_n$$

可知，

1. 若 $M_1-M_2+\dots-M_n=0$ ，則 A_1 為任意點。當 A_1 確定後， A_2 、 A_3 、 $\dots$ 、 A_n 各點位置也隨著確定。所以 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 有無限個。
2. 若 $M_1-M_2+\dots-M_n \neq 0$ ，則 A_1 無解。即 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 不存在。

當 n 為偶數時($n \geq 4$)，上述「 $M_1-M_2+\dots-M_n=0$ 」的條件與「存在 $\frac{n-4}{2}$ 個

點 O_1 、 O_2 、 $\dots$ 、 $O_{\frac{n-4}{2}}$ ，和 n 個相異點 M_1 、 M_2 、 $\dots$ 、 M_n 形成 $\frac{n-2}{2}$ 個平

行四邊形」的條件，兩者意義是相同的。我們以 $n=8$ 為例證明如下：

如圖 13，若存在 O_1 、 O_2 二點，與 8 個相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 、 M_8 形成 3 個平行四邊形 $M_1M_2M_3O_1$ 、 $M_8O_1M_4O_2$ 、 $M_7O_2M_5M_6$

$$\Rightarrow M_1 - M_2 + M_3 - O_1 = 0, M_8 - O_1 + M_4 - O_2 = 0, M_7 - O_2 + M_5 - M_6 = 0$$

(上式在四邊形的情形已有證明，見附件一)

$$\Rightarrow (M_1 - M_2 + M_3 - O_1) - (M_8 - O_1 + M_4 - O_2) + (M_7 - O_2 + M_5 - M_6) = 0$$

$$\Rightarrow M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - M_6 + M_7 - M_8 = 0$$

反過來，

$$\text{若 } M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - M_6 + M_7 - M_8 = 0$$

$$\Rightarrow \text{令 } O_1 = M_1 - M_2 + M_3,$$

$$O_2 = M_8 - O_1 + M_4$$

$$\Rightarrow \text{則 } M_1 - M_2 + M_3 - O_1 = 0,$$

$$M_8 - O_1 + M_4 - O_2 = 0$$

$$\Rightarrow (M_1 - M_2 + M_3 - O_1) - (M_8 - O_1 + M_4 - O_2) + (M_7 - O_2 + M_5 - M_6) = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - M_6 + M_7 - M_8$$

$$\Rightarrow 0 - 0 + (M_7 - O_2 + M_5 - M_6) = 0$$

$$\Rightarrow M_7 - O_2 + M_5 - M_6 = 0$$

$\Rightarrow$ 故存在 O_1 、 O_2 二點，與 8 個相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 、 M_5 、 M_6 、 M_7 、 M_8

形成 3 個平行四邊形 $M_1M_2M_3O_1$ 、 $M_8O_1M_4O_2$ 、 $M_7O_2M_5M_6$

因此我們得到了與「結論一」相同的下列結論：

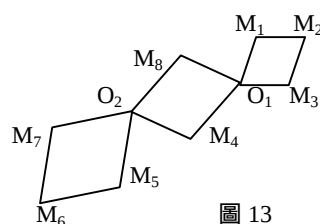


圖 13

(結論一*) 對於平面上 n 個相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n ，若以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 $\dots$ 、 M_n 為 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 的各邊中點，

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

則可決定唯一的 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

1. 若 $M_1-M_2+\dots-M_n=0$ ，則 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 有無限多個。

2. 若 $M_1-M_2+\dots-M_n \neq 0$ ，則 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 不存在。

二、給定平面上任意 n 個相異點，是否可以當做 n 邊形的各邊分點？如果可以，如何作出這個 n 邊形？它被唯一決定嗎？

【三角形與四邊形的研究結果列於附件二(附件第 3 頁)】

給定平面上 n 相異點 P_1 、 P_2 、 P_3 、 $\dots$ 、 P_n ，求 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 使 P_1 、 P_2 、 P_3 、 $\dots$ 、 P_n 分別為各邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\dots$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 分點，且 $\overline{A_1P_1} : \overline{P_1A_2} = r_1 : s_1$ ，

