中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：難解的恩怨情仇——九連環

關 鍵 詞：九連環、等比級數、階差數列

編　　號：030402

學校名稱：

苗栗縣立建國國民中學

作者姓名：

林詩婷、鍾佩璇、林俐妘

指導老師：

李文欽

難 解 的 恩 怨 情 仇

九 連 環

壹、摘要：

此主題從日常生活遭遇疑難尋求解答開始，在研究如何將看似繁瑣的中國著名童玩—九連環，透過解開單環、二連環、三連環、四連環等較簡易的情形，推導出各情形的解開方法，進而建立解開各情形步驟數的數列，並從這些簡易的情形推出解 K 連環的過程規律，並得到各項數列的變化規則為 $a_k=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$，再從數列的前幾項分布觀察出另一個其隔項階差形成等比數列的規律，並進而推導出其隔項階差公比為 4 也就是 $a_{k+2}-a_k=4(a_k-a_{k-2})$ 這個關係式，透過分離奇數項數列和偶數項數列形成的第一階差再配合等比級數的求和方法就可得到解 K 連環時的步驟數的一般公式，也就是為當 K 為奇數時需 $\frac{1}{3}(2^{k+2}-2)$ 步，而當 K 為偶數時則為 $a_k=\frac{1}{3}(2^{k+2}-4)$ 步。

貳、研究動機：

記得去年十二月到公館國中參觀科學觀覽會，看到了許多有趣的科學實驗、自然現象和益智玩具，讓我們可以一邊張大嘴巴一邊動動我們的小腦袋瓜，其中一組大型的鐵製五連環格外引起我們幾個鬼靈精的好奇心，原因無它，因為老師小看了我們，認為我們解不開，結果在我們七手八腳無意識下竟解開了，也讓老師服輸請客，唯一的遺憾是後來我們怎麼套都套不回去，仔細一想，能夠解開它，運氣實在是最大功臣。

巧的是後來農曆春節時，在新竹舉辦了盛大的民俗技藝展，閒逛中竟發現了這個現在令我又愛又恨的小傢伙—九連環（如圖一），也立刻嘗試解它，結果花了我半個小時的時間還是只在前面幾個環打轉，當時實在有些鬱卒。開學後老師要我們自行尋找科展主題，還要求得從日常生活中取材，我一下

子就想起它，想不到老師剛好有一組，當下馬上請老師帶來學校讓我再試一次，皇天不負苦心人，在我帶回家熬夜挑戰之下，花了二、三個小時竟讓我解開了，雖然有了小小的熊貓眼，內心的喜悅卻是筆墨難以形容。

本來我們只想研究該如何去解開九連環，後來才發現其中竟含有數學規律，解不同的環數竟可以形成規則的數列，還可以透過求等比級數的方法算出解開的步驟數，讓我們體認到生活中伸手可及的事物或許就和數學息息相關，也呼應了老師常說的「生活中處處是數學」這句話，以下就讓我們來進入解九連環的神秘之旅吧……

參、研究目的：

一、討論解九連環的過程。

二、討論解 K 連環的步驟數數列的規律。

三、找出解 K 連環的步驟數的一般化公式。

肆、研究器材：

中國智慧童玩---九連環一組。

伍、研究過程：

一、定義：

（一）九連環的組成元件：

1. U 形桿：九連環組成中的主角，如圖二的【A】。

2. 鐵環：連著小鐵條，如圖二的【B】。

3. 小鐵條：連著鐵環，在下一個鐵環中穿過，如圖二的【C】。

（二）九連環的相對位置狀態：

1. 狀態 0：鐵環、小鐵條皆脫離 U 形桿，為企圖完成的狀態。

2. 狀態 1：只有小鐵條穿過 U 形桿，環脫離 U 形桿。

3. 狀態 2：小鐵條穿過 U 形桿，鐵環套入 U 形桿，為原始狀態。

4. 狀態 3：只有鐵環套入 U 形桿，小鐵條脫離 U 形桿，此狀態在解

開、套回過程中屬無意義的狀態，如圖三。

舉例：狀態(0,0,2,2,2,2,2,2,2)，如圖四，為第 1、2 環及其所連著的小鐵條皆脫離 U 形桿，然後第 3、4、5 環皆套入 U 形桿也就是狀態(2,2,2,2,2,2,2,2,2)，如圖五，為九連環的原始狀態；而狀態(0,0,0,0,0,0,0,0,0)，如圖六，為九連環的解開狀態。

