

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：二次通“疊”

關 鍵 詞：河內塔、跳數點、倒三角圖

編 號：030401

學校名稱：

嘉義縣私立協同高級中學

作者姓名：

賴建維、葉家齊、陳維德、張宏豪

指導老師：

何敏華



二次通“疊”

壹、摘要：

在二年的研究過程中，我們增加了河內塔的棒子數，並在自製的道具中，實驗記錄了移動次數的數據，實驗時為了避免移動次數有錯誤，研發用編號與顏色來區分盤子。

在從實驗數據中，設計出“跳數點”，“倒三角圖”來計算最少移動次數，並歸納出推算次數的方法，但面對棒子數、盤子數過大時，仍需在數字的處理上費些功夫。

直到學校課程學到了二次函數，於是我們導出了用多項函數關係來呈現不同“跳數點”的移動次數之公式，再用這些公式去驗證我們初期的實驗數據與延伸“倒三角圖”的結構，因此透過這些函數圖，我們對最少移動次數有更明確的解析與結論。

貳、研究動機：

國一：國一時，原本就喜歡數學的我們，在網路上看到河內塔，而搬動河內塔事件很難的是，那如果我們把棒子數增加，移動的時間會不會改變呢？盤子的移動次數會如何地減少呢？於是我們便討論河內塔的擴充，棒子數與盤子數的關係。

國二：國二時，數學課上到方程式的函數圖關係，便又引發了我們的興致。於是根據國一做出來的數據，再透過變數間的變量關係，導出最少移動次數的公式與它的多項函數，且利用函數圖形，來看曲線的變化。

參、研究目的：

國一：在網路上看到河內塔，看完以後就想到了，如果延伸這個題目，把三根棒子增加成四根、五根，這樣盤子移動的次數會有規律嗎？可以把移動的次數用到最少，移動時間用到最小嗎？是否可導出移動盤子次數的公式？如何控制移動過程中不會有技術錯誤？所以就研究的這個題目。

國二：在數學課上到一、二次的函數，於是便透過函數的關係圖來呈現公式。在研究過程中，因數目字太大了，我們便借用電腦程式 (Mathematica4.1) 來幫助導出棒子數 m 、盤子數 n 的函數關係式與繪出函數關係圖，並透過此關係圖，再度審查變量間的變化關係。

肆、研究過程：

令 $A_{(m,n)}$ 為 m 根棒子， n 個盤子所需移動的次數。

$A_{(m,n)}$ 為特別狀況時(在研究過程中討論)，稱為 n 的跳點數，且

$A_{(m,n)} - A_{(m,n-1)}$ 稱為跳點數的變化量。

n 個盤子中，由大到小，紅銀相間。

PART

一、 $A_{(3,n)}$

(一) $A_{(3,1)} = 0 + 2^0 = 1$

$A_{(3,2)} = 1 + 2^{2-1} = 1 + 2^1$

$A_{(3,3)} = 1 + 2^1 + 2^2$

$$A_{(3,4)}=1+2+2^2+2^3$$

$$A_{(3,n)}=1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}=\frac{1(2^{n-1})}{2-1}=2^n-1$$

每一種盤子數均為跳數點，跳數點的變化量為 2^{n-1}

(二) 在移動過程中，同色盤子絕不能相鄰，否則移動次數不為最少。

⇒原因：因為三根棒子的移法，是先把 $n-1$ 個盤子堆成一疊，之後再讓最大的盤子移到三號棒上，再慢慢把 $n-1$ 個盤子散開再疊到三號棒上。在中間過程，如有同色相疊的情形，相間幾次就會比次數最小值的幾次，不能讓同色相間，才符合此方法。

二、 $A_{(4,n)}$ ：

(一) 當 $m > n$ 時

$$A_{(3,2)} \Rightarrow 2 \times 2 - 1 = 3 \text{ 說明} \Rightarrow$$

$$A_{(4,3)} \Rightarrow 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$A_{(5,3)} \rightarrow 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$A_{(5,4)} \rightarrow 2 \times 4 - 1 = 7$$

結論：當 $m > n$ 時 $A_{(m,n)} = 2n - 1 \rightarrow$ 公式 1

(二) 當 $m = n$ 時

$$A_{(3,3)} = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$A_{(4,4)} = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$A_{(3,3)} = 2 \times 5 + 1 = 11$$

每個盤子都要散佈在每根棒子上,但最大的盤子只動一次,要減一。

結論： $m = n$ 時 $A_{(m,n)} = 2n + 1 \rightarrow$ 公式 2

(三) $A_{(4,n)}$

1. 跳數點的討論：

$$A_{(4,4)} = A_{(4,3)} + 4 \rightarrow n=4 \text{ 時為第一跳數點，即 } p=1, \text{ 且 } f(1)=4$$

$$A_{(4,7)} = A_{(4,6)} + 8 \rightarrow n=7 \text{ 時為第二跳數點，即 } p=2, \text{ 且 } f(2)=8$$