$\overline{A_2P_2} : \overline{P_2A_3} = r_2 : s_2$ ， $\dots$ ， $\overline{A_nP_n} : \overline{P_nA_1} = r_n : s_n$ 。

由線段分點公式，可知

$$P_1 = \frac{s_1A_1 + r_1A_2}{r_1 + s_1}, P_2 = \frac{s_2A_2 + r_2A_3}{r_2 + s_2}, \dots, P_n = \frac{s_nA_n + r_nA_1}{r_n + s_n}$$

$$A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1}{s_1}A_2, A_2 = \frac{r_2 + s_2}{s_2}P_2 - \frac{r_2}{s_2}A_3, \dots, A_n = \frac{r_n + s_n}{s_n}P_n - \frac{r_n}{s_n}A_1$$

得到

$$A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3 + s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1s_2 \dots s_n}P_n + (-1)^n \frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n}A_1$$

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

$$(1 - \frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n})A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3 + s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots + \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1s_2 \dots s_n}P_n$$

$$A_1 = \frac{s_1s_2 \dots s_n}{s_1s_2 \dots s_n + r_1r_2 \dots r_n} \left[\frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3 + s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots + \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1s_2 \dots s_n}P_n \right]$$

故 A_1 有唯一解。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

$$(1 - \frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n})A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3 + s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots - \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1s_2 \dots s_n}P_n$$

1. 若 $\frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n} \neq 1$

$$\text{則 } A_1 = \frac{s_1s_2 \dots s_n}{s_1s_2 \dots s_n - r_1r_2 \dots r_n} \left[\frac{r_1 + s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3 + s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots - \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1s_2 \dots s_n}P_n \right]$$

故 A_1 有唯一解。

2. 若 $\frac{r_1 r_2 \cdots r_n}{s_1 s_2 \cdots s_n} = 1$ ，則 A_1 為無解或無限多解。

$$(1) \text{當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \cdots - \frac{r_1 r_2 \cdots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1 s_2 \cdots s_n} P_n = 0$$

則 A_1 有無限多解。

$$(2) \text{當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \cdots - \frac{r_1 r_2 \cdots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1 s_2 \cdots s_n} P_n \neq 0$$

則 A_1 為無解。

以上討論，若 A_1 有解，可利用 A_1 分別求出 A_2 、 A_3 、 $\cdots$ 、 A_n 之值。

[結論二] 給定平面 n 個相異點上 P_1 、 P_2 、 P_3 、 $\cdots$ 、 P_n ，欲以 P_1 、 P_2 、 P_3 、 $\cdots$ 、 P_n

為 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 的各邊分點，使 $\overline{A_1 P_1} : \overline{P_1 A_2} = r_1 : s_1$ ， $\overline{A_2 P_2} : \overline{P_2 A_3} =$

$$r_2 : s_2, \cdots, \overline{A_n P_n} : \overline{P_n A_1} = r_n : s_n$$

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)，可決定唯一的 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

1. 若 $\frac{r_1 r_2 \cdots r_n}{s_1 s_2 \cdots s_n} \neq 1$ ，可決定唯一的 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 。

2. 若 $\frac{r_1 r_2 \cdots r_n}{s_1 s_2 \cdots s_n} = 1$

$$(1) \text{當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \cdots - \frac{r_1 r_2 \cdots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1 s_2 \cdots s_n} P_n = 0$$

則 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 有無限多個。

$$(2) \text{當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \cdots - \frac{r_1 r_2 \cdots r_{n-1}(r_n + s_n)}{s_1 s_2 \cdots s_n} P_n \neq 0$$