（三）相關動作：

1. 動作 A：將鐵環由 U 形桿拉出（由狀態 2 變狀態 1)，屬解開過程的動作，如圖七到圖九。
2. 動作 B：將鐵環由上穿過 U 形桿（由狀態 1 變狀態 0）屬解開過程的動作，如圖十到圖十二。
3. 動作 C：將鐵環由下往上穿過 U 形桿（由狀態 0 變狀態 1)，它是動作 B 的逆動作，屬套回過程的動作，如圖十二到圖十。
4. 動作 D：將鐵環套回 U 形桿（由狀態 1 變狀態 2)，它是動作 A 的逆動作，屬套回過程的動作，如圖九到圖七。

舉例：動作 A_1 表示將第 1 環由 U 形桿拉出；動作 B_5 就是將第 5 環由上穿過 U 形桿；動作 C_4 則是將第 4 環由下往上穿過 U 形桿；動作 D_8 將第 8 環套回 U 形桿。

（四）步驟數數列：

1. 我們用 a_k 表示解開 K 連環的步驟數。
2. 我們將奇數項數列的第一階差數列設為 $P_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$。
3. 我們將偶數項數列的第一階差數列設為 $Q_n=a_{2n+2}-a_{2n}$。

二、過程：

（一）首先我們考慮只有一個環的情形，其原始狀態可定義為(2)，經過動作 A_1（將第 1 環拉起）後，狀態變為(1)，然後進行動作 B_1（將第 1 環由上穿過 U 形桿），則狀態就會變成(0)，也就是解開的情形，由此可知，解只有一個環時步驟數為 2 步，在此用 $a_1=2$ 表示。

步驟	移動前情形	動作	移動後情形
1	(2)	A_1	(1)
2	(1)	B_1	(0)

（二）解二連環時，其原始狀態為(2,2)，第一個動作仍然為 A_1，它可將狀態變為(1,2)，然後是動作 A_2，它可將狀態變為(1,1)，有人會問為何不用動作 B_1 將狀態變成(0,2)呢？因為狀態(0,2)時第 2 個鐵環的底部會被第 1 根鐵條套住(如圖十三)，無法將第 2 環直接解下，還是得回到狀態(1,2)，因此我們直接先解開第 2 環，再解第 1 環，也就是先進行動作 A_2，將狀態變為(1,1)，接著是動作 B_2（將第 2 個鐵環穿過 U 形桿下方），讓狀態變成(1,0)，也就是第 2 環先解開，最後是動作 B_1，讓狀態變成(0,0)，也就是完全解開的狀態，因此可知解 2 連環的步驟數為 4 步，在此我們用 $a_2=4$ 來表示。

步驟	移動前情形	動作	移動後情形
1	(2,2)	A_1	(1,2)
2	(1,2)	A_2	(1,1)
3	(1,1)	B_2	(1,0)
4	(1,0)	B_1	(0,0)

（三）解三連環時，原始狀態為(2,2,2)，第一個動作仍為 A_1，它可將狀態改變為(1,2,2)，事實上不管解幾連環都需將第 1 環先行拉起，否則以下皆無法動作，皆著第二個動作是 B_1，它可將狀態變為(0,2,2)，那為何

不像解二連環時一樣，先進行動作 A_2，將狀態改變成(1,1,2)呢？我們發現在狀態(1,1,2)時，接著只能進行的動作為 B_2、B_1，這樣會讓狀態變成(0,0,2)，和解二連環時一樣，我們無法單獨將第 3 環直接解下，也因此我們知道解三連環時, 必須先解開第 3 環, 也就是在狀態(0,2,2)時，進行動作 A_2（將第二環拉起），狀態會變成(0,1,2)，接著動作 A_3（將第三環拉起），將狀態變成(0,1,1)，接著動作 B_3（將第三環由上穿過 U 形桿），狀態會變成(0,1,0)，再來動作 D_2（將第二環套回 U 形桿），狀態會變成(0,2,0)，第七個動作 C_1（將第一環由下往上穿過 U 形桿），狀態會變成(1,2,0)，第八個動作 A_2，狀態會變成(1,1,0)，第九個動作 B_2，狀態變成(1,0,0)，最後 B_1（將第一環由上穿過 U 形桿下方），狀態會變成(0,0,0)，步驟數為 10 步，在此用 a_3=10 表示。