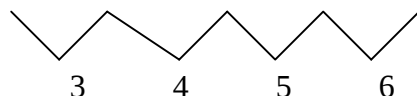
$$A_{(4,11)} = A_{(4,10)} + 16 \rightarrow n=11 \text{ 時為第三跳數點，即 } p=3, \text{ 且 } f(3)=16$$

$$A_{(4,16)} = A_{(4,15)} + 32 \rightarrow n=16 \text{ 時為第四跳數點，即 } p=4, \text{ 且 } f(4)=32$$

以下以此類推

2. 跳數點為： $p=1 \quad p=2 \quad p=3 \quad p=4 \quad p=5$

盤子數為： 4 7 11 16 22 n 個盤子



(1) 第 p 個跳數點時盤子數：

$$n = [4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + (P+1)]$$

$$= (3+p+1)/2 \times 4 + [(4+p)(p-1)]/2$$



$$=(8+p^2+3p-4)/2=(p^2+3p+4)/2$$

(2) 第 P 個跳數點的變化量為 $f(p)=2^{p+1}$

3.結論：

當 $4 \leq n < 6$ 時，n 每增加一，移動次數均加 4。

當 $7 \leq n < 11$ 時，n 每增加一，移動次數均加 8。

當 $11 \leq n < 15$ 時，n 每增加一，移動次數均加 16。

(1) 故要求 $A_{(m,n)}$ 時，應先判斷 n 在哪兩個跳數點之間，然後找到 $f(p)$ 之值，即可找出最少移動次數。

(2) $m=4$ 時，跳數點關係在第 2 層產生等差數列。

(四) $A_{(4,n)}$ 最小的方法：

步驟：

1. 找到 n 個盤子的跳數點 p 的範圍

(1) 若 $q < p < q+1$ ，q 為正整數，取 $p=q$ 。

(2) 若 n 個盤子恰為跳數點的盤子數，就取此時的 p。

2. 移動跳數點 p 的盤子數 4 號棒子。

3. 移動 $n-(\text{跳數點為 } p \text{ 的盤子數})$ 到 3 號棒子。

4. 移動 4 號棒子的盤子數到 3 號棒子。

(五) 當 $m < n$ 的實例：

$$1. A_{(4,5)} = A_{(4,3)} + (5-3) \times f(1) = 5 + (2)2^2 = 13$$

$$A_{(4,6)} = A_{(4,3)} + (6-3) \times f(1) = 5 + 3 \times 2^2 = 17$$

所以當 n 再 $p=1$ 與 $p=2$ 之間時 $A_{(4,n)} = A_{(4,3)} + (n-3) \times f(1) = 5 + 2^2(n-3)$

$$2. A_{(4,35)}$$

$$n = (p^2 + 3p + 4) / 2 \leq 35$$

$$p^2 + 3p + 4 < 70$$

$$p^2 + 3p < 66$$

$$p(p+3) < 66$$

$$P < 6, \dots$$

所以 $p=35$ 為在第六格跳數點與第 7 個跳數點之間。

$$\text{取 } p=6 \rightarrow f(6) = 2^{6+1} = 2^7 = 128$$

$$35 - 28 = 7$$

$$128 \text{ 要 } 7 \text{ 次所以 } 128 \times 7 = 896$$

前面還有的跳數點也要加進去

$$896 + 2^6 \times 7 + 2^5 \times 6 + 2^4 \times 5 + 2^3 \times 4 + 2^2 \times 3 + A_{(4,3)} = 1660 + 5 = 1665$$

(六) 在移動過程中，同色盤子絕不能相鄰否則移動次數不為最少。

→ 原因：因為把盤子部分移到 3 號盤子上，最上面的那一個是紅的再疊一個紅的上去，它們中間的銀色盤要別上去，便要把上面的紅的移開，才能把銀色的移動上去，會多出次數。

(七) $A_{(4,n)}$ 的公式：

1. 找出 n 介於哪兩個跳數點之間。

2. 若取得的跳數點為 p，則找出第 p 個跳數點的盤子數(令為 S)。

3. 求 $[n-(S-1)] \times f(p) = T$

$$4. A_{(4,n)} = A_{(4,3)} + 2^2 \times 3 + 2^3 \times 4 + \cdots + 2^p \times (p+1) + T$$

