

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：球的移動—引出數學之「妙」

關 鍵 詞：樹狀圖、球的移動、捷徑總數

編 號：030404

學校名稱：

臺北縣立福和國民中學

作者姓名：

劉捷伶、沈貽婷、李婕妤、陳紫潔

指導老師：

陳明貴、鄭釗鋒



球的移動一

引出的數學之「妙」

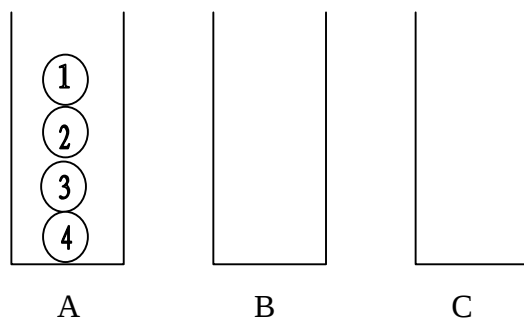
壹、摘要：

我們先利用最基本的樹狀圖，可推導出許多奇妙的關係與規律，也知道了尤拉分割公式與三管的問題有極大的關聯性，使我們得到了三管的公式，但由於三管和四管的公式無法相通，因此我們將樹狀圖先簡化成數對形式，再轉成網狀圖，最後調整為階梯圖，不僅讓三管與四管有了關聯性，也讓我們猜測出五管以上可能為超立體的圖形，讓我們完整的結束了這個研究。

貳、研究動機：

在國中數學課本第六冊第二章「機率與資料統計」，學習「樹狀圖」的課程中，老師提供了一個樹狀圖的練習題：將四個編號為 1、2、3、4 的小球，依下圖順序放在 A 管中，把 A 管的球經 B 管單向移動至 C 管，B 管中可暫存若干球，但必須遵循「後進先出」的原則。試問將小球全部移到 C 管之後，C 管的球可能有多少種不同的排列方式？

這個題目利用樹狀圖的確可以解決，但當我們把球數增加時，發現了奇妙的規律；當我們把管子從三管增加到四管時，又面對了前所未有的挑戰，所以便開始我們的研究。



參、研究目的：

<主題一> 三管 n 球的研究

- 一、利用樹狀圖的方式紀錄並觀察三管 3、4 球的「移動過程」與結果的「排列方式」。
- 二、探討三管 n 球移動過程總數——以 n 號球的位置分類。
- 三、如何快速求出三管 n 球的移動過程總數——以 1 號球的位置分類。