則 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 不存在。

三、設計電腦軟體輔助研究，並展示研究成果。

使用坐標法，上述公式如果以人工計算，來判斷所求多邊形是否存在，及算出多邊形各頂點坐標值，必須做大量且繁雜的計算，在實際操作運算時是很困難的。因此我們希望利用電腦快速正確的計算能力與精確的繪圖功能，在指定平面上 n 個分點，及給定各分點將每邊分成兩段長之比後，能達成下列目標：

(一)、判斷所求多邊形是否存在？

(二)、所求多邊形存在時，能繪出一個多邊形的圖形。

1. 當所求多邊形有無限多個時，能改變多邊形的「頂點」，以觀察多邊形為無限多解的情形。

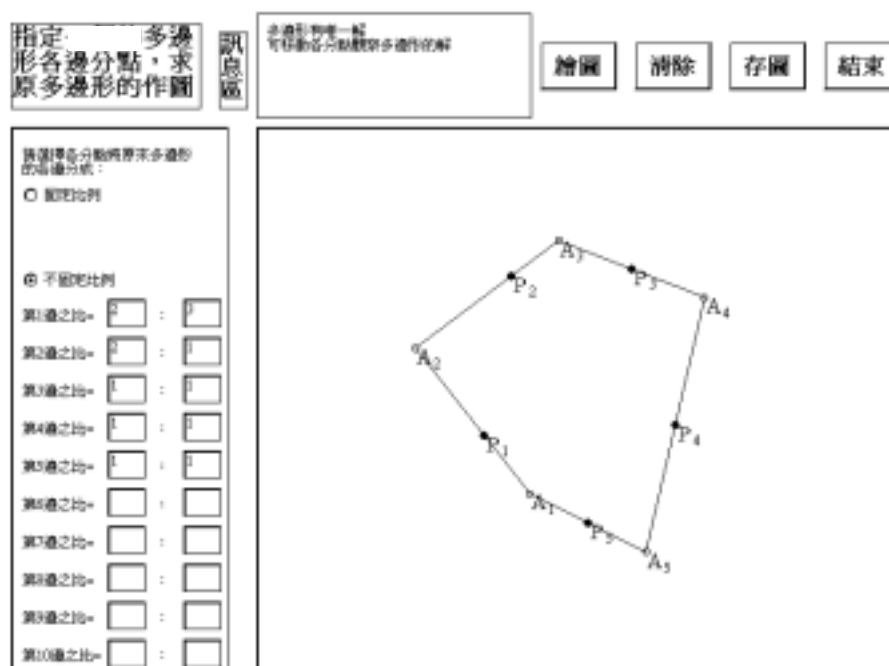
2. 當所求多邊形是唯一決定時，能改變多邊形的「分點」，以觀察多邊形圖形的變化情形。

(三)、所求多邊形不存在時，能由程式計算後改變分點位置，使所求多邊形能夠存在，並繪出一個多邊形的圖形。

【流程圖列於附件三(附件第 6 頁)】

我們已完成這套軟體，執行結果螢幕畫面如下：

【操作方法列於附件四(附件第 7 頁)】



肆、討論

- 一、「尺規作圖法」可解決「中點」問題，卻不易解決「分點」問題。
- 二、「尺規作圖法」繪圖不易精確。
- 三、「坐標法」可導出公式，同時解決「中點」與「分點」問題。
- 四、「坐標法」的公式以人工運算時，需要做大量且複雜的計算。
- 五、利用電腦快速正確的計算能力與精確的繪圖功能，可設計程式同時解決計算繁雜與作圖精確度問題。
- 六、電腦繪圖有助於我們瞭解當改變分點或頂點時，所求多邊形的圖形變化情形。

伍、結論

我們發展兩套方法分別做研究，得到了一致的結論，分述如下：

一、「尺規作圖法」

以給定三點、四點為各邊中點，分別作出所求三角形與四邊形的尺規作圖法為基礎，發展出下列結論：

〔結論一〕給定平面上 n 個相異點 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ，欲以 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的各邊中點，

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

若存在 $\frac{n-3}{2}$ 個點 $O_1, O_2, \dots, O_{\frac{n-3}{2}}$ ，與 n 個相異點 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ，