步驟	移動前情形	動作	移動後情形
1	（2,2,2）	A_1	（1,2,2）
2	（1,2,2）	B_1	（0,2,2）
3	（0,2,2）	A_2	（0,1,2）
4	（0,1,2）	A_3	（0,1,1）
5	（0,1,1）	B_3	（0,1,0）
6	（0,1,0）	D_2	（0,2,0）
7	（0,2,0）	C_1	（1,2,0）
8	（1,2,0）	A_2	（1,1,0）
9	（1,1,0）	B_2	（1,0,0）
10	（1,0,0）	B_1	（0,0,0）

（四）限於篇幅，我們將解四連環的過程用表格呈現，另外五連環、六連環、七連環、八連環、九連環的解開過程詳列於附件。

步驟	移動前情形	動作	移動後情形
1	（2,2,2,2）	A_1	（1,2,2,2）
2	（1,2,2,2）	A_2	（1,1,2,2）
3	（1,1,2,2）	B_2	（1,0,2,2）

4	（1,0,2,2）	B_1	（0,0,2,2）
5	（0,0,2,2）	A_3	（0,0,1,2）
6	（0,0,1,2）	A_4	（0,0,1,1）
7	（0,0,1,1）	B_4	（0,0,1,0）
8	（0,0,1,0）	D_3	（0,0,2,0）
9	（0,0,2,0）	C_1	（1,0,2,0）
10	（1,0,2,0）	C_2	（1,1,2,0）
11	（1,1,2,0）	D_2	（1,2,2,0）
12	（1,2,2,0）	B_1	（0,2,2,0）
13	（0,2,2,0）	A_2	（0,1,2,0）
14	（0,1,2,0）	A_3	（0,1,1,0）
15	（0,1,1,0）	B_3	（0,1,0,0）
16	（0,1,0,0）	D_2	（0,2,0,0）
17	（0,2,0,0）	C_1	（1,2,0,0）
18	（1,2,0,0）	A_2	（1,1,0,0）
19	（1,1,0,0）	B_2	（1,0,0,0）
20	（1,0,0,0）	B_1	（0,0,0,0）

陸、研究結果：

一、發現：

（一）由於解單環及二連環過程較簡易，因此我們從解三連環開始討論起，我們發現要解 3 連環時，須使第 1 環解開，其步驟數恰為 a_1，然後進行 A_2、A_3、B_3、D_2 四個動作，使之成為 1、3 環解開，只餘第 2 環的情形，也就是狀態（0,1,0）之情形，欲將第 2 環解開，須將第 1 環重新套回，其過程為解第 1 環的逆過程，但只需回復到（1,2,0）之情形【若回復到（2,2,0）的話又須再進行 A_1 之動作使之成為（1,2,0）之情形，步驟數會多兩步】，故步驟數為(a_1-1)步，而欲解開（1,2,0）之情形，恰須(a_2-1)步【解二連環的步驟數扣除第一個 A_1 之動作】，因此我們可知：

$$a_3=a_1+4+(a_1-1)+(a_2-1)=2a_1+a_2+2$$

（二）要解四連環時，須使前 2 環解開，步驟數為 a_2，然後進行 A_3、A_4、

B_4、D_3四個動作，使之成為 1、2、4 環都解開，只餘第 3 環的情形，也就是（0,0,2,0）之情形，欲將第 3 環解開，須將 1、2 環重新套回，其過程為解前 2 環的逆過程，但只需回復到（1,2,2,0）之情形【若回復到（2,2,2,0）的話又須再進行 A_1之動作使之成為（1,2,2,0）之情形，步驟數會多兩步】，故步驟數為(a_2-1)步，而欲解開（1,2,2,0）之情形，恰須(a_3-1)步【解 3 連環的步驟數扣除第一個 A_1之動作】，則可知：

$$a_4=a_2+4+(a_2-1)+(a_3-1)=2a_2+a_3+2$$

（三）依此類推，我們可知要解 K 連環時，須使前(k-2)環解開，步驟數為a_{k-2}，然後進行 A_{k-1}、A_k、B_k、D_{k-1} 四個動作，使之成為第 1、2、3、……、(k-2)、k 環都解開，只餘第 k-1 環的情形，也就是（0,0,0,0……0,2,0)，欲將第 k-1 環解開，須將 1、2、3、……、(k-2)環重新套回，其過程為解前(k-2)環的逆過程，但只需回復到（1,2,2,2……2,2,0）之情形【若回復到（2,2,2,2……2,2,0）的話又須再進行 A_1 之動作使之成為（1,2,2,2……2,2,0）的情形，步驟數會多兩步】，故步驟數為$(a_{k-2}-1)$步，而欲解開（1,2,2,2……2,2,0）之情形，恰須$(a_{k-1}-1)$步【解(k-1)連環的步驟數扣除第一個 A_1之動作】，則可知：

$$a_k=a_{k-2}+4+(a_{k-2}-1)+(a_{k-1}-1)=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$$

