

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-物理科

科 別：物 理 科

組 別：國 中 組

作品名稱：水震盪

關 鍵 詞：水震盪、週期、重力波

編 號：030116

學校名稱：

高雄縣立路竹高級中學

作者姓名：

王璟芳、張螢甄、高維璘、王敦立

指導老師：

鍾志輝、王淑怡



摘要



從浮體振盪週期的探討，聯想到震盪中裝水容器及大陸地區的湖震，這些的現象都是有週期性的且水面在震盪過程中呈現的是一種駐波現象。水的震動週期究竟與何種變因有關，呈何種關係？本研究的

第一步 利用質心觀念，推導出水在容器中震盪的週期公式，如下

$$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

第二步 設計實驗應證推導出的理論是否正確。在應證中最主要是應證公式中有關的變因是否正確，包括有（1）容器長度與水震盪週期的關係。（2）水在容器的深度與水震盪週期的關係。

我們應證的結果：

- （1） 改變容器的長度，繪圖分析確實呈線性關係，若能將誤差考慮則應可說是成正比關係，經由斜率的計算，確知**水震盪的週期與長度成正比**。
- （2） 改變容器內的水深，繪圖分析呈線性關係，經由分析確知**水震盪的週期與水深的平方根成反比**。

由此兩種變因確知與公式是相同的。

我們又發現水在一開始受到人為外力震動，當人為外力消失時，水還有受到重力的因數，仍繼續震盪。且知水的振動只發生在一定深度，故我們稱此種來回震盪的駐波為淺水重力波。至於嘗試改變容器的形狀中的圓形容器，在我們小範圍的研究中，無法確定關係如何。其中改變容器的形狀時發現正方形的面積與週期有高相關，但無法確定有正比的關係。

第三步 嘗試探討容器形狀的影響。經由形狀的探討，知形狀有相當程度的影響，但是成何種關係，以我們的實驗，祇知有高相關。

我們引進一個未知數 k ，則整個水震盪公式可改為

$$T = K \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

k 是其它影響因素，如容器的形狀，都會影響。

壹、 研究動機：

在國中理化第一冊第一章就介紹水，它跟日常生活真的是息息相關，而跟水有關的現象也一一被研究，自從想做一個科展研究時，我們就參考歷屆得獎作品，其中第三十七屆國中

組全國物理第一名是浮體振盪週期的探討，從中我們知道了浮體為什麼會震盪，當然也從裁判的評語中，知道了一個好的研究是要有理論及嚴謹的數值分析，是故當我們在確定研究主題時，就聯想到放在冰箱上方有裝水的杯子，每當冰箱門被關上時就看見杯中的水一直的晃不停，且也是有週期性的。當我們與老師在討論時，老師提出了在雜誌上曾看過大陸有一個湖泊，也像上述情形一樣會震盪，當地人稱之為湖震。這些水的震動週期究竟與何種變因有關，呈何種關係，引發了我們的好奇，我們想一探究竟。

貳、研究目的：

- 一、推導水在容器中震盪的週期公式，並設計實驗應證之。
- 二、嘗試找出公式以外的其他影響因素。

參、研究問題：

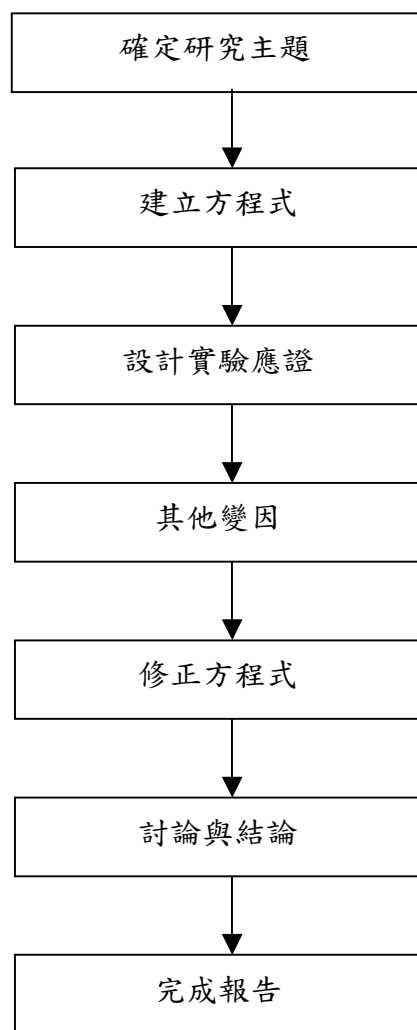
由上述研究目的，我們提出了以下三項問題來探討：

- 一、探討容器長度與水震盪週期的關係，是否與建立的公式符合？
- 二、探討水在容器的深度與水震盪週期的關係，是否與建立的公式符合？
- 三、改變容器的形狀，探討圓形容器的直徑、正方形的面積與水震盪週期的關係。