<主題二> 如何將三管推廣到四管、五管……的研究

- 四、探討三管 n 球與平面階梯圖的關係。
- 五、探討四管 n 球與立體階梯圖的關係。
- 六、瞭望 k 管 n 球。

肆、研究器材：

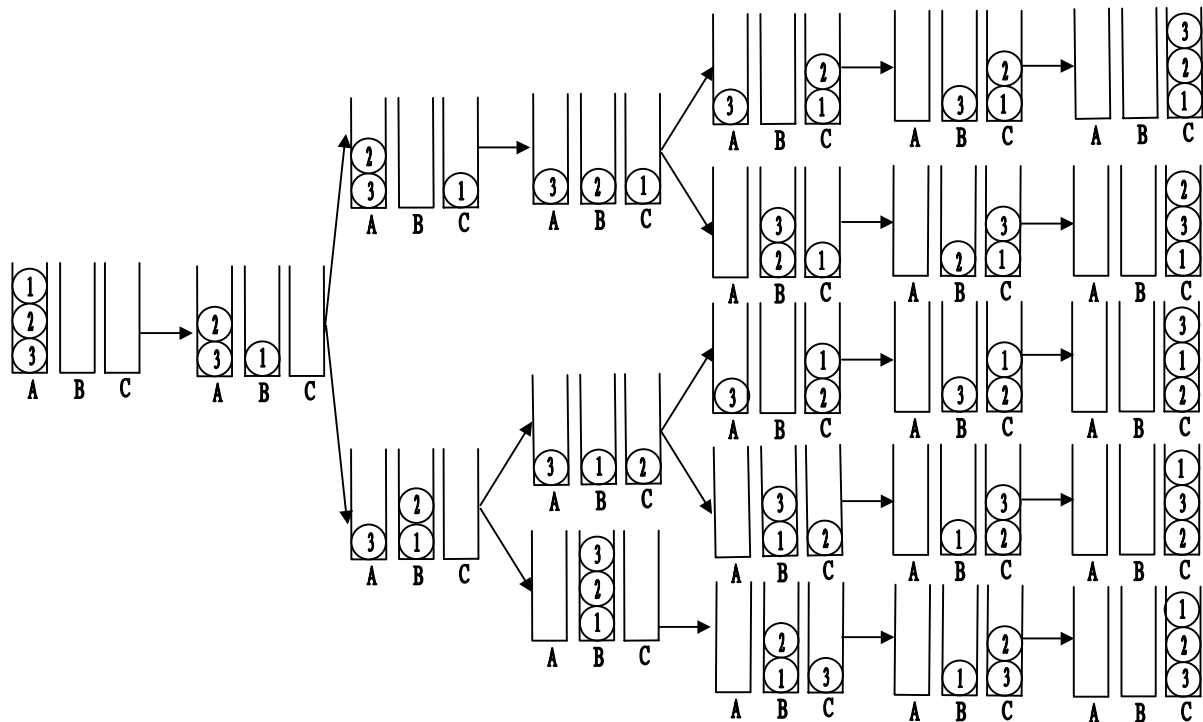
電腦、計算機、保麗龍球、牙籤、Visual Basic 6.0

伍、研究過程：

<主題一>：三管 n 球的研究：

一、利用圖解的方式紀錄並觀察三管的移動過程與結果的排列方式：

1.三管 3 球：

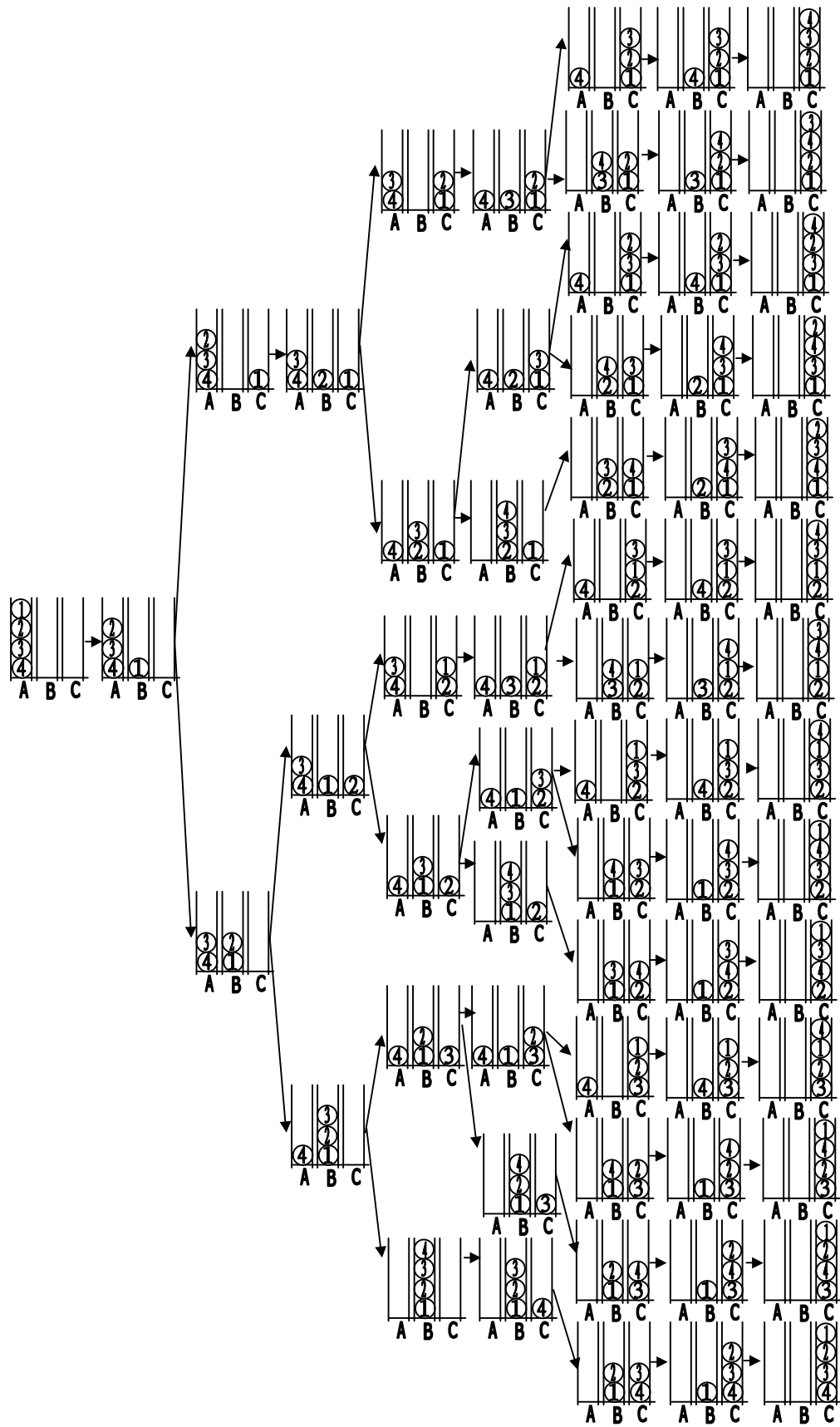


(圖 1) 三管 3 球移動樹狀圖

討論：

- (1) 在(圖 1)中，阿拉伯數字為球的編號，英文字母為管子的編號。
- (2) 觀察(圖 1)，我們發現球只能從 A 管移到 B 管或從 B 管移到 C 管，所以每種情況最多有兩個分支。
- (3) 三個球應該有 6 種排列方式，但因為「後進先出」的限制，使 312(底部→頂端)的排列方式沒有出現。
- (4) 三個球都到 C 管後，共有五種不同的移動過程。
- (5) 不同的移動過程，得到的排列方式也不同。
- (6) 當 A 管球數是零的時候，只有一種方法可讓球移動。

2. 三管 4 球



(圖 2) 三管 4 球移動樹狀圖

討論：

- (1) 四個球都到 C 管時，共有十四種不同的移動過程，不同的移動過程得到不同的排列方式。 $4! = 24$ ，所以沒有出現的排列方式數共十種。
- (2) 後進先出的限制，使得 4 號球到達 C 管後，在它上面的球一定要由下而上，球號遞減。因此不會出現的有 $4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 1423, 2413, 3412$ 。同理，3 號球到達 C 管後，在它上面比它小的球號也一定要由下而上，球號遞減，因此不會出現的有 $3124, 3142$ 。一般而言，在 k 號球上方，小於 k 號的球排列方式必是由下而上球號遞減。
- (3) 我們發現，利用樹狀圖來推導的方式，過於複雜及冗長，所以我們只好再尋找不同的解決方法。

二、探討三管 n 球移動過程總數——以 n 號球的位置分類：

1. 首先我們**定義符號** a_n 表示將 A 管 n 球由 A 管經 B 管至 C 管之移動方法總數。由上一個討論中我們可得到： $a_1 = 1$ 種 $a_2 = 2$ 種 $a_3 = 5$ 種 $a_4 = 14$ 種 $a_5 = ?$

若以樹狀圖來解，明顯太複雜了。因此我們採用另外一種方式，討論如下：

因為最後 n 個球必須全部移動到 C 管。所以我們可依 n 號球在 C 管的位置 1、2、3、...、n 的情況來討論，過程如下：

當 $n=2$ 時：根據 2 號球在 C 管的位置分成兩類：

位置 2		②
位置 1	②	
排列方式	1	1
數目小計		

討論： $a_2 = 1 + 1 = 2$

當 $n=3$ 時：根據 3 號球在 C 管的位置分成三類：

位置 3			③
位置 2		③	
位置 1	③		
排列方式	1	2	2
數目小計			

討論： $a_3 = 1 + 2 + 2 = 5$

當 $n=4$ 時：根據 4 號球在 C 管的位置分成四類：

位置 4						④	④
位置 3			③	④	④	④	
位置 2	③	④	④		③		
位置 1	④	③		③			
排列方式	1	1	2	1	2	2	a_4
數目小計	1	3		5			5

討論：

- (1) 我們原先想採用固定一個球來進行討論，但在三管四球時，這種討論方式顯然比較複雜。所以我們在以四號球分類後，又將三號球固定在不同位置來討論，

先將各項目的數據小計出來，再統計出結果。

(2) 將四號球固定在最上面時，下面的三個球的排列方式會等於三管三球的排列方式總數。

(3) $a_4 = 1 + 3 + 5 + 5 = 14$ 。

當 $n=5$ 時：根據 5 號球在 C 管的位置分成五類：

位置 5									④	⑤
位置 4					④	⑤	⑤	⑤	⑤	
位置 3			④	⑤	⑤	⑤			④	
位置 2	④	⑤	⑤		④			④		
位置 1	⑤	④		④			④			
排列方式	1	1	3	1	3	5	1	3	5	5
數目小計	1	4	9				14			14