M_n ，形成 $\frac{n-3}{2}$ 個平行四邊形和 1 個三角形，則可決定唯一的 n 邊形

$A_1A_2 \dots A_n$ 。否則 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 不存在。

其尺規作圖法為結合 1 個三角形與數個四邊形的作圖方法，已如前述。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

若存在 $\frac{n-4}{2}$ 個點 $O_1, O_2, \dots, O_{\frac{n-4}{2}}$ ，與 n 個相異點 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ，形成 $\frac{n-2}{2}$ 個平行四邊形，則可決定無限多個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

否則 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 不存在。

其尺規作圖法為結合數個四邊形的作圖方法，已如前述。

二、「坐標法」

利用坐標的運算規則，發展了下列多邊形各邊分點與多邊形的關係的公式：(中點為分點的特殊情形)

(結論二) 給定平面 n 個相異點上 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ，欲以 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的各邊分點，使 $\overline{A_1P_1} : \overline{P_1A_2} = r_1 : s_1$ ， $\overline{A_2P_2} : \overline{P_2A_3} =$

$r_2 : s_2$ ， $\dots$ ， $\overline{A_nP_n} : \overline{P_nA_1} = r_n : s_n$

(一)、當 n 為奇數時($n \geq 3$)

則可決定唯一的 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

其中，

$$A_1 = \frac{s_1s_2 \dots s_n}{s_1s_2 \dots s_n + r_1r_2 \dots r_n} \left[\frac{r_1+s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2+s_2)}{s_1s_2} P_2 + \frac{r_1r_2(r_3+s_3)}{s_1s_2s_3} P_3 - \dots + \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n+s_n)}{s_1s_2 \dots s_n} P_n \right]$$

由 A_1 可依次求出 $A_2, A_3, \dots, A_n$ 。

(二)、當 n 為偶數時($n \geq 4$)

1. 若 $\frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n} \neq 1$

則可決定唯一的 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

其中，

$$A_1 = \frac{s_1s_2 \dots s_n}{s_1s_2 \dots s_n - r_1r_2 \dots r_n} \left[\frac{r_1+s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2+s_2)}{s_1s_2} P_2 + \frac{r_1r_2(r_3+s_3)}{s_1s_2s_3} P_3 - \dots - \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n+s_n)}{s_1s_2 \dots s_n} P_n \right]$$

由 A_1 可依次求出 $A_2, A_3, \dots, A_n$ 。

2. 若 $\frac{r_1r_2 \dots r_n}{s_1s_2 \dots s_n} = 1$

$$(1) \text{ 當 } \frac{r_1+s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2+s_2)}{s_1s_2} P_2 + \frac{r_1r_2(r_3+s_3)}{s_1s_2s_3} P_3 - \dots - \frac{r_1r_2 \dots r_{n-1}(r_n+s_n)}{s_1s_2 \dots s_n} P_n = 0$$

則可決定無限多個 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

其中， A_1 位置可任意指定(只要異於 n 個分點即可)， $A_2, A_3, \dots, A_n$ 位置隨著 A_1 而確定。

$$(2) \text{ 當 } \frac{r_1+s_1}{s_1}P_1 - \frac{r_1(r_2+s_2)}{s_1s_2}P_2 + \frac{r_1r_2(r_3+s_3)}{s_1s_2s_3}P_3 - \dots - \frac{r_1r_2\cdots r_{n-1}(r_n+s_n)}{s_1s_2\cdots s_n}P_n \neq 0$$

則 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 不存在。

其作圖法為設計程式以電腦繪出，但多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 存在時，若有相鄰三頂點共線，邊數會減少，不符合 n 個邊的條件，此多邊形應予捨棄。