肆、研究方法

我們採用理論的建立及數值的分析兩種研究方法。

伍、研究流程



圖二 研究流程圖

陸、研究器材與裝置：

1. 搖擺震盪器一台，如下圖。
2. 不同長度的壓克力容器 10 個（計有 10cm、12cm、14cm、16cm、18cm、20cm、22cm、24cm、26cm）。
3. 不同直徑的壓克力容器 5 個（計有 9cm、11cm、14cm、17cm、19cm）。
4. 不同邊長的正方形容器 5 個（計有 10cm、12cm、14cm、16cm、18cm）。
5. 碼錶。
6. 水。
7. 計算機。
8. excel 軟體。



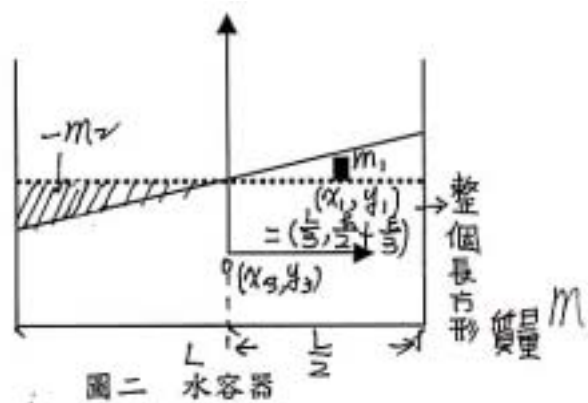
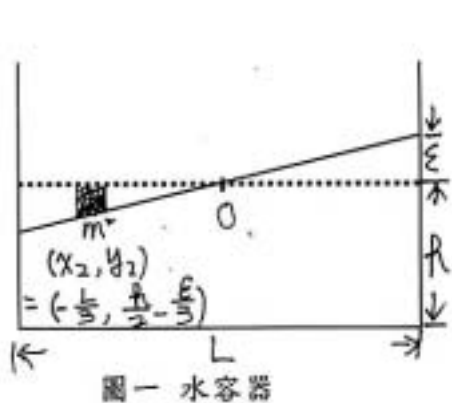
圖三 震盪儀搖擺

柒、研究步驟：

1. 將裝水容器固定於搖擺機上。
2. 調整搖擺機的震動快慢到第三擋。
3. 將水裝入容器中，並固定水位高度為 3 公分。
4. 打開電源開關，使搖擺機開始左右擺動，約 5 秒鐘後，關閉電源，水面繼續晃動。
（5 秒鐘是為使搖擺機穩定）
5. 測量震盪 5 次的時間三次，並求平均值及計算週期，將其紀錄於表一中。
6. 依次改變長度不同的容器，重複上步驟。
7. 繪出長度與週期的關係圖，求出斜率並分析之。
8. 固定長方形容器，改變水高由 1 公分、2 公分到 10 公分，重複上述 1. 到 7. 的步驟。
9. 改變容器為圓形、正方形，重複上述 1 到 7 的步驟。

捌、研究過程與討論

一、理論推導



座標原點 O 在中央，容器長為 L ，水高為 h ，震盪時水上升的高度變為 ε ，設液體密度為 D ，則依三角形重心原理（就是這裏的質心），右邊三角形液塊質量 m_1 的質心位置在 $x_1 = \frac{L}{3}$ ， $y_1 = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon}{3}$ 。同理，左邊三角形液塊質量 m_2 的質心位置為 $x_2 = -\frac{L}{3}$ ， $y_2 = \frac{h}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$ 。整個矩形液塊長 L ，高 h ，質量 m_3 的質心位置在原點，即 $x_3 = 0$ ， $y_3 = 0$ 。