討論： $a_5 = 1 + 4 + 9 + 14 + 14 = 42$

當 $n=6$ 時：根據 6 號球在 C 管的位置分成六類：

位置 6														⑤	⑥
位置 5									⑤	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	
位置 4						⑤	⑥	⑥	⑥	⑥				⑤	
位置 3			⑤	⑥	⑥	⑥			⑤				⑤		
位置 2	⑤	⑥	⑥		⑤			⑤				⑤			
位置 1	⑥	⑤		⑤			⑤				⑤				
排列方式	1	1	4	1	4	9	1	4	9	14	1	4	9	14	14
數目小計	1	5	14				28				42				42

討論：

(1) 上一個表格的數目在這一個表格中，很有規律的重複出現。

(2) $a_6 = 1 + 5 + 14 + 28 + 42 + 42 = 132$

2. 由上述分類我們可整理得出下面三角數列表：

1																$a_1 = 1$
1	1															$a_2 = 2$
1	2	2														$a_3 = 5$
1	3	5	5													$a_4 = 14$
1	4	9	14	14												$a_5 = 42$
1	5	14	28	42	42											$a_6 = 132$

討論：

(1) 上表出現了許多有趣的規律，例如：

① 每一列的最後兩個數都相同

② 每一列的第 k 個數為上一列前 k 個數之和：紅色的數字（三角形）相加後，再加 1，就等於綠色數字。（三角形要從最左邊開始加，但不包括最後一排。）

③ 藍色的數字相加後，會等於紫色的數字。

④ a_n = 第 n 列的 n 項和，會等於下一列最右端的數。

(2) 利用上面的規律，我們又求得

$$a_7 = 1 + 6 + 20 + 48 + 90 + 132 + 132 = 429$$

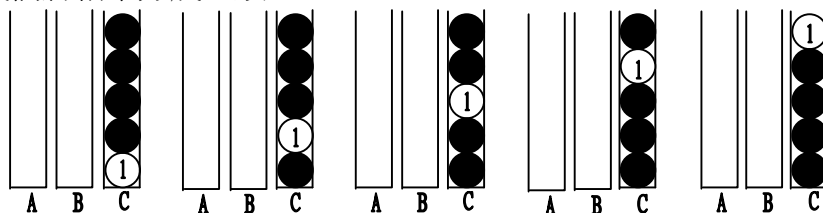
$$a_8 = 1 + 7 + 27 + 75 + 165 + 297 + 429 + 429 = 1430$$

$$a_9 = 1 + 8 + 35 + 110 + 275 + 572 + 1001 + 1430 + 1430 = 4862$$

三、如何快速求出三管 n 球的移動過程總數——以 1 號球的位置分類：

由上面三角數列求 a_n ，所求得的 a_n 雖然比樹狀圖容易多了，但與我們要的更快速的公式還有一段距離。接著，我們採用另一種策略：以 1 號球在 C 管的位置作分類。以 $n=5$ 為例說明如下：

1. 我們將結果分成五類：



(圖 3-1) (圖 3-2) (圖 3-3) (圖 3-4) (圖 3-5)

(1) 1 號球在 C 管底部位置 1，如 (圖 3-1)。移動過程如下：

將 1 號球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = 1

將剩下 4 顆球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_4

所以這一類的移動方法數共 $1 \times a_4$ 種

(2) 1 號球在 C 管位置 2，如 (圖 3-2)。移動過程如下：

將 1 號球由 A 管移動至 B 管暫放 方法數 = 1

將 2 號球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_1

將 1 號球由 B 管移動至 C 管 方法數 = 1

將剩下 3 球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_3

所以這一類的移動方法數共 $a_1 \times a_3$ 種

(3) 1 號球在 C 管位置 3，如 (圖 3-3)。移動過程如下：

將 1 號球由 A 管移動至 B 管暫放 方法數 = 1

將 2、3 號球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_2

將 1 號球由 B 管移動至 C 管 方法數 = 1

將剩下 2 球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_2

所以這一類的移動方法數共 $a_2 \times a_2$ 種

(4) 1 號球在 C 管位置 4，如 (圖 3-4)。移動過程如下：

將 1 號球由 A 管移動至 B 管暫放 方法數 = 1

將剩下 3 顆球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_3

將 1 號球由 B 管移動至 C 管 方法數 = 1

將剩下 1 球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_1

所以這一類的移動方法數共 $a_3 \times a_1$ 種

(5) 1 號球在 C 管位置 5，如 (圖 3-5)。移動過程如下：

將一號球由 A 管移動至 B 管暫放 方法數 = 1

將剩下 4 顆球由 A 管移動到 B 管至 C 管 方法數 = a_4

所以這一類的移動方法數共 $a_4 \times 1$ 種

討論：

(1) 由上面的說明我們可以發現：

$$a_5 = 1 \times a_4 + a_1 \times a_3 + a_2 \times a_2 + a_3 \times a_1 + a_4 \times 1 = 42$$

(2) 不同的移動過程，同時會得到結果的排列不同。因此「移動過程」總數和「排列方式」總數就相同了。

2. 利用上面討論過程，在三管 n 球時，我們可以推得

$$a_n = 1 \times a_{n-1} + a_1 \times a_{n-2} + \dots + a_{n-2} \times a_1 + a_{n-1} \times 1,$$

若我們定義 $a_0 = 1$ ，則上述關係式可更完美的導成：

$$a_n = a_0 \times a_{n-1} + a_1 \times a_{n-2} + \dots + a_{n-2} \times a_1 + a_{n-1} \times a_0 \quad \text{—— <公式 1>}$$

利用 <公式 1>，可以較快的求出的 a_n 值。例如：

$$a_8 = 1 \times 429 + 1 \times 132 + 2 \times 42 + 5 \times 14 + 14 \times 5 + 42 \times 2 + 132 \times 1 + 429 \times 1 = 1430$$

$$a_9 = 1 \times 1430 + 1 \times 429 + 2 \times 132 + 5 \times 42 + 14 \times 14 + 42 \times 5 + 132 \times 2 + 429 \times 1 + 1430 \times 1 = 4862$$

討論：

(1) 現在可以求出三管 n 球的「移動過程」總數了，而且結果就是「排列總數」了。

(2) 雖然所得的 <公式 1> 很漂亮，但由上面的答案可約略猜想到，當 n 的值很大時，我們仍然無法十分快速的求出 a_n 值。因此，我們試著另闢途徑，找尋是否有新的解決方式？

後來，老師建議我們上網尋找有關數列的資料，或相關書籍。終於，在林義雄教授編著的「自然數系」P.437~P.442 裡面找到資料，它竟然和大數學家尤拉的分割公式一模一樣！