$$= A_{(4,3)} - 4 - 2^3 (p-2) + 2^{p+1} (p+1) + T$$

三、 $A_{(5,n)}$ ：

(一) 跳數點的討論：

$A_{(5,5)} = A_{(5,4)} \rightarrow n=5$ 時准第一個跳數點，即 $p=1$ ， $f(1)=4$

$A_{(5,11)} = A_{(5,10)} + 8 \rightarrow n=11$ 時為第二跳數點，即 $p=2$ ，且 $f(2)=8$

$A_{(5,21)} = A_{(5,20)} + 21 \rightarrow$ 時為第三跳數點，及 $p=3$ ，且 $f(3)=16$

$A_{(5,36)} = A_{(5,35)} + 36 \rightarrow$ 時為第四跳數點，及 $p=4$ ，且 $f(4)=32$

以下以此類推

(二) 跳數點為： $P=1$ $P=2$ $P=3$ $P=4$ $P=5$

盤子數為： 5 11 21 36 57

 6 10 15 21

 4 5 6

→ 圖二

第 p 個跳數點的盤子數：

$P=P$

$$n = 11 + 6(p-2) + 5(p-2) + 6(p-3) + \cdots + (p+1)1$$

$$n = 11 + 6(p-2) + \sum_{k=1}^{p-2} (k+3)(p-k-1)$$

$$n = 11 + 6(p-2) + \sum_{k=1}^{p-2} (kp - k^2 - k + 3p - 3k - 3)$$

$$n = 11 + 6(p-2) + \sum_{k=1}^{p-2} [(p-4)k - k^2 + (3p-3)]$$

$$n = 11 + 6(p-2) + (p-4) \sum_{k=1}^{p-2} k - \sum_{k=1}^{p-2} k^2 + \sum_{k=1}^{p-2} 3p-3$$

$$n = 11 + 6(p-2) + (p-4) \times \frac{(1+p-2)(p-2)}{2} - \frac{(p-2)(p-1)(2p-4+1)}{6} + (p-2)(3p-3)$$

$$n = 11 + 6(p-2) + \frac{(p-4)(p-1)(p-2)}{6} - \frac{(p-2)(p-1)(2p-3)}{6} + 3(p-1)(p-2)$$

$$n = 11 + 3(p-2)(2p-1) + \frac{(p-2)(p-1)(3p-12-2p+3)}{6}$$

$$n = 11 + \frac{(p-2)(18p+18+p-10p+9)}{6}$$

$$n = 11 + \frac{(p-2)(p+8p+27)}{6}$$

(三) 結論：

1. 當 $5 \leq n < 11$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 4。

當 $11 \leq n < 21$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 8。

當 $21 \leq n < 36$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 16。

2. 要求 $A_{(5,n)}$ 時，先判斷 n 在哪兩個跳數點之間，然後找到 $f(p)$ 的值，就可以最少的移動次數。

3. $m=5$ 時，跳數點關係圖如圖二，再第三列產生了等差數列，因此可得之第 $(m-2)$ 就是等差數列。

(四) 步驟：

1. 找到 n 個盤子的跳數點 p 的範圍。

(1) 若 $q < p < q+1$ q 為正整數，取 $p=q$ 。

(2) 若 n 個盤子恰為跳數點的盤子數，取此時的 p 。

2. 把 5 號棒疊滿盤子到變化量為 $\frac{f(p)}{2}$ 最後的地方。

3. 把 4 號棒疊滿盤子到變化量為 $\frac{f(p)}{2}$ 最後的地方。

- 4.把剩的盤子堆到 3 號棒。
- 5.把 4 號棒的盤子移到 3 號棒。
- 6.把 5 號棒的盤子移到 3 號棒。

(五) 如何算出 $A_{(5,n)}$ 的最小值呢？

n 有 4 種可能： $1) n > 5$ (大很多) $2) n < 5$ (變化量 4) $3) n < 5$ $4) n = 5$ 等情形，既然不知道的 n 的範圍，就無法用明確的數表示，但上述範圍都可以用算數表達，當 n 是上述情形 就要先找出最接近 n 的跳數點 P ，在列算式：

$1 + 2 \times 3 + 4 \times 6 + 8 \times 10, \dots + n$ 檢 p 跳數點的盤子數 $2^{p-1} = \text{次數}$ 。

第二種情形： n 在 $A_{(5,5)} \sim A_{(5,11)}$ (不包括) 之間，可用公式代入： $(2 \times 3 + 1) + (n - 4)4 = \text{次數}$ 。

如 $n = 10$ $(2 \times 3 + 1) + (n - 4)4 = 7 + 24 = 31$ 。

第三種情形【不包括 $A_{(5,1)}$ 】： $1 + (n - 2)2 = \text{次數}$ 如： $n = 4$ 、 $1 + (4 - 1)2 = 7$ 。