當液面傾斜，右端最高點在 ε 處，整個液體的質心位置，由質心公式知

$$X_C = \frac{m_3 x_3 + m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_3 + m_1 + (-m_2)} = \frac{0 + \frac{1}{2} \frac{L}{2} \varepsilon D \frac{L}{3} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \varepsilon D \left(-\frac{L}{3}\right)}{DLh} = \frac{\varepsilon L}{6h} \quad (1)$$

$$Y_C = \frac{m_3 y_3 + m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_3 + m_1 + (-m_2)} = \frac{0 + \frac{1}{2} \frac{L}{2} \varepsilon D \left(\frac{h}{2} + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \varepsilon D \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{DLh} = \frac{\varepsilon^2}{6h} \quad (2)$$

因 $\varepsilon \ll h$ ，（此處 $\varepsilon \ll h$ 的原因，我們在實驗一的討論（3）中將予以探討）

因 $\frac{L}{6h} \varepsilon \gg \frac{\varepsilon^2}{6h}$ 所以 $X_C \gg Y_C$ ，即液體震盪時 Y_C 可忽略，則質心的主要震盪方向在 X 軸。

$$\text{所以 } X_C = \frac{L}{6h} \varepsilon$$

由 $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (平均速度 = 位移 ÷ 時間)

知 $V_x = \frac{L}{6h} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$

因 $Y_c = \frac{\varepsilon^2}{6h}$ 而 $Y_c + \Delta Y_c = \frac{(\varepsilon + \Delta \varepsilon)^2}{6h} = \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\Delta \varepsilon + \Delta \varepsilon^2}{6h} = \frac{\varepsilon^2}{6h} + \frac{2\varepsilon\Delta \varepsilon}{6h} + \frac{\Delta \varepsilon^2}{6h}$

所以 $Y_c \approx \frac{1}{6h} \cdot 2\varepsilon\Delta \varepsilon$

而 $V_y = \frac{\Delta Y_c}{\Delta t} \approx \frac{\varepsilon}{3h} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \ll V_x$ (V_x 與 V_y 比較)

由力學能 (E) = 重力位能 (E_p) + 動能 (E_k) (此處位能只有重力位能)

知 $E = E_p + E_k = m_3 g X_c + \frac{1}{2} m_3 V_x^2 = \frac{m_3 g}{6h} \varepsilon^2 + \frac{m_3}{2} \frac{L^2}{36h^2} \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \right)^2$ (3)

將上式與彈簧的力學能相比較 (彈簧的力學能 $E =$ 彈力位能 $\frac{1}{2} \kappa x^2 +$ 動能 $\frac{1}{2} m v^2$)

既 $E = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \frac{1}{2} m v^2$ (4)

此處 K 為彈簧力常數, X 為彈簧的改變量

得 $\frac{1}{2} \kappa = \frac{m_3 g}{6h}$, $\frac{1}{2} m = \frac{m_3}{2} \frac{L^2}{36h^2}$

又因為 $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{m_3 g}{6h} \div \frac{m_3 L^2}{2 \cdot 36h^2} = \frac{12gh}{L^2}$ (此處 ω 為角頻率, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$)

又因 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{12gh}{L^2}}} = \frac{2\pi L}{2\sqrt{3gh}} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$

所以得到水震盪的週期公式如下：

$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$ (5)

實驗〈一〉改變容器的長度

1. 變因

〈1〉控制變因：液體種類水〈密度 1g/cm^3 〉，水高 3 公分，搖擺機第 3 檔，容器寬 9.5 公分，容器高 19.5 公分。

〈2〉操縱變因：容器長度 (L)

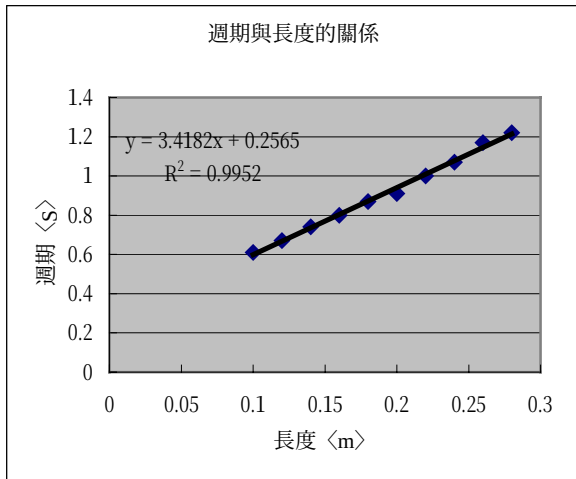
〈3〉應變變因：震盪週期 (T)