3. [尤拉問題] 凸 n 邊形內用不相交的對角線，將 n 邊形分成三角形，共有多少種方法？

令 c_n ：表示適合題意將凸 n 邊形分成三角形的方法數。根據資料記載：

$$C_n = C_2 \times C_{n-1} + C_3 \times C_{n-2} + \dots + C_{n-2} \times C_3 + C_{n-1} \times C_2$$

$$= \frac{2^{n-2} \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-5)}{(n-1)!} \quad (\text{其中 } n \geq 3, \text{ 且定義 } c_2 = 1)$$

我們發現尤拉分割公式與 <公式 1> 有相似的地方：

尤拉分割公式的 c_n ：

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
無	無	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

三管 n 球移動公式的 a_n ：

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4682	16796

比較 c_n 與 a_n ，可以發現 $a_n = c_{n+2}$ ，所以我們把尤拉分割公式中 c_n 中的 n 用 $n+2$ 來替代，得出 a_n 的快速計算公式。

$$a_n = a_0 \times a_{n-1} + a_1 \times a_{n-2} + \dots + a_{n-2} \times a_1 + a_{n-1} \times a_0$$

$$= \frac{2^n \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(n+1)!} \quad (n \geq 1) \quad \text{—— <公式 2>}$$

討論：

①有了〈公式 2〉，我們不用辛辛苦苦的去求前面的值，就可以輕輕鬆鬆的求出 a_n 的值。

②因為四管的結構與三管完全不同（三管中間只有一個管子可停留，四管則有兩個），所以我們必須找出別的方法來引出四管的結論。

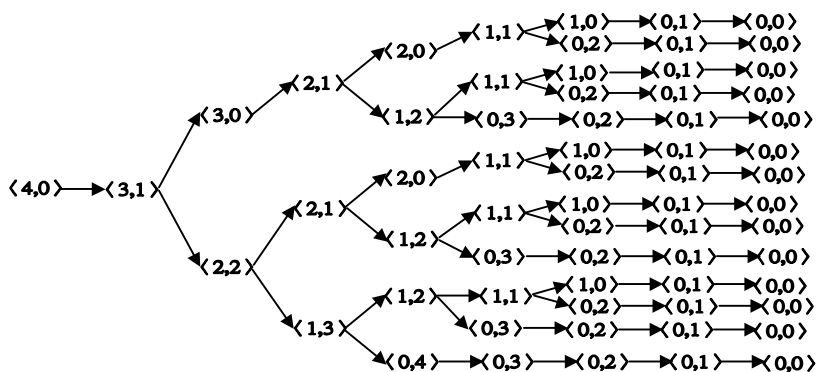
至此，總算把 a_n 的通式找出，並感受到數學的神奇，竟能讓似乎無關的兩個主題〔本主題與尤拉問題〕，得出如此密切的關聯性！

〈主題二〉：如何將三管推廣到四管、五管……的研究

四、探討三管 n 球與平面階梯圖的關係

- 我們嘗試畫一個四管 3 球的樹狀圖，發現實在太複雜了，且無法利用三管的方法導出四管的公式，於是我們比較三管和四管的樹狀圖發現有一個很不同的地方，那就是：三管的「排列方式」總數等於「移動方法」總數，也就是三管每一種排列方式只有一種移動過程可到達；而四管則是每一種排列方式都會出現，而且通常一種排列方式可以有兩種以上的移動方法。所以我們打算將研究重點放在移動過程上，也就是我們只要算出四管 n 球的移動方法總數就好了。

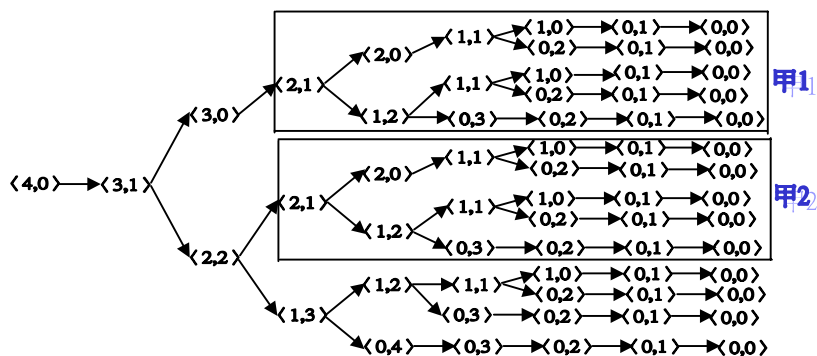
既然不再關心球的排列方式，於是球的編號就可省略了，我們只要知道樹狀圖最後有幾個分支就知道「移動方法」總數，而樹狀圖的分岔是由 A 管和 B 管的球數來決定的。因此我們只要紀錄 A 管和 B 管的球數就可以完整畫出樹狀圖了。若使用二元數對 $\langle a, b \rangle$ 來表示 A 管有 a 個球，B 管有 b 個球，則（圖 2）三管 4 球的移動樹狀圖可以簡化成：



（圖 4—1）三管 4 球移動樹狀圖（數對形式）

討論：

- 最後的 14 個分支，都是 $\langle 0, 0 \rangle$ ，表示 A、B 管的球都到 C 管了。
- 移動樹狀圖（數對形式）中，有些相同的區塊。例如甲₁、甲₂兩區塊。這些相同的區塊是由相同的數對所導引出來的。



（圖 4—2）三管 4 球移動樹狀圖（數對形式）

2.由於甲₁和甲₂兩區塊所呈現移動方法是一樣的，於是我們打算將重複的區塊合併在一起。

若定義函數 $m\langle a, b \rangle$ 為 $\langle a, b \rangle$ 到 $\langle 0, 0 \rangle$ 的分支總數，則：

$$m\langle 0, 1 \rangle = m\langle 0, 2 \rangle = m\langle 0, 3 \rangle = m\langle 0, 4 \rangle = 1$$

$$m\langle 4, 0 \rangle = a_4 = 14$$

$$m\langle 3, 1 \rangle = m\langle 3, 0 \rangle + m\langle 2, 2 \rangle$$

$$m\langle 3, 0 \rangle = m\langle 2, 1 \rangle$$

一般而言，

$$m\langle a, b \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } a < 0 \text{ or } b < 0 \\ 1, & \text{if } a = 0 \\ m\langle a-1, b+1 \rangle + m\langle a, b-1 \rangle, & \text{others} \end{cases} \quad \text{--- <公式 3>}$$