第四種情形： $2n - 1 = \text{次數}$ 。

(六) $m < n$ 時的實例

$$1. A_{(5,7)} = A_{(5,4)} + (7-4) \times f(1) = 9 + (3)2^2 = 21$$

$$2. A_{(5,40)}:$$

$A_{(5,40)}$ 在第 4 跳數點和第五跳數點之間。

$$(40-35)32 + (36-21)16 + (21-11)8 + (11-5)4 + 9 = 160 + 240 + 80 + 31 = 511$$

四、 $A_{(6,n)}$ ：

(一) 跳數演的討論：

$$A_{(6,6)} = A_{(6,5)} + 4 \quad \Rightarrow n = 16 \text{ 時為第一跳數點，即 } p = 1, \text{ 且 } f(1) = 4$$

$$A_{(6,16)} = A_{(6,15)} + 8 \quad \Rightarrow n = 16 \text{ 時為第二跳數點，即 } p = 2, \text{ 且 } f(2) = 8$$

$$A_{(6,36)} = A_{(6,35)} + 16 \quad \Rightarrow n = 36 \text{ 時為第三跳數點，即 } p = 3, \text{ 且 } f(3) = 16$$

$$A_{(6,71)} = A_{(6,70)} + 32 \quad \Rightarrow n = 71 \text{ 時為第四跳數點，即 } p = 4, \text{ 且 } f(4) = 32$$

以下以此類推

(二) 跳數點為： $p = 1 \quad p = 2 \quad p = 3 \quad p = 4 \quad p = 5 \quad p = 6$

6 16 36 71 127 211

10 20 35 56 84

10 15 21 28

5 6 7

← 第 P 個跳數點時盤子數

(三) 當 $6 \leq n < 15$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 4。

當 $16 \leq n < 35$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 8。

當 $36 \leq n < 70$ 時， n 每增加 1，移動次數均加 16。

(四) 步驟：

1. 找到 n 個盤子的跳數點 P 的範圍：

(1) 若 $q < p < q+1$ 、 q 為正整數取 $p : q$

(2) 若 n 個盤子恰為跳數點的盤子數，就取此時的 p 。

2. 移動跳數點 P 的盤子數道四號棒子。

3. 移動 $n - (\text{跳數點為 } P \text{ 的盤子數})$ 到 3 號棒子。

4. 移動 4 號棒子的盤子數道 3 號棒子。

5. $m < n$ 時的實例：

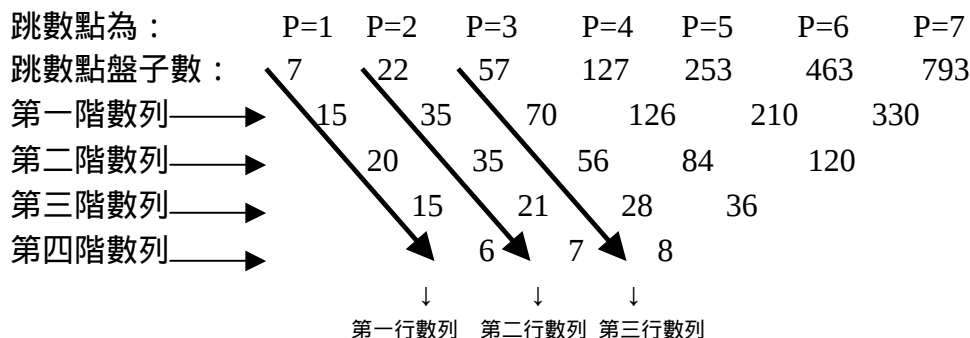
$$A_{(6,7)} = A_{(6,5)} + (7-5) \times f(1) = 9 + 8 = 17$$

$$A_{(6,8)} = A_{(6,5)} + (8-5) \times f(1) = 9 + 12 = 21$$

$$A_{(6,35)} = A_{(6,5)} + (35-14) \times 8 + (15-6) \times 4 = 168 + 36 + 9 = 213$$

五、 $A_{(7,n)}$ ：

(一) 跳數點與盤子數的關係圖：

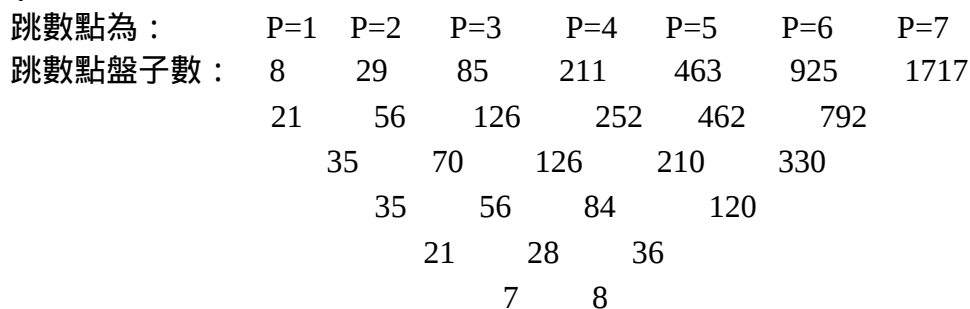


(二) $A_{(7,n)}$ 時：

1. $A_{(6,n)}$ 之跳數點關係圖：第二階數列以後的數照寫。(跳數點盤子數除外)
2. 跳數點盤子數減一就是 $A_{(7,n)}$ 的第一階數列。(第一行數列除外)
3. $A_{(7,n)}$ 時：P=1，n 為 7；P=2，n 為 $6+5+4+3+2+1=22$
4. $A_{(7,n)}$ 時：P=3，P=4，P=5 以下照推下去。