二、推導：

（一）由於我們整理出來的通式 $a_k=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$，且 $a_1=2$，$a_2=4$，因此我們知道呈現出來的數列為：

2、4、10、20、42、84、170、340、682、………

我們只發現每項數列差不多是前一項的 2 倍，但卻無明確規律，因此我們又想到解環的過程中，單數環和雙數環的過程略有不

同，因此我們將奇數項數列和偶數項數列分開列出，所呈現的結果如下：

奇數項：2、10、42、170、682、…

偶數項：4、20、84、340、….

結果發現其奇數項數列的第一階差數列為 8、32、128、512、…

而偶數項數列的第一階差數列為 16、64、256、….剛好都為公比 4 的等比數列，也就是隔項數列階差形成等比數列，為了替隔項數列建立關係，我們將通式 $a_k=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$ 推導如下：

$a_k=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$----------①

$a_{k+1}=2a_{k-1}+a_k+2$----------②

$a_{k+2}=2a_k+a_{k+1}+2$----------③

為了要替隔項建立關係，因此我們要想辦法消掉 a_{k+1} 和 a_{k-1}，要消掉 a_{k+1} 必須第②式加上第③式，而為了消掉②式中的 $2a_{k-1}$ 掉，則必須再扣掉①式的 2 倍，因此由②+③-①*2 可得：

$a_{k+1}+a_{k+2}-2a_k=(2a_{k-1}+a_k+2)+(2a_k+a_{k+1}+2)-2(2a_{k-2}+a_{k-1}+2)$

$a_{k+1}+a_{k+2}-2a_k=2a_{k-1}+a_k+2+2a_k+a_{k+1}+2-4a_{k-2}-2a_{k-1}-4$

$a_{k+2}-2a_k=3a_k-4a_{k-2}$

$a_{k+2}-a_k=4a_k-4a_{k-2}=4(a_k-a_{k-2})$

也就是隔項階差形成公比 4 的等比數列。

（二）為推出單項數列的一般公式，我們將奇數項數列第一階差數列設為 $P_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$，也就是 $P_1=a_3-a_1$、$P_2=a_5-a_3$、$P_3=a_7-a_5$、…，我們可將奇數項數列表示如下：

$a_{2n+1}=(a_{2n+1}-a_{2n-1})+(a_{2n-1}-a_{2n-3})+(a_{2n-3}-a_{2n-5})+\ldots+(a_3-a_1)+a_1$

$a_{2n+1}=P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}\ldots+P_2+P_1+a_1$

而 $P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}\ldots+P_2+P_1$ 是一個首項 8 ($P_1=a_3-a_1=8$)，公比 4，n 項的等比級數。

因此 $a_{2n+1}=P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}\ldots+P_2+P_1+a_1$

$$=\frac{8(4^n-1)}{4-1}+a_1=\frac{2^3(2^{2n}-1)}{3}+2=\frac{2^{2n+3}-8}{3}+\frac{6}{3}=\frac{1}{3}(2^{2n+3}-2)$$

設 2n+1=k，則 $a_{2n+1}=a_k=\frac{1}{3}(2^{2n+3}-2)=\frac{1}{3}(2^{2n+1+2}-2)=\frac{1}{3}(2^{k+2}-2)$

可得當 k 為奇數時 $a_k=\frac{1}{3}(2^{k+2}-2)$ 為奇數項數列的一般公式。

同理我們也可以將偶數項數列第一階差設為 $Q_n=a_{2n+2}-a_{2n,}$

也就是 $Q_1=a_4-a_2$、$Q_2=a_6-a_4$、$Q_3=a_8-a_6$、….. 我們可將偶數項數列表示如下：

$a_{2n+2}=(a_{2n+2}-a_{2n})+(a_{2n}-a_{2n-2})+(a_{2n-2}-a_{2n-4})+\ldots+(a_4-a_2)+a_2$

$a_{2n+2}=Q_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}+Q_{n-3}\ldots+Q_2+Q_1+a_2$