討論：

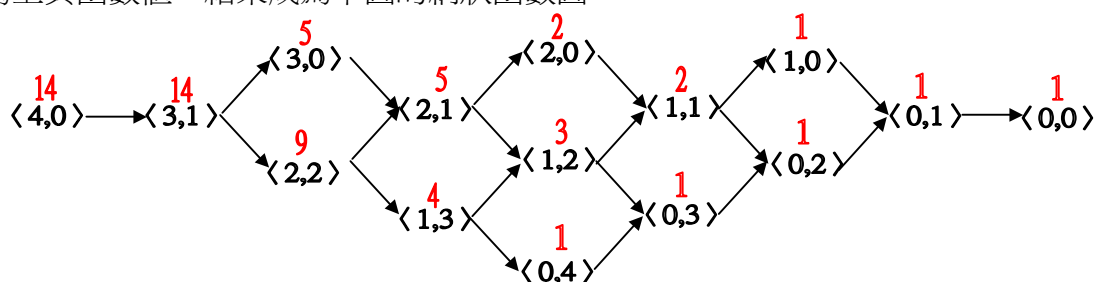
(1) 我們樹狀圖並不會出現 $a < 0$ 或 $b < 0$ 的情況，但為了簡明表達公式及將來之擴展性，規定其函數值恆為 0。

(2) 當 $a=0$ 時，只能夠依序將 B 管剩下的球移到 C 管，

$$\langle 0, b \rangle \rightarrow \langle 0, b-1 \rangle \rightarrow \langle 0, b-2 \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle 0, 0 \rangle$$

只有一個分支，所以規定 $m\langle 0, b \rangle = 1$

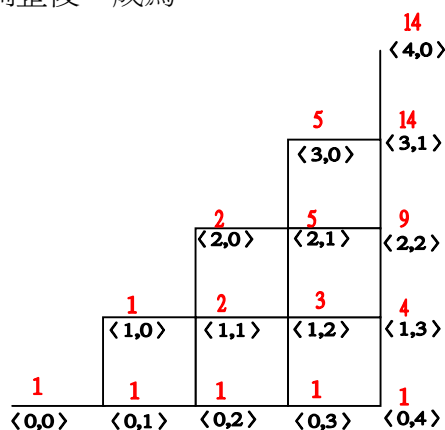
3.我們利用上面的樹狀圖及<公式 3>，先將樹狀圖中重複的區塊合併在一起，並在數對上方寫上其函數值，結果成為下圖的網狀函數圖：



(圖 5) 三管 4 球網狀函數圖

討論：函數值可以由右而左用累加的方式依序求出，最左端 $\langle 4, 0 \rangle = 14$ 表示三管 4 球有 14 種移動方法。

4.函數值累加的特性與階梯圖「捷徑總數」的觀念完全一致，而階梯圖比較容易推廣，因此我們把網狀圖方向調整後，成為：



(圖 6) 三管 4 球階梯函數圖

討論：

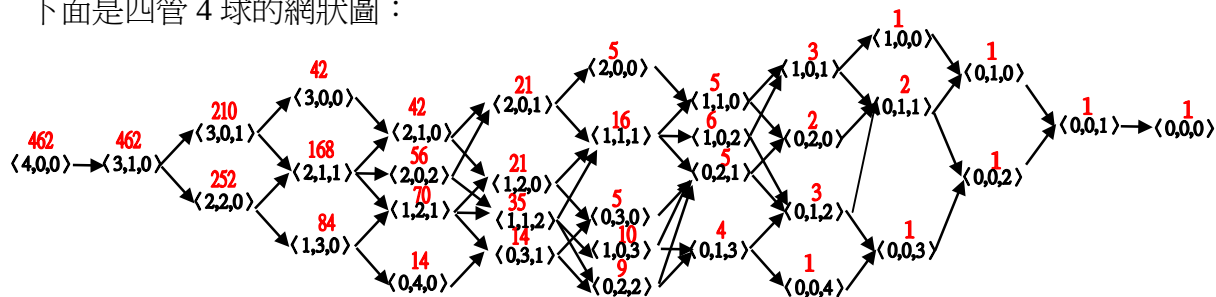
(1) (圖 6) 中黑色數字為數對。紅色數字為該數對的函數值。

(2) (圖 5) 的累加方向是由右到左，(圖 6) 的累加方向是由左下到右上。

五、探討四管 n 球的移動總方法數。

1. 在三管 n 球的移動過程中，我們必須紀錄 A 管、B 管的球數，所以用二元數對 $\langle a, b \rangle$ 來表示。在四管 n 球的移動過程中，我們必須紀錄 A 管、B 管、C 管的球數，所以用三元數對 $\langle a, b, c \rangle$ 來表示。並用函數 $m \langle a, b, c \rangle$ 表示 $\langle a, b, c \rangle$ 到 $\langle 0, 0, 0 \rangle$ 的分支總數。

下面是四管 4 球的網狀圖：



(圖 7) 四管 4 球網狀函數圖

由 (圖 7) 可知：

$$m \langle 0, 0, 1 \rangle = m \langle 0, 0, 2 \rangle = m \langle 0, 0, 3 \rangle = m \langle 0, 0, 4 \rangle = 1$$

$$m \langle 4, 0, 0 \rangle = m \langle 3, 1, 0 \rangle$$

$$m \langle 3, 1, 0 \rangle = m \langle 2, 2, 0 \rangle + m \langle 3, 0, 1 \rangle$$

$$m \langle 2, 2, 0 \rangle = m \langle 1, 3, 0 \rangle + m \langle 2, 1, 1 \rangle$$

$$m \langle 2, 1, 1 \rangle = m \langle 1, 2, 1 \rangle + m \langle 2, 0, 2 \rangle + m \langle 2, 1, 0 \rangle$$

一般而言：

$$m \langle a, b, c \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } a < 0 \text{ or } b < 0 \text{ or } c < 0 \\ 1, & \text{if } a = b = 0 \\ m \langle a-1, b+1, c \rangle + m \langle a, b-1, c+1 \rangle + m \langle a, b, c-1 \rangle, & \text{others} \end{cases} \quad \text{--- <公式 4>}$$

討論：

- (1) $a < 0$ 或 $b < 0$ 或 $c < 0$ 並不會在網狀圖中出現，但為了簡明表達公式故規定其函數值為 0。

- (2) 當 $a = b = 0$ 時，只能夠依序將 C 管剩下的球移動到 D 管

$$\langle 0, 0, c \rangle \rightarrow \langle 0, 0, c-1 \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle 0, 0, 0 \rangle$$