六、 $A_{(8,n)}$ ：

(一) 跳數點與盤子數的關係圖：



(二) $A_{(8,n)}$ 時：

1. $A_{(7,n)}$ 之跳數點關係圖：第二階數列以後照寫。(跳數點盤子數除外)
2. 跳數點盤子數減一就是 $A_{(8,n)}$ 的第一階數列。(第一行數列除外)
3. $A_{(8,n)}$ 時：P=1，n 為 8；P=2，n 為 $7+65+4+3+2+1=29$
4. $A_{(8,n)}$ 時：P=3，P=4，P=5 以下照推下去。

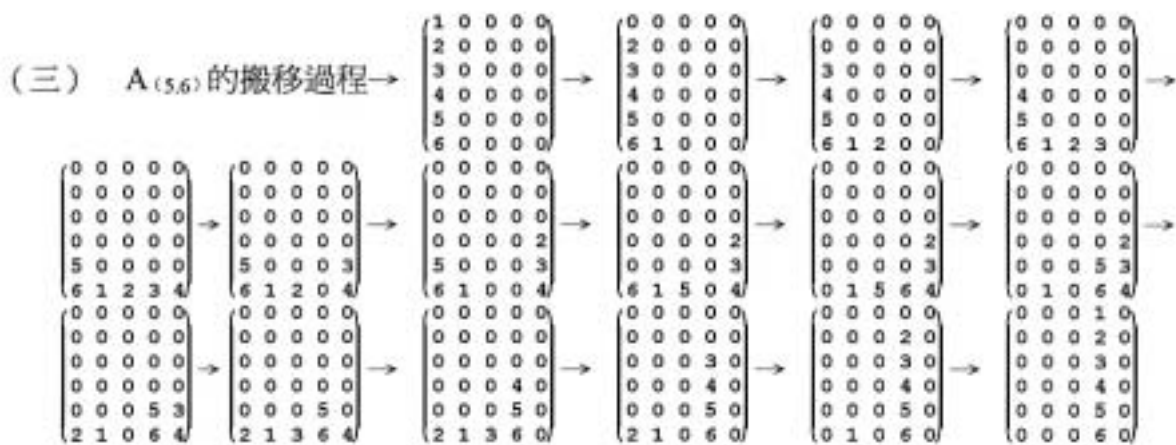
七、跳數點關係圖之討論：

- (一) 上一個表的第二行數列以後寫的數照寫。(跳數點盤子數除外)
- (二) 跳數點盤子數減一，就是此表之第一階數列。(第一行數列除外)
- (三) $A_{(m,n)}$ ：P=1 時：跳數點為 m
 $A_{(m,n)}$ ：P=2 時：跳數點為 $(m-1)+(m-2) + 2+1+1$
- (四) $A_{(m,n)}$ ：P=3、P=4、P=5、 以下照推下去。

八、控制移動次數最少的搬移法則：

- (一) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → 第一行為第一根棒子，所放的盤子數大小之順序，數字越大，盤子越大。

- (二) $A_{(3,3)}$ 的搬移過程 → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$



(四) 法則的結論：

搬移過程中，同一行奇數偶數相間：

原因：當奇數或（偶數）相疊時，須將較小的奇數或（偶數）移開，在插入其間的偶數（奇數），會使得移動次數增加。

PART

- 一、（一）.第一列：4、8、16、32、64 在代表跳數點時，盤子的移動最少次數的化量。
- （二）第一行：代表棒子數，以 x 代表。
- （三）列與行的對應格為 P 個跳數點時，最少移動次數，以 $f(x)$ 表之。

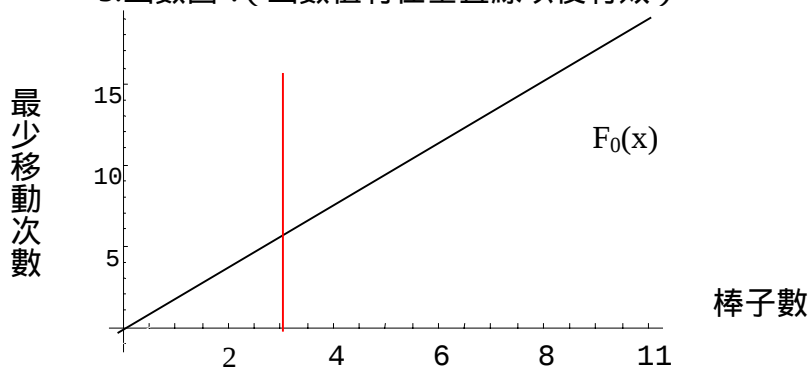
變化量 棒子數	4	8	16	32	64
3	7	15	31	63	127
4	9	25	65	161	385
5	11	39	127	383	1087
6	13	57	225	801	2625
7	15	79	367	1503	5567
8	17	105	561	2593	10689
9	19	135			
10	21	169			
11	23	207			
12	25	249			
13	27	295			
14	29	345			
15	31	399			
16	33	457			
17	35	519			
18	37	585			
19	39	655			