2. 數據處理與分析：

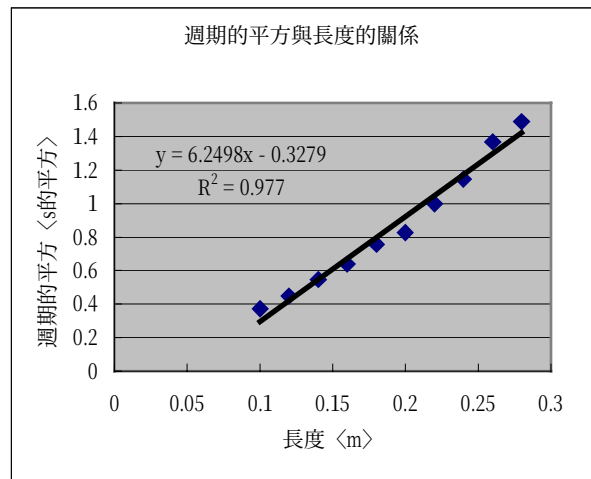
表一 容器長度與週期的關係

容器長度 L (m)	振動五次的時間 (s)			平均時間 (s)	週期 T (s)
0.10	3.1	3.1	2.9	3.0 ± 0.5	0.6 ± 0.5
0.12	3.3	3.4	3.3	3.3 ± 0.0	0.7 ± 0.0
0.14	3.9	3.7	3.7	3.8 ± 0.1	0.8 ± 0.1
0.16	4.0	4.0	4.0	4.0 ± 0.0	0.8 ± 0.0
0.18	4.4	4.4	4.2	4.3 ± 0.1	0.9 ± 0.1
0.20	4.6	4.5	4.6	4.6 ± 0.0	0.9 ± 0.0
0.22	5.0	5.1	5.1	5.1 ± 0.0	1.0 ± 0.0
0.24	5.5	5.2	5.3	5.3 ± 0.1	1.1 ± 0.1
0.26	5.7	5.9	5.9	5.8 ± 0.1	1.2 ± 0.1
0.28	6.0	6.2	6.1	6.1 ± 0.1	1.2 ± 0.1

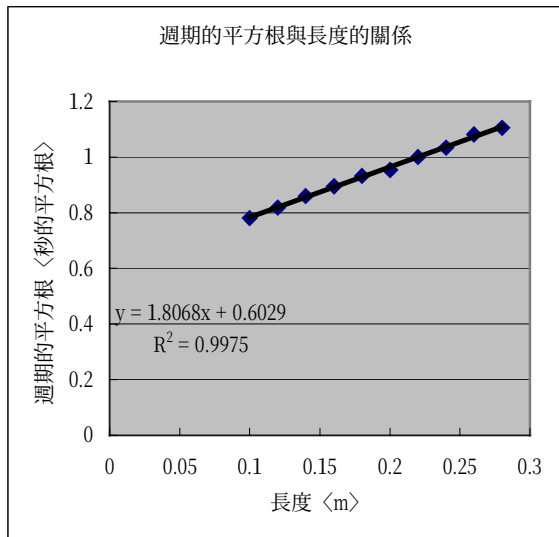
我們用 Excel 將上列數據，繪出以下三種關係圖 ($T-L$ ， T^2-L ， $\sqrt{T-L}$)



圖六 週期與長度的關係



圖七週期的平方與長度的關係



圖八 週期的平方根與長度的關係

討論〈1〉誤差我們是用平均誤差，操作過程中我們本來是要測量 5 秒內的振動次數，結果發現誤差很大，經分析後發現是次數的估計影響太大，故改由振動 5 次的時間，估計值取到整數，經由計算機求平均值後發現，必須選到小數第一位才能將數值很清楚看出差別，不然很多值會相同，如長度在 0.14 與 0.16 公尺，主因是我們的長度每隔兩公分改變一次，改變範圍太小。故我們在數據上是以取到小數第一位為準，但是用 excel 軟體繪圖時，因計算由電腦執行，則會取到小數第二位以下，而且畫出來的圖形，經計算後發現與理論很符合，故提高測量時的精密度有增進對理論的應證，接下來的實驗接以相同的方法處理，不再重複討論。