只有一個分支，所以規定 $m \langle 0, 0, c \rangle = 1$

- (3) 四管 4 球的移動方法總數為 $m \langle 4, 0, 0 \rangle = 462$

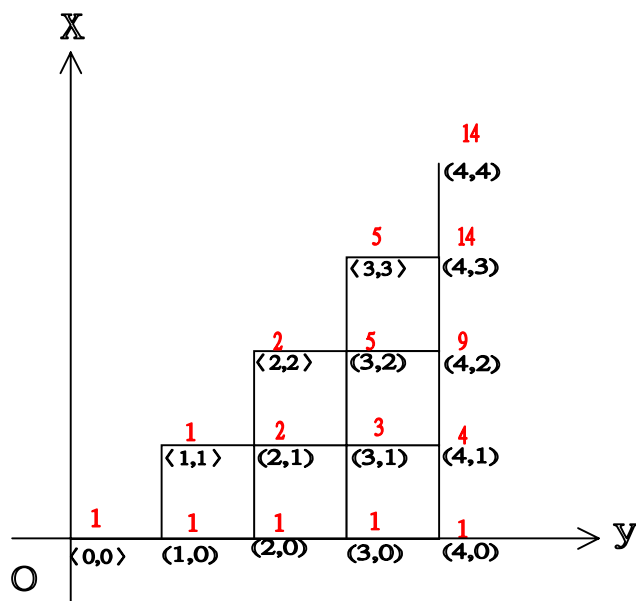
- (4) 三管的網狀圖我們可以調整為平面階梯圖，簡化計算過程。

四管的網狀圖可不可以調整成立體階梯圖呢？

如果可以，立體階梯圖會長成什麼樣子呢？

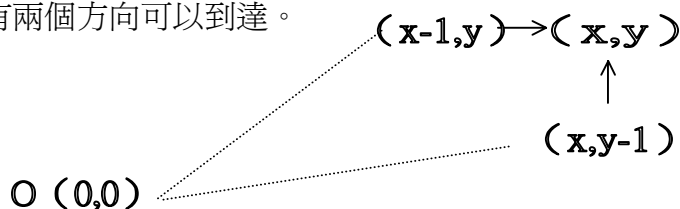
2.用「捷徑總數」探討階梯圖

〔捷徑總數〕問題：在下面的平面座標階梯圖中，從原點 $O(0,0)$ 出發，到位置 (x,y) 的「捷徑總數」有幾條？



(圖 8) 平面座標階梯圖

討論：因為要求的是捷徑，所以從 O 點出發，遇到岔路口，只能右行或上行。也就是說每個位置最多只有兩個方向可以到達。



因此到達位置 (x,y) 的捷徑總數可分為二大類——從 $(x-1,y)$ 過來的捷徑與從 $(x,y-1)$ 上來的捷徑。

定義函數 $f(x,y)$ 為從原點到位置 (x,y) 的捷徑總數，

則 $f(x,y) = f(x-1,y) + f(x,y-1)$ ，考慮一些不合的條件後可寫成：

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < y \text{ or } y < 0 \\ 1, & \text{if } y = 0 \\ f(x-1,y) + f(x,y-1), & \text{others} \end{cases} \quad \text{——<公式 5>}$$

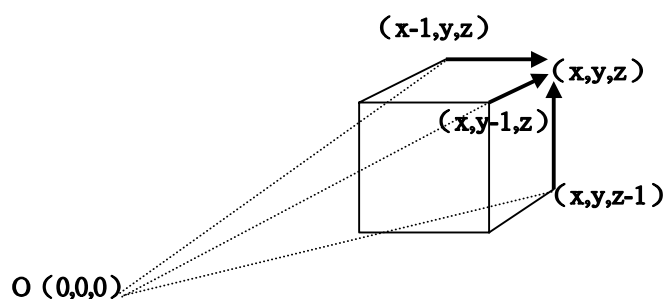
討論：

- (1) 圖形中並沒有 $x < y$ 或 $y < 0$ 的位置座標，為了簡明表達公式，規定其函數恆為 0。
- (2) 當 $y=0$ 時只能沿著 x 軸右行到達：

原點 $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow \dots \rightarrow (x,0)$

只有一條捷徑所以規定 $f(x,0) = 1$

在三度空間的「捷徑總數」問題中，每個岔路口最多會有三個方向可以到達。



所以 $f(x, y, z) = f(x-1, y, z) + f(x, y-1, z) + f(x, y, z-1)$ ，考慮一些不合的條件後可寫成：

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < y \text{ } y < z \text{ or } z < 0 \\ 1, & \text{if } y = z = 0 \\ f(x-1, y, z) + f(x, y-1, z) + f(x, y, z-1), & \text{others} \end{cases} \quad \text{--- <公式 6>}$$