二、函數圖：(在不同的跳數點、棒子數與最少移動次數的關係圖。)

(一) 1. $f_0(x)$ ：為一次函數時棒子數(x)與最少移動次數的函數關係數。

2. $f_0(x)$ ：為一次函數， $f_0(x) = 2x - 1$ ， $x \geq 3$

3. 函數圖：(函數值有在垂直線以後有效)



(二) 1. $f_1(x)$ ：第二個跳數點的盤子數(x)與最少移動次數的關係函數。

2. 令 $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ 、將附件一之數據代入並重複檢驗此函數的正確性。

$$f_1(x) = 2x^2 - 4x + 9$$

3. 同 2. 之作法並藉由電腦軟體 mathematica4.1 輔助求出其他函數並檢驗。

$$\Rightarrow f_2(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x + 17$$

$$f_3(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 33$$

$$f_4(x) = \frac{4}{15}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{15}x + 65$$

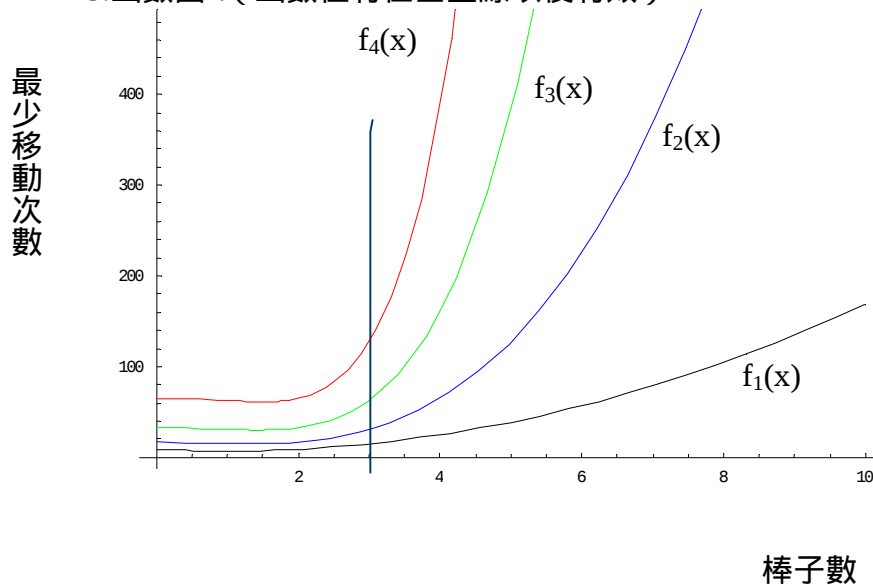
4. $f_1(x) \rightarrow$ 二次函數

$f_2(x) \rightarrow$ 三次函數

$f_3(x) \rightarrow$ 四次函數

$f_4(x) \rightarrow$ 五次函數

5. 函數圖：(函數值有在垂直線以後有效)



三、利用函數圖關係將倒三角形數據延伸

(一) $A_{(4,n)}$: $F1[x] = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

跳點數為： p=1 p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10 p=11 p=12

跳數點盤子數： 4 7 11 16 22 29 37 46 56 67 79 92
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

(二) $A_{(5,n)}$: $F2[x] = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{11}{6}x + 2$

跳點數為： p=1 p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10 p=11 p=12

跳數點盤子數： 5 11 21 36 57 85 121 166 221 287 365 456
6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91
4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

(三) $A_{(6,n)}$: $F3[x] = \frac{1}{24}x^4 + \frac{5}{12}x^3 + \frac{35}{24}x^2 + \frac{25}{12}x + 2$

跳點數為： p=1 p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10 p=11 p=12

跳數點盤子數： 6 16 36 71 127 211 331 496 716 1002 1366 1821
10 20 35 56 84 120 165 220 286 364 455
10 15 21 28 36 45 55 66 78 91
5 6 7 8 9 10 11 12 13

(四) $A_{(7,n)}$: $F4[x] = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{17}{24}x^3 + \frac{15}{8}x^2 + \frac{137}{60}x + 2$