(2) 將圖六中的斜直線向下延伸交週期軸 (y 軸) 於一點 0.2565 公分處 (由圖六方程式 $y = 3.4182X + 0.2565$ 中令 $X=0$ ，則 $y=0.2565$)，此誤差的來源主要應是屬於系統誤差中的水面週期量測，水面並非完全靜止的一個平面，至於理論誤差及人為操作誤差，佔小部份的誤差來源。

(3) 經由實驗發現水的震盪，僅僅發生在水面的某深度 (ε) 而已，並沒有到達水底下，所以 ε 可以當作甚小於 h 。

〈4〉由上述三圖經由數值分析知道，圖八週期的平方根與長度的關係雖有高相關，但是截距較大而圖六的週期與長度的相關係數 0.9952 有高相關，將圖六之斜率 3.4182（由方程式 $y=3.4182X+0.2565$ 中的係數）與公式比較如下，

$$\text{公式} \quad T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} \quad \text{移項得}$$

$$\frac{T}{L} = \frac{\pi}{\sqrt{3gh}} = \frac{3.1416}{\sqrt{3 \times 9.8 \times 0.03}} = 3.35 \quad (\text{此處 } g=9.8\text{m/s}^2, h=3\text{cm}=0.03\text{m})$$

與圖六之 3.4182 相差不大，與我們推導的公式相符。

小結論：水震盪的週期與長度成正比。

實驗〈二〉改變容器內的水深

1. 變因

〈1〉控制變因：液體種類水〈密度 1g/cm^3 〉，容器長度，搖擺機第 3 檔，容器長 11.5 公分，容器寬 9.5 公分。

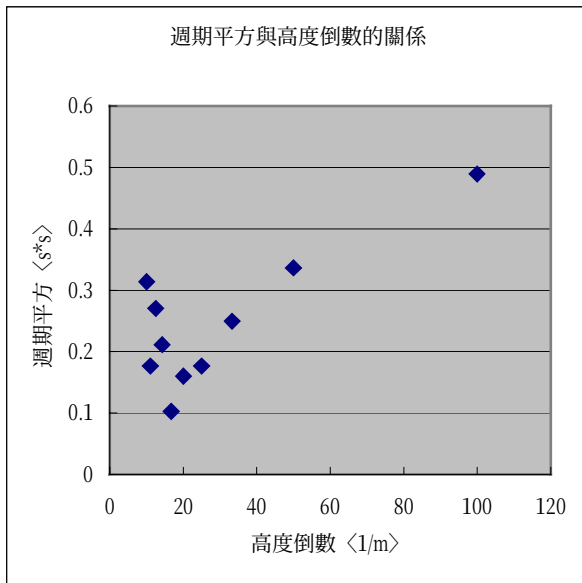
〈2〉操縱變因：水高

〈3〉應變變因：震盪週期

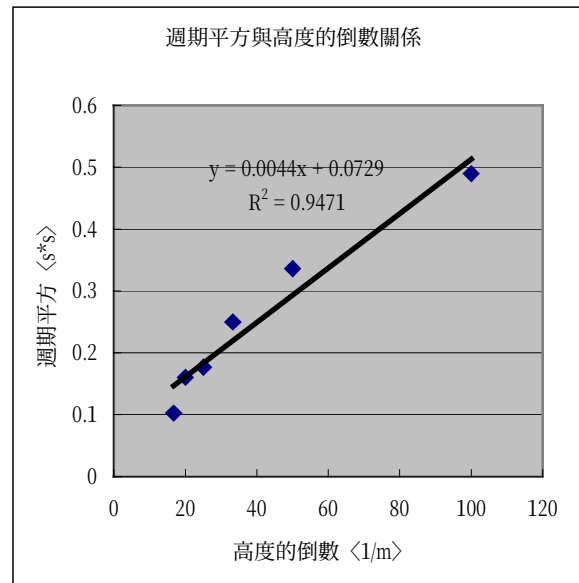
2. 數據處理與分析：溫度 25°C

表二 水深與週期的關係

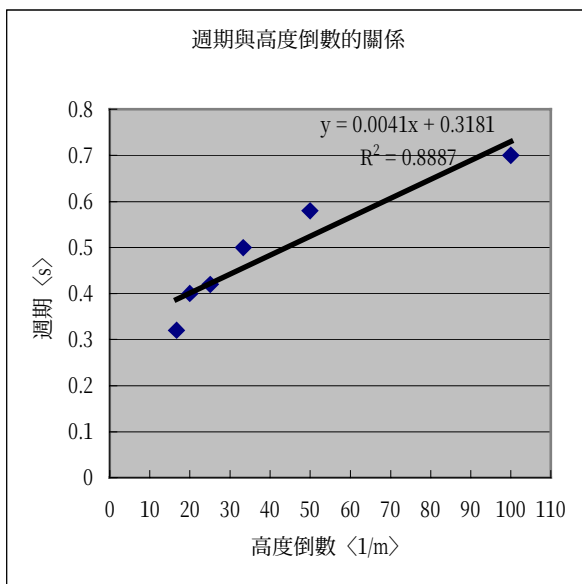