陸、未來發展

以「尺規作圖法」繼續探討「分點」研究的可能性。

柒、參考資料

- 一、國民中學數學教科書
- 二、Visual Basic 程式語言相關書籍

【附件一】

(一)、 三角形

設平面上三相異點為 M_1 、 M_2 、 M_3 ，是否可以找到 $\triangle A_1A_2A_3$ ？使 M_1 、 M_2 、 M_3 分別為 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三邊中點。

令 $\triangle A_1A_2A_3$ 為所求三角形，且三邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_1}$ 的中點依次為 M_1 、 M_2 、 M_3 ，由線段中點公式，可知

$$M_1 = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad M_2 = \frac{A_2 + A_3}{2}, \quad M_3 = \frac{A_3 + A_1}{2}$$

得到 $A_1 = 2M_1 - A_2$ ， $A_2 = 2M_2 - A_3$ ， $A_3 = 2M_3 - A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2M_1 - (2M_2 - A_3) = 2M_1 - [2M_2 - (2M_3 - A_1)] \\ &= 2M_1 - 2M_2 + 2M_3 - A_1 \end{aligned}$$

故 $A_1 = M_1 - M_2 + M_3$

同理 $A_2 = M_2 - M_3 + M_1$

$$A_3 = M_3 - M_1 + M_2$$

由上可知， A_1 、 A_2 、 A_3 可由 M_1 、 M_2 、 M_3 唯一決定，可得到與[心得一]相同的心得：

[心得一*]平面上任給 M_1 、 M_2 、 M_3 三點不共線，以 M_1 、 M_2 、 M_3 為三角形的三邊中點，可決定唯一的 $\triangle A_1A_2A_3$ 。否則 $\triangle A_1A_2A_3$ 不存在。

(二)、 四邊形

設平面上四相異點為 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 ，是否可以找到四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ？使 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的各邊中點。

令四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為所求四邊形，四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 中點依次為 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 。

$$\text{則 } M_1 = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad M_2 = \frac{A_2 + A_3}{2}, \quad M_3 = \frac{A_3 + A_4}{2}, \quad M_4 = \frac{A_4 + A_1}{2}$$

得到 $A_1 = 2M_1 - A_2$ ， $A_2 = 2M_2 - A_3$ ， $A_3 = 2M_3 - A_4$ ， $A_4 = 2M_4 - A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2M_1 - (2M_2 - A_3) = 2M_1 - [2M_2 - (2M_3 - A_4)] \\ &= 2M_1 - \{2M_2 - [2M_3 - (2M_4 - A_1)]\} \\ &= 2M_1 - 2M_2 + 2M_3 - 2M_4 + A_1 \end{aligned}$$

故 $0A_1 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4$

可知，

1. 若 $M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0$ ，則 A_1 為任意點。當 A_1 確定後， A_2 、 A_3 、 A_4 三點位置也隨著確定。所以四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 有無限個。
2. 若 $M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \neq 0$ ，則 A_1 無解。即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不存在。

上述「 $M_1-M_2+M_3-M_4=0$ 」的條件與「四邊形 $M_1M_2M_3M_4$ 形成平行四邊形」的條件兩者意義是相同的。可證明如下：

四邊形 $M_1M_2M_3M_4$ 為平行四邊形

⇔兩對角線互相平分，即 $\frac{M_1+M_3}{2} = \frac{M_2+M_4}{2}$

⇔ $M_1+M_3=M_2+M_4$

⇔ $M_1 - M_2+M_3 - M_4 = 0$

因此得到：

〔心得二〕若平面上四相異點 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 形成平行四邊形時(即 $M_1 - M_2+M_3 - M_4 = 0$)，則以 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為四邊形的四邊中點，可決定無限多個四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。否則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不存在。

【附件二】

(一)、 三角形

給定平面上三相異點 P_1 、 P_2 、 P_3 ，求 $\Delta A_1A_2A_3$ 使 P_1 、 P_2 、 P_3 分別為三邊 $\overline{A_1A_2}$ 、