而 $Q_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}+Q_{n-3}\ldots+Q_2+Q_1$ 是一個首項 16 ($Q_1=a_4-a_2=16$)，公比 4，n 項的等比級數。

因此 $a_{2n+2}=Q_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}+Q_{n-3}\ldots+Q_2+Q_1+a_2$

$$=\frac{16(4^n-1)}{4-1}+a_2=\frac{2^4(2^{2n}-1)}{3}+4=\frac{2^{2n+4}-16}{3}+\frac{12}{3}=\frac{1}{3}(2^{2n+4}-4)$$

設 2n+2=k，則 $a_{2n+2}=a_k=\frac{1}{3}(2^{2n+4}-4)=\frac{1}{3}(2^{2n+2+2}-4)=\frac{1}{3}(2^{k+2}-4)$

可得當 k 為偶數時 $a_k=\frac{1}{3}(2^{k+2}-4)$ 為偶數項數列的一般公式。

由以上可知要解開 K 連環的步驟數需視 K 值決定，若 K 為奇數則需 $\frac{1}{3}(2^{k+2}-2)$ 步；若 K 為偶數則其步驟數即為 $\frac{1}{3}(2^{k+2}-4)$ 步，也因此我們知道想要解開九連環需：

$\frac{1}{3}(2^{9+2}-2)=\frac{1}{3}(2^{11}-2)=\frac{1}{3}(2048-2)=\frac{1}{3}\times 2046=682$ 步。

柒、討論：

九連環—這個古代人(據說是孔明)研發的益智玩具，一度讓班上同學誤認為古代的鎖(開門還真累)。雖然只有簡單的幾個環，卻非得有恆心的人才能解開，它可以訓練我們邏輯推理能力和空間概念，其它的像七巧板也相當有名，七片簡單的圖形卻可以有著千千萬萬種變化，再加上每次在文化藝術展裡可以看到的如仙人擺渡、鴛鴦扣、陀螺、毽子、扯鈴、竹蜻蜓、跳繩、花燈、風車、風箏、萬花筒、傀儡戲、各式魯班鎖和一些不知名的環扣玩具……等都代表了中國人的智慧結晶，它們共同的特色就是都可以從生活中取材，都非常簡樸，讓大家在製造、玩樂中獲得無形的學習，但隨著近代工商業社會轉變太快，電玩成了陪伴小孩子的主角，而原本傳統的有內涵的玩具卻被逐漸淡忘，只剩少數團體在保存、介紹、推廣，好希望多一些人分享這些玩具帶來的成長。

至於其它如：圍棋、象棋、魔術方塊，甚至是麻將等較不具童玩色彩的玩具也都富含智慧，當然大多數還是數學有關，雖然大多數的人只是拿來消磨時間，但也有人可以從其中得到探索真理、創新靈感的收穫，有了這次作科展的經驗，我們很希望我們也能有類似的收穫，畢竟許多跟數學相關的事物，只要我們多用心，就能從中體會，所以我們還有很大的努力空間。

附註：

我們曾努力收集九連環資料，但各方面的資料卻不多，大多只有介紹九連環本身或簡略的描述解法，而我們發現很多人把我們所定義的過程 A 和過程 B 合併為一個步驟，而過程 C 和過程 D 也合併為一個步驟，因而其步驟數只有我們的一半，但我們發現其缺點是大多數步驟的兩個過程是分開的，甚至相隔很久，因此我們將過程分得較細。以每一個步驟(過程)一秒鐘計算，我們需 682 秒，也就是約十一多分，但根據實際操作(已熟練者)結果，約只需六分鐘即可完成，也就是平均一個步驟不用一秒鐘，大家可以挑戰看看喔。

捌、結論：

一、 解 K 連環時，需先使前(k-2)環解開，再利用四個步驟解開最後一環，然後需再將前面(k-2)環全回復，再重新解到(k-3)環數，再利用四步驟解開（k-1）環，然後需再回復，持續動作即可解開。

二、 解 K 連環的步驟數形成的數列關係為 $a_k=2a_{k-2}+a_{k-1}+2$。

三、 解 K 連環的步驟數形成的數列其隔項階差為公比 4 的等比數列。

四、 當 K 為奇數時解 K 連環的步驟數為 $\frac{1}{3}(2^{k+2}-2)$ 步。

五、 當 K 為偶數時解 K 連環的步驟數為 $a_k=\frac{1}{3}(2^{k+2}-4)$ 步。

六、 解開九連環需要 682 步。

玖、參考資料：

一、國中數學第六冊—數列與級數。