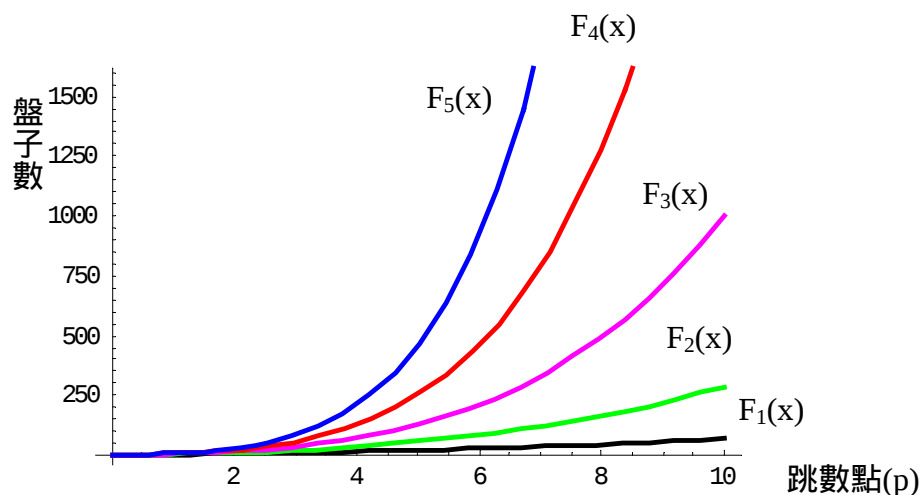
跳點數為： p=1 p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10 p=11 p=12

跳數點盤子數： 7 22 57 127 253 463 793 1288 2003 3004 4369 6189
15 35 70 126 210 330 495 715 1001 1365 1820
20 35 56 84 120 165 220 286 364 455
15 21 28 36 45 55 66 78 91
6 7 8 9 10 11 12 13

(五) $A_{(8,n)}$: $F5[x] = \frac{1}{720}x^6 + \frac{7}{240}x^5 + \frac{35}{144}x^4 + \frac{49}{48}x^3 + \frac{203}{90}x^2 + \frac{49}{20}x + 2$

跳點數為： p=1 p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10 p=11 p=12

跳數點盤子數： 8 29 85 211 463 925 1717 3004 5006 8009 12377 18565
21 56 126 252 462 792 1287 2002 3003 4368 6188
35 70 126 210 330 495 715 1001 1365 1820
35 56 84 120 165 220 286 364 455
21 28 36 45 55 66 78 91
7 8 9 10 11 12 13



伍、研究結果：

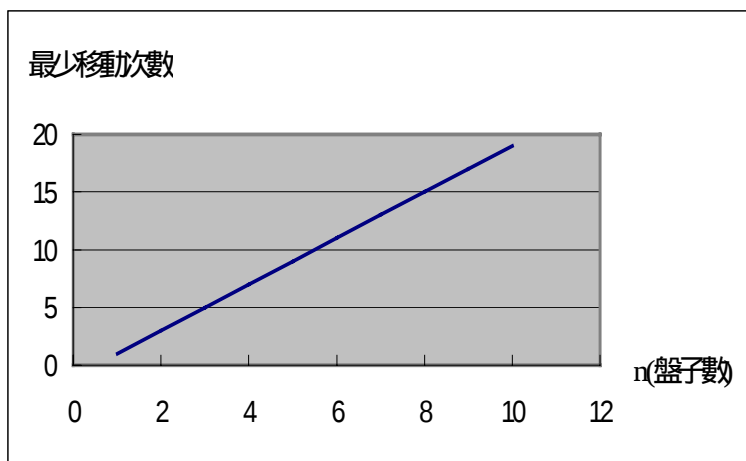
一、透過一個古老的數學問題（河內塔），我們從河內塔的一個變數（盤子數）改成控制二個變數（盤子數 n 與棒子數 m ），結果利用自製的模擬數據、配合數學課所學的級數與公式、多項函數、函數圖形觀念，把河內塔作一個深入的推論研究與探討，也導出了公式、圖表、函數關係。

二、給予任意棒子數與盤子數，均可利用我們所導出的跳數點關係圖，且配合加減法最少移動次數。

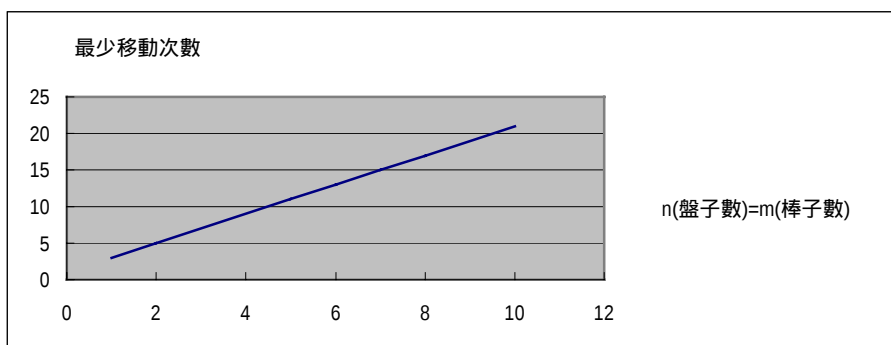
（一） $A_{(m,n)}$ 算出來的值必為奇數， m =棒子數、 n =盤子數。原因：因為 $A_{(m,1)}=1$ ，且之後變化量都為偶數。