水高度 h (m)	$1/h$ (1/m)	振動五次的時間 (s)			平均時間 (s)	週期 T (s)
0.01	100.0	4.2	3.1	3.1	3.5 ± 0.4	0.7 ± 0.4
0.02	50.0	3.1	2.8	2.8	2.9 ± 0.1	0.6 ± 0.1
0.03	33.3	2.8	2.3	2.3	2.5 ± 0.2	0.5 ± 0.2
0.04	25.0	2.1	2.1	2.1	2.1 ± 0.0	0.4 ± 0.0
0.05	20.0	2.3	1.8	1.8	2.0 ± 0.2	0.4 ± 0.2
0.06	16.7	1.7	1.6	1.4	1.6 ± 0.1	0.3 ± 0.1
0.07	14.3	2.1	2.3	2.5	2.3 ± 0.1	0.5 ± 0.1
0.08	12.5	2.5	2.5	2.8	2.6 ± 0.1	0.5 ± 0.1
0.09	11.1	2.1	2.1	2.1	2.1 ± 0.0	0.4 ± 0.0
0.10	10.0	2.5	2.8	3.1	2.8 ± 0.2	0.6 ± 0.2



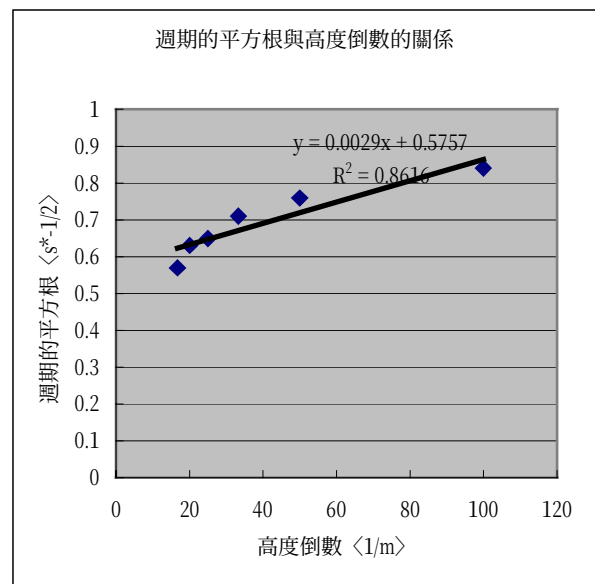
圖九 週期平方與高度倒數的關係



圖十 週期平方與高度倒數的關係



圖十一 週期平方與高度倒數的關係



圖十二 週期平方與高度倒數的關係

3. 討論：

- (1) 由圖九即表二數據知道，水高度 0.06 公尺處以後，發生了轉折點，也就是週期沒有預期的下降，居然往上升。經分析其原因可能是水波產生駐波的現象，只發生在某一深度，原因是水在兩容器範圍震盪，水波到達容器兩邊時，沿著容器兩邊向下流動，由於水分子間有摩擦力，是故水流只能流到某一深度。由於這又是一個新的研究方向，經與老師討後留待未來繼續研究。
- (2) 我們將水深 0.07 公尺以後的數據去掉，重新繪製圖。由圖形知，在圖十的週期平方與高度的倒數關係中，相關係數最接近 1。

(3) 由圖十、圖十一及圖十二的比較中發現

圖十斜率=0.0044=週期平方÷高度的倒數(由方程式 $y=0.0044x+0.0729$ 中的係數得知，且圖形的斜率可由週期平方÷高度的倒數得知
1.)