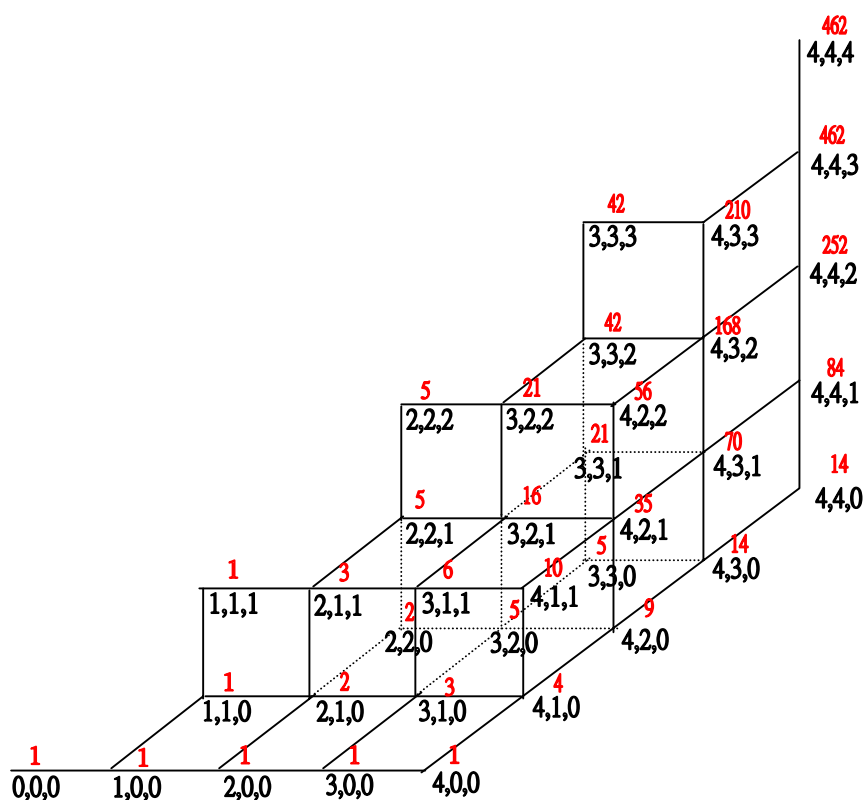
討論：現在我們可以藉由<公式 6>的協助，開始架構立體階梯圖了。

3.用實物造出立體階梯圖

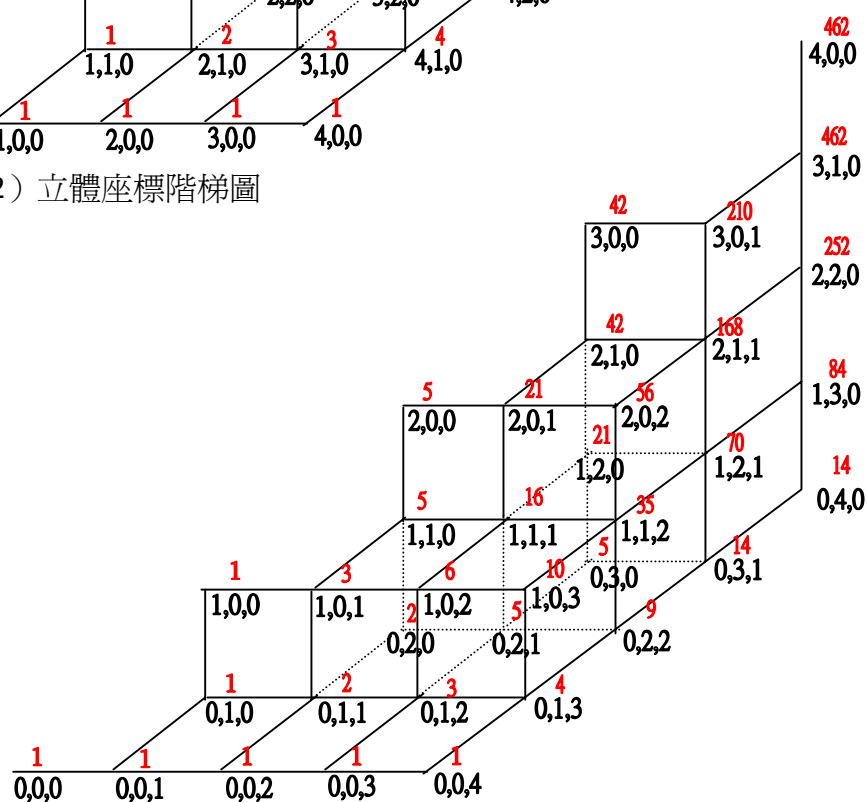
- (1) 根據<公式 6>，用實物造出原點 (0,0,0) 到位置 (4,4,4) 的立體座標階梯圖模型，如 (圖 9-1)。做出圖形架構後，我們把它畫成 (圖 9-2)。現在的問題是要把 (圖 7) 的數對和函數值對應後再和座標吻合。我們先從起點開始出發，也就是先把數對中的〈4,0,0〉開始，由座標圖的架構方式逐一進行分岔，利用數對間的連接以及函數值的對照，慢慢的將數對填入，而且還要特別留意有三個可以延伸的方向，且累加數字一樣可由三個方向相加，盡量小心避免出錯，經過了不斷的檢驗和修改，再加上利用實物模型的操作比較容易理解，終於把 (圖 7) 網狀圖的數對完全填入立體座標模型中，如 (圖 9-3)：



(圖 9-1) 立體座標階梯圖模型



(圖 9-2) 立體座標階梯圖



(圖 9-3) 四管 4 球立體階梯圖

討論：

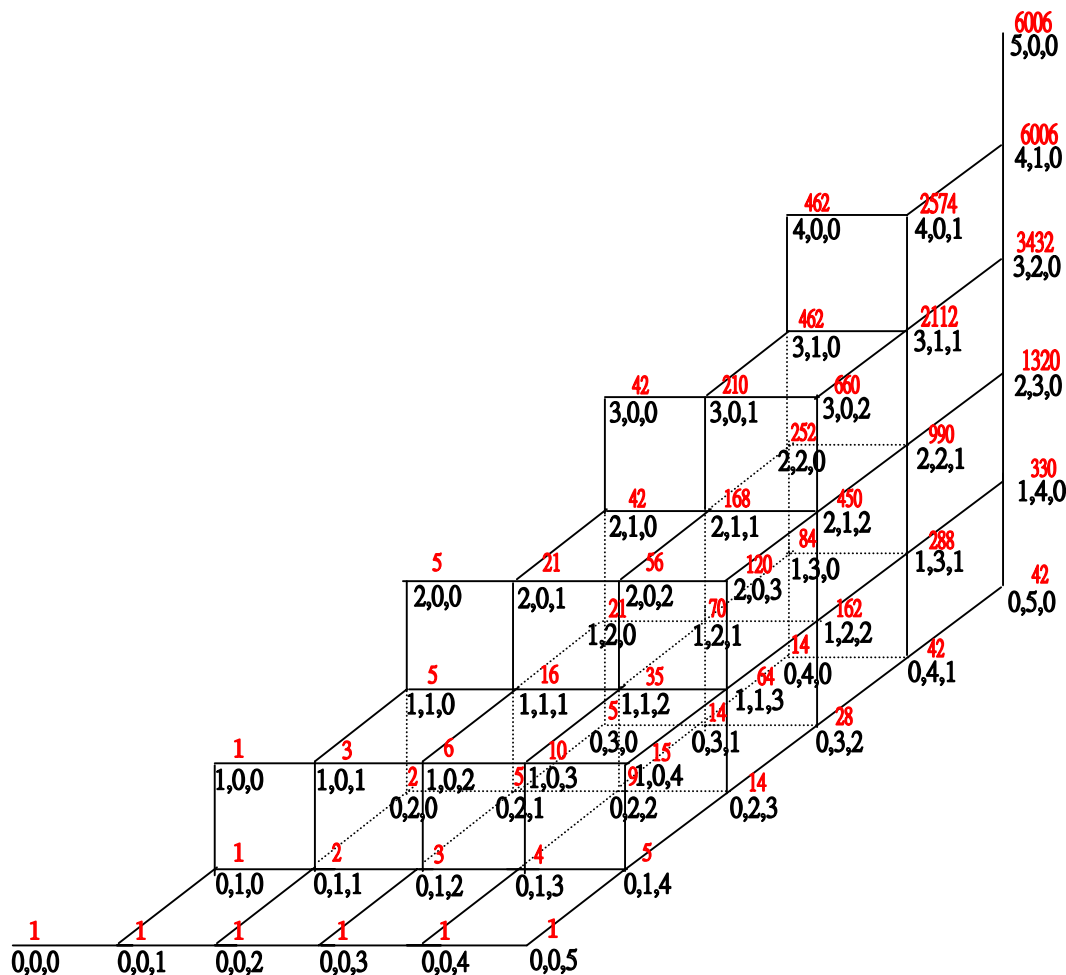
①我們將 a, b, c 數對填入後，發現：如果數對 $\langle a, b, c \rangle$ 與座標 (x, y, z) 表示相同位置，則：