（二）在盤子的移動過程中，控制最少移動次數的原則為盤子的號碼是奇數和偶數相間。

（三） $m > n$ 時， $A_{(m,1)}=1+2(n-1)=2n-1$ ， $n \geq 1$



（四） $m=n$ 時， $A_{(m,n)}=2m+1$ 。 $m, n \geq 1, 2$



(五) $m < n$ 時：

1. 第 p 個跳數點變化量為 2^{p+1} 。
2. 跳數點關係圖，第 $m-2$ 行會
3. 跳數點關係圖與 m 的關係：

$A_{(8,n)}$ ：

跳點數為：	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7
跳數點盤子數：	8	29	85	211	463	925	1717
		21	56	126	252	462	792
			35	70	126	210	330
				35	56	84	120
					21	28	36
						7	8

(1) 先別看第一行數列，看框線內的三角圖，可把此圖的最上列的各數全減一，從行第一接數列放下來。

(2) 把三角圖放在 $A_{(10,n)}$ 跳數點關係圖的第三行第二階數列。

三、 函數關係式與函數圖形 (x 表棒子數, $f(x)$ =移動次數)

$f_0(x)=2x-1$ 的圖形式一條直線 (如圖一)

$f_1(x)=2x^2 - 4x + 9$ 的圖形是一條凹向上的曲線。

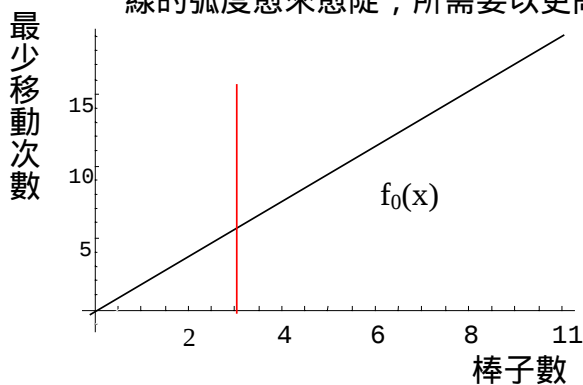
$f_2(x)=4/3 x^3 - 2x^2 - 4/3x + 17$ 圖形是一條凹向上的曲線。

$f_3(x)=2/3x^4 - 8/3x^2 + 33$ 圖形是一條凹向上的曲線

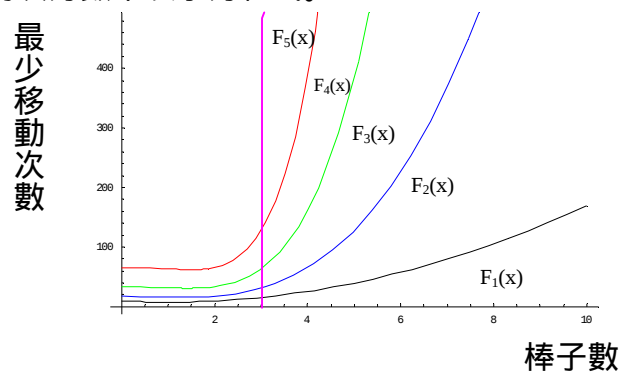
$f_4(x)=4/15x^5 + 2/3x^4 - 4/3x^3 - 8/3x^2 + 16/15x + 65$ 圖形是一條凹向上的曲線。

$f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 、 $f_4(x)$ 的常數項規律為 $2n - 1$ (n 為上一個函數的常數項) 由於曲線的弧度愈來愈陡，所需要以更高的次方數來表示方程式。

(如圖二)



(圖一)



(圖二)

陸、 總結論：

一、 最基本傳統的河內塔是在三根棒子的條件下導出的移動次數。我們延伸它的棒子數依照實驗的數據創造出”倒三角圖”來協助算出最少的移動次數，並導出了在不同跳數點內最少移動次數的公式與函數圖。

二、 因棒子數的擴張，移動次數變得很複雜，但我們仍找出了它在不同區段的跳數點的規律，也利用多項函數關係來呈現此規律。

柒、參考資料：

- 一、 昌爸工作坊、數學遊戲：netcityl.web.hinet.net/VserData/lsc24285
- 二、 國立編譯館、國民中學數學教科書第三冊第四章、中華民國八十九年一月正式本初版、臺北市 106 舟山路 247 號、台灣書店、中華民國八十九年
- 三、 國立編譯館、國民中學數學教科書第四冊第一章、中華民國八十九年一月正式本初版、臺北市 106 舟山路 247 號、台灣書店、中華民國八十九年
- 四、 翁文祥、數列與級數、初版、彰化市旭光西路 77 巷 76 號、綠天出版社、45 頁