$\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_1}$ 分點，且 $\overline{A_1P_1} : \overline{P_1A_2} = r_1 : s_1$ ， $\overline{A_2P_2} : \overline{P_2A_3} = r_2 : s_2$ ， $\overline{A_3P_3} : \overline{P_3A_1} =$

$r_3 : s_3$ 。由線段分點公式，可知

$$P_1 = \frac{s_1 A_1 + r_1 A_2}{r_1 + s_1}, \quad P_2 = \frac{s_2 A_2 + r_2 A_3}{r_2 + s_2}, \quad P_3 = \frac{s_3 A_3 + r_3 A_1}{r_3 + s_3}$$

$$A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1}{s_1} A_2, \quad A_2 = \frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2}{s_2} A_3, \quad A_3 = \frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3}{s_3} A_1$$

$$A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1}{s_1} \left(\frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2}{s_2} A_3 \right)$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} A_3$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \left(\frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3}{s_3} A_1 \right)$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3}{s_1 s_2 s_3} A_1$$

$$\text{則 } \frac{r_1 r_2 r_3 + s_1 s_2 s_3}{s_1 s_2 s_3} A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3$$

$$A_1 = \frac{s_1 s_2 s_3}{r_1 r_2 r_3 + s_1 s_2 s_3} \left(\frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 \right)$$

$$\text{同理 } A_2 = \frac{s_1 s_2 s_3}{r_1 r_2 r_3 + s_1 s_2 s_3} \left(\frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2(r_3 + s_3)}{s_2 s_3} P_3 + \frac{r_2 r_3 (r_1 + s_1)}{s_1 s_2 s_3} P_1 \right)$$

$$A_3 = \frac{s_1 s_2 s_3}{r_1 r_2 r_3 + s_1 s_2 s_3} \left(\frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3(r_1 + s_1)}{s_1 s_3} P_1 + \frac{r_1 r_3 (r_2 + s_2)}{s_1 s_2 s_3} P_2 \right)$$

由上列三式可得到

[心得七] 平面上任給 P_1 、 P_2 、 P_3 三點不共線，以 P_1 、 P_2 、 P_3 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三邊分點，則可決定唯一的 $\Delta A_1A_2A_3$ 。

(二)、 四邊形

給定平面上四相異點 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ，求四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 使 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 分別

為四邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 分點，且 $\overline{A_1P_1} : \overline{P_1A_2} = r_1 : s_1$ ， $\overline{A_2P_2} : \overline{P_2A_3} =$

$r_2 : s_2$ ， $\overline{A_3P_3} : \overline{P_3A_4} = r_3 : s_3$ ， $\overline{A_4P_4} : \overline{P_4A_1} = r_4 : s_4$ 。

$$\text{因為 } A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1}{s_1} A_2, A_2 = \frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2}{s_2} A_3$$

$$A_3 = \frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3}{s_3} A_4, A_4 = \frac{r_4 + s_4}{s_4} P_4 - \frac{r_4}{s_4} A_1$$

$$A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1}{s_1} \left(\frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2}{s_2} A_3 \right)$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} A_3$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \left(\frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3}{s_3} A_4 \right)$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3}{s_1 s_2 s_3} A_4$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3}{s_1 s_2 s_3} \left(\frac{r_4 + s_4}{s_4} P_4 - \frac{r_4}{s_4} A_1 \right)$$

$$= \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3 (r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 + \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} A_1$$

$$\left(1 - \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} \right) A_1 = \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3 (r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4$$