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = z \\ b = y - z \\ c = x - y \end{cases}$$

②四管 4 球網狀圖的數對，和 $(0,0,0) \rightarrow (4,4,4)$ 階梯圖的座標位置可以完全吻合配對成功，表示四管網狀圖的確可以轉換成立體階梯圖。

③ $m \langle 4,0,0 \rangle = f(4,4,4) = 462$ ，表示四管 4 球的移動方法總數和 $(0,0,0) \rightarrow (4,4,4)$ 捷徑總數相同，都是 462。

(2) 我們仿照四管 4 球的方式，再畫了一個四管 5 球的立體階梯圖，如 (圖 10)：



(圖 10) 四管 5 球立體階梯圖

討論：

①立體階梯圖的確可用來計算四管 n 球的問題。

②從 (圖 9)、(圖 10) 得四管 4 球有 462 種移動過程，
四管 5 球有 6006 種移動過程。

③定義 b_n 代表四管 n 球的移動過程總數，則：

$$b_1=1 \quad b_2=5 \quad b_3=42 \quad b_4=462 \quad b_5=6006$$

六、瞭望 k 管 n 球：

我們在三管及四管的研究過程中，發現網狀圖調整而得出的階梯圖，不但可以解決球的移動問題，我們還發現「開票問題」也可以用階梯圖處理。

〔開票問題〕：甲、乙兩人競選開票過程中，若開票過程中和結果甲所得票數都不小於乙所得票數，求其開票過程的方法總數？

利用階梯圖我們可知道，甲的票數恆大於或等於乙的票數，且每往右邊走一個單位，甲

就多一票；每往上一個單位，乙就多一票。當我們把甲、乙的得票想成數對 (x,y) ，開票過程和階梯圖就完全一樣了。

我們知道：球數越多，代表投票的票數越多，自然移動過程也隨之增加，而管子的增加，則代表有幾個人參加競選，而且管子增加至五管時的圖形應是四維的。

討論：

- (1) 開票問題中的「甲、乙兩人競選開票過程」，以及三管的階梯圖都是在二維（平面），而開票問題中的「甲、乙、丙三人競選開票過程」，以及四管的階梯圖都是在三維（立體），依此類推，我們可以知道 k 管 n 球和 $k-1$ 人開票問題的階梯圖都是 $k-1$ 維。
- (2) 經由電腦程式的協助，我們得到更多的結果，見附錄一。

陸、研究結論：

1. 令 a_n 表示三管 n 球的移動方法總數，則：

$$a_1=1 \quad a_2=2 \quad a_3=5 \quad a_4=14 \quad a_5=42 \quad a_6=132 \quad a_7=429 \quad a_8=1430 \quad a_9=4862$$

$$a_n = a_0 \times a_{n-1} + a_1 \times a_{n-2} + \dots + a_{n-2} \times a_1 + a_{n-1} \times a_0$$

$$= \frac{2^n \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(n+1)!} \quad (n \geq 1)$$

2. 在三管 n 球的移動過程樹狀圖，最多只有兩個分支。
3. 在三管 n 球時，一種排列方式只有一種移動方法，所以移動方法數等於排列方式數。
4. 三管 n 球移動結果的排列方式：在 k 號球上方，小於 k 號的球排列方式必是由下而上球號遞減。
5. 網狀圖經由調整後，可變成階梯圖，和捷徑總數及開票問題的解法都完全相同。
6. 由於三管是一個平面階梯圖，四管是一個立體階梯圖，即每增加一管，數對增加一元，圖形也增加一維，所以依此類推，四管以上的圖形皆遵守此規律。
7. 在三管時，因為中間只有一個管子可以停留，所以排列方式總數會等於移動方法總數。但到了四管以後，中間可停留的管子是兩個以上，所以可交換。因此排列方式總數會是球數的階乘。而移動方法數會大於排列總數。
8. 令 b_n 表示為四管 n 球的移動方法總數，則：
$$b_1=1 \quad b_2=5 \quad b_3=42 \quad b_4=462 \quad b_5=6006$$
9. 三管 n 球的 a_n 有一個公式可以直接計算，四管 n 球的 b_n 我們雖然可以用階梯圖計算，但找不到一般的公式，希望以後可以繼續探討。

柒、參考資料：

1. 國中數學課本第六冊 「機率與資料統計」
2. 林義雄教授編著 自然數系

附錄一：

(管, 球) === 移動方法

(3, 1) ==> 1
 (3, 2) ==> 2
 (3, 3) ==> 5
 (3, 4) ==> 14
 (3, 5) ==> 42
 (3, 6) ==> 132
 (3, 7) ==> 429
 (3, 8) ==> 1430
 (3, 9) ==> 4862
 (3, 10) ==> 16796
 (3, 11) ==> 58786
 (3, 12) ==> 208012
 (3, 13) ==> 742900
 (3, 14) ==> 2674440
 (3, 15) ==> 9694845
 (3, 16) ==> 35357670
 (3, 17) ==> 129644790
 (3, 18) ==> 477638700
 (3, 19) ==> 1767263190
 (4, 1) ==> 1
 (4, 2) ==> 5
 (4, 3) ==> 42
 (4, 4) ==> 462
 (4, 5) ==> 6006
 (4, 6) ==> 87516
 (4, 7) ==> 1385670
 (4, 8) ==> 23371634
 (4, 9) ==> 414315330

(管, 球) === 移動方法

(5, 1) ==> 1
 (5, 2) ==> 14
 (5, 3) ==> 462
 (5, 4) ==> 24024
 (5, 5) ==> 1662804
 (5, 6) ==> 140229804
 (6, 1) ==> 1
 (6, 2) ==> 42
 (6, 3) ==> 6006
 (6, 4) ==> 1662804
 (6, 5) ==> 701149020
 (7, 1) ==> 1
 (7, 2) ==> 132
 (7, 3) ==> 87516
 (7, 4) ==> 140229804
 (8, 1) ==> 1
 (8, 2) ==> 429
 (8, 3) ==> 1385670
 (9, 1) ==> 1
 (9, 2) ==> 1430
 (9, 3) ==> 23371634
 (10, 1) ==> 1
 (10, 2) ==> 4862
 (10, 3) ==> 414315330
 (11, 1) ==> 1
 (11, 2) ==> 16796
 (12, 1) ==> 1
 (12, 2) ==> 58786

（第三名）

由一個簡單的遞迴關係開始，給出了
許多的討論及想法，十分有創意，「寓
樂於教」。