若以推導公式 $T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$ 兩邊平方得到

$$T^2 = \frac{\pi^2 L^2}{3gh} \quad \text{移項且將已知數據代入}$$

$$T^2 \div \frac{1}{h} = \frac{\pi^2 L^2}{3g} = \frac{3.1416^2 \times 0.115 \times 0.115}{3 \times 9.8} = 0.0045$$

此與斜率值相較，可說是幾乎相等，可見我們推得的公式是正確的。

(3) 水在搖擺儀振動後，就沒有外力，此時水繼續振動，可見是受到重力產生的振動，我們將此種稱為重力波且又由此實驗知水的振動只發生在一定深度，是故稱此為淺水重力波。

4. 小結論：水震盪的週期與長度的平方根成反比。水振動，是受到重力產生的振動，我們將此種稱為淺水重力波。

實驗〈三〉改變容器的形狀

1. 圓形

〈1〉控制變因：液體種類水〈密度 1g/cm^3 〉，搖擺機第3檔，容器中水高3公分。

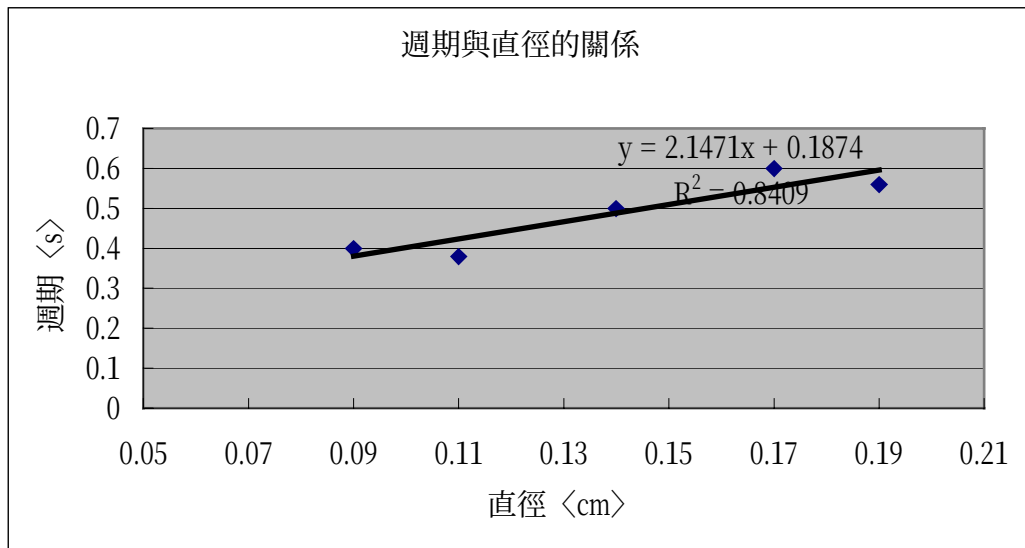
〈2〉操縱變因：直徑

〈3〉應變變因：震盪週期

(4) 數據處理與分析：

表三 改變容器的形狀

水直徑 h (m)	振動五次的時間 (s)			平均時間 (s)	週期 T (s)
0.09	1.9	2.3	1.9	2.0 ± 0.2	0.4 ± 0.2
0.11	1.9	1.9	1.8	1.9 ± 0.1	0.4 ± 0.1
0.14	2.5	2.5	2.5	2.5 ± 0.0	0.5 ± 0.0
0.17	2.8	3.1	3.1	3.0 ± 0.1	0.6 ± 0.1
0.19	2.8	2.8	2.8	2.8 ± 0.0	0.6 ± 0.0