1. 若 $\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} \neq 1$ ，則 A_1 有唯一解。

$$A_1 = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{s_1 s_2 s_3 s_4 - r_1 r_2 r_3 r_4} \left(\frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3 (r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 \right)$$

$$A_2 = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{s_1 s_2 s_3 s_4 - r_1 r_2 r_3 r_4} \left(\frac{r_2 + s_2}{s_2} P_2 - \frac{r_2(r_3 + s_3)}{s_2 s_3} P_3 + \frac{r_2 r_3 (r_4 + s_4)}{s_2 s_3 s_4} P_4 - \frac{r_2 r_3 r_4 (r_1 + s_1)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_1 \right)$$

$$A_3 = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{s_1 s_2 s_3 s_4 - r_1 r_2 r_3 r_4} \left(\frac{r_3 + s_3}{s_3} P_3 - \frac{r_3(r_4 + s_4)}{s_3 s_4} P_4 + \frac{r_3 r_4 (r_1 + s_1)}{s_1 s_3 s_4} P_1 - \frac{r_1 r_3 r_4 (r_2 + s_2)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_2 \right)$$

$$A_4 = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{s_1 s_2 s_3 s_4 - r_1 r_2 r_3 r_4} \left(\frac{r_4 + s_4}{s_4} P_4 - \frac{r_4(r_1 + s_1)}{s_1 s_4} P_1 + \frac{r_1 r_4 (r_2 + s_2)}{s_1 s_2 s_4} P_2 - \frac{r_1 r_2 r_4 (r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_3 \right)$$

2. 若 $\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} = 1$, 則 A_1 為無解或無限多解。(A_2 、 A_3 、 A_4 與 A_1 同時為無解或無限多解)

$$(1) \text{ 當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3(r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 = 0$$

則 A_1 有無限多解 , 即四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 有無限多個。

$$(2) \text{ 當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3(r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 \neq 0$$

則 A_1 為無解 , 即四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 不存在。

[心得八] 給定平面上四相異點 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 , 以 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 為四邊形

$A_1 A_2 A_3 A_4$ 的四邊分點 , 使 $\overline{A_1 P_1} : \overline{P_1 A_2} = r_1 : s_1$, $\overline{A_2 P_2} : \overline{P_2 A_3} = r_2 : s_2$, $\overline{A_3 P_3} :$

$$\overline{P_3 A_4} = r_3 : s_3 , \quad \overline{A_4 P_4} : \overline{P_4 A_1} = r_4 : s_4 ,$$

1. 若 $\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} \neq 1$, 則可決定唯一的四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 。

2. 若 $\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{s_1 s_2 s_3 s_4} = 1$, 則四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為無解或無限多解。

$$(1) \text{ 當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3(r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 = 0$$

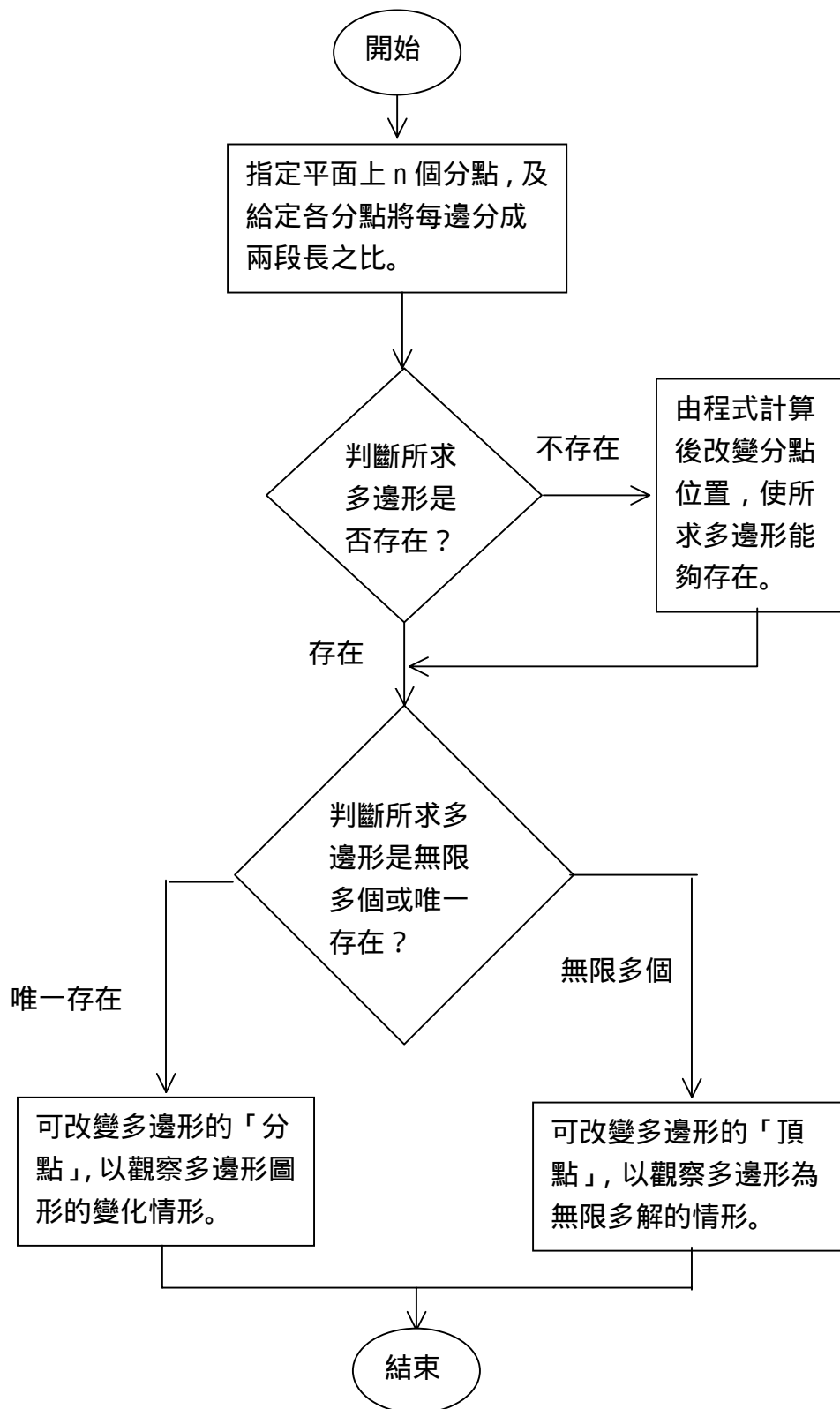
則四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 有無限多個。

$$(2) \text{ 當 } \frac{r_1 + s_1}{s_1} P_1 - \frac{r_1(r_2 + s_2)}{s_1 s_2} P_2 + \frac{r_1 r_2(r_3 + s_3)}{s_1 s_2 s_3} P_3 - \frac{r_1 r_2 r_3(r_4 + s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4} P_4 \neq 0$$

則四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 不存在。

【附件三】

流程圖如下：



【附件四】

電腦軟體操作方法概述如下：

- 1、畫面上方之訊息區，可隨時提供操作上的各項提示作法。
- 2、右方大框內，可用滑鼠左鍵按照順(逆)時針方向依序點選數個分點。
- 3、所選各分點可用滑鼠左鍵拖曳移動位置，也可用滑鼠右鍵取消分點。
- 4、左方大框內，可選擇各分點將多邊形的各邊分成固定或不固定比例。
- 5、輸入上述之比例。
- 6、在右上角選擇「繪圖」後，
 - (1)若所求多邊形唯一存在時，可自動繪出這個多邊形。我們還可用滑鼠左鍵拖曳某一分點改變其位置，來觀察多邊形圖形的變化。
 - (2)若所求多邊形無限多解時，可自動繪出一個多邊形。我們還可用滑鼠左鍵拖曳某一頂點改變其位置，來觀察多邊形為無限多解的情形。
 - (3)若所求多邊形不存在時，可由程式計算後改變某一分點位置，使所求多邊形存在(為無限多解)，並自動繪出一個多邊形。我們還可用滑鼠左鍵拖曳某一頂點改變其位置，來觀察多邊形為無限多解的情形。
- 7、選擇「清除」，可重新點選分點及輸入比例。
- 8、選擇「存圖」，可將所繪出的多邊形儲存於「桌面」。
- 9、選擇「結束」，可結束程式。