圖十三 週期與直徑的關係

(5) 討論 (a) 週期與直徑的相關係數為 0.8409，從數據的不穩定性及圖十三很難看出，有如長方形容器的成正比關係。

(b) 圓形容器波在裡面運動時，圓形容器的反射面是很複雜，而且會有旋轉的出現，留待未來繼續探討的方向。

(6) 小結論：圓形容器在我們小範圍的研究中，不能確定有正比的關係。

2. 改變容器的形狀的正方形

〈1〉控制變因：液體種類水〈密度 1g/cm^3 〉，搖擺機第 3 檔，容器中水高 3 公分。

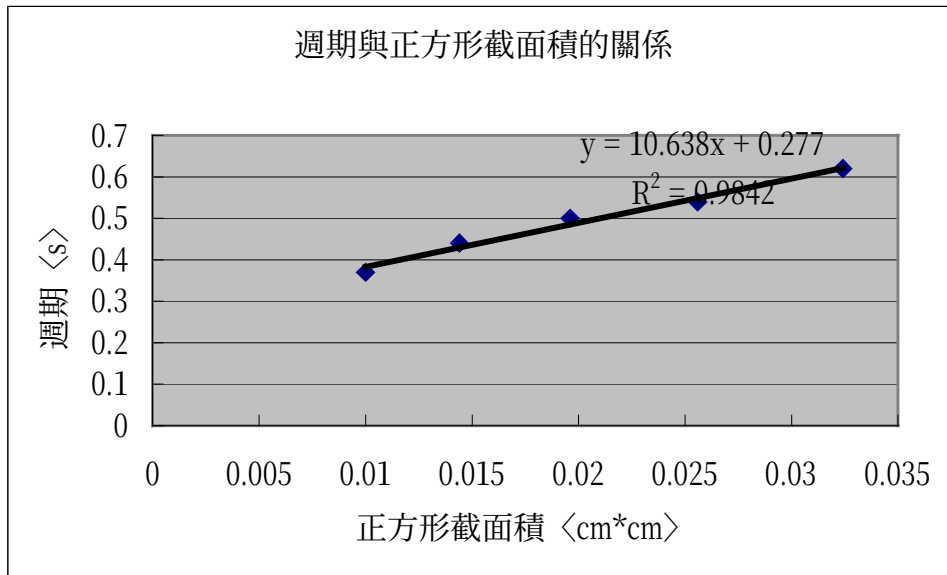
〈2〉操縱變因：截面積（正方形邊長）

〈3〉應變變因：震盪週期

(4) . 數據處理與分析：

表四 . 改變容器的形狀的正方形

邊長 (m)	截面積 (m^2)	振動五次的時間 < s >			平均時間 < s >	週期 T < s >
0.10	0.0100	1.8	2.0	1.7	1.8 ± 0.1	0.4 ± 0.1
0.12	0.0144	2.1	2.3	2.1	2.2 ± 0.1	0.4 ± 0.1
0.14	0.0196	2.5	2.5	2.5	2.5 ± 0.0	0.5 ± 0.0
0.16	0.0256	2.5	2.8	2.8	2.7 ± 0.1	0.5 ± 0.1
0.18	0.0324	3.1	3.1	3.1	3.1 ± 0.0	0.6 ± 0.0



圖十四 週期與正方形截面積的關係

(5). 討論：由圖十四知，正方形的面積與週期有高相關，但是有沒有成正比，則需要從理論上再去探討。

(6) 小結論：正方形的面積與週期有高相關。

玖、總結

- (一) 我們由質心推得的水震盪公式為 $T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$ 。
- (二) 改變容器的長度，經數據繪圖分析呈線性關係，若能將誤差考慮則應可說是成正比關係，且經由斜率的計算確知水震盪的週期與長度成正比，此與公式是相同的。
- (三) 改變容器內的水深，經數據繪圖分析呈線性關係，若能將誤差考慮則應可說是成正比關係，且經由斜率的計算確知水震盪的週期與深度的平方根成反比，此與公式是相同的。水在搖擺儀振動後，就沒有外力，可見是受到重力的影響，且又由實驗知水的振動只發生在一定深度，是故稱此種來回震盪的駐波為淺水重力波。
- (四) 改變容器的形狀中的圓形容器在我們小範圍的研究中，無法確定關係如何。
- (五) 改變容器的形狀中的正方形的面積與週期有高相關，無法確定有正比的關係。
- (六) 經由形狀的改變我們可知震動週期還有別的影響因素如潮震的大面積時，或是非淺水重力波時，所以我們引進一個未知數 k ，整個公式就變成

$$T = K \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

拾、未來研究方向

淺水重力波的深度範圍如何？面積的影響如何？

拾壹、參考資料

1. 劉廣定 理化第一冊 國立編譯館 第二版 台灣 p15 民國 91 年
2. 第 24 屆全國科展作品編輯
3. 楊介信 中學物理實驗大全 凡異出版社 第一版 台灣 p46 民國 86 年

拾貳、研究相片

	
照片一 長方形容器	照片二 正方形容器
	
照片三 圓形容器	照片四 搖擺儀上的水震盪