

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-物理科

科 別：物 理 科

組 別：國 中 組

作品名稱：會唱歌的空氣

關 鍵 詞：聲音、空氣柱共振、管口修正量

編 號：030109

學校名稱：

桃園縣立竹圍國民中學

作者姓名：

蔡 銘、蕭博文、李佳霖、黃翊寧

指導老師：

陳宗萍、李欣怡



會唱歌的空氣

一利用調音器分析聲音的性質

壹、研究動機：

國中理化第一冊第三章「聲音」中提到聲音的產生之影響變因以及共鳴的原理，其中對於裝水的玻璃管吹氣發出的聲音的高低與水量的多寡似乎是存在著水裝得越多聲音越高的關係。如此結果引起我們的興趣，進而對這些現象加以研究與探討。課程中提到聲音的音調與聲波的頻率有關，使我們想嘗試以較常見的音樂調音器來測量聲音的頻率。

貳、研究目的：

- 一. 找出對玻璃管吹氣，所發出聲音的水量與音調高低的關係
- 二. 探討對空氣柱吹氣的發音方式之原理與特性
- 三. 驗證空氣柱發聲振動公式（ $f = \frac{nv}{4l}$ ）並修正
- 四. 探討量筒的口徑大小對吹氣時所發出之音調高低的影響
- 五. 探討其誤差成因並修正理論公式
- 六. 修正量的實驗及討論
- 七. 實際測量吹管樂器,並以之前理論探討樂器的結構與發聲原理
- 八. 藉由探討簫的發音原理，製做一支與簫發音相同的模擬管樂器

參、研究設備及器材：

器材	數量	器材	數量
溫度計	1 支	橡皮管(40cm)	1 條
計算機	1 台	燒杯(1000ml)	1 個
滴 管	1 條	支架	1 組
調音器(Korg)	1 台	音叉(388Hz)	1 個
量筒	5 個	游標尺	1 個
長尺(30cm,100cm)	各 1 把	簫(D 調)	1 把
滴定管	1 支	塑膠水管(口徑 2.0cm)	1 支
砂紙	5 張	銼刀(半圓.三角)	各 1 把
鑽孔機	1 台	鋸子	2 把

肆、研究過程或方法：

為了做這個實驗，想了許多可以用來測音調的儀器，如：示波器、電腦、調音器...等，不過因為示波器不易取得，也想不到什麼方法能用電腦來做模擬，因此便選定了較為普遍的調音器做為實驗器材。

使用調音器測聲頻的原理與方法：

根據高級中學基礎物理（南一版）中所提供資料如（表一），而根據樂理，八度音階中之含五個全音及兩個半音，故把所有半音音階列出如下（表二），又因為每差八度音，即高音 C 與中央 C 其頻率恰好加倍，故我們可推論，C[#]、D[#]、F[#]、G[#]、A[#]之頻率如下；調音器(圖一)可測音調範圍為±50，即相鄰的兩個音調可細分為 100 個刻度，如此我們便可精準地測出聲波的頻率，例如：調音器測出某聲音音調為 C +30，代表此音調介於 C 與 C[#]之間，且高於 C 調其兩音調的頻率差距的 30%，所以可以計算如下：

$$f = 262 + \frac{(278 - 262) \times 30}{100} = 266.8\text{Hz}，\text{甚至在較低頻率時最小單位可達到 } 0.1\text{Hz}，\text{我們可發現原來}$$

調音器是一種相當精確的音頻測量器。

表一：樂器發聲頻率關係表

音名	唱名	頻率(Hz)
中央C	Do	262
中央D	Re	294
中央E	Mi	330
中央F	Fa	349
中央G	Sol	392
中央A	La	440
中央B	Si	494
高音*C	Do	524

註：*代表高八度
(中央 C 調)

表二：樂器發聲頻率關係表

音名	唱名	頻率(Hz)
中央C	Do	262
中央C [#]	升Do	278
中央D	Re	294
中央D [#]	升Re	312
中央E	Mi	330
中央F	Fa	349
中央F [#]	升Fa	370.5
中央G	Sol	392
中央G [#]	升Sol	416
中央A	La	440
中央A [#]	升La	467
中央B	Si	494
高音*C	Do	524

註：*代表高八度
(中央 C 調)



(圖一) 調音器

※此資料取自於參考文獻

【實驗一】

在課本曾經提到「水柱越高，頻率越高」由此可見，聲音頻率的高低與水柱高低有所關係，於是我們利用以下實驗來驗證，並加以了解兩者間的關係。

實驗步驟：

- 1.取一口徑為 1.5cm 的量筒，調整水柱高 8~ 1(cm) 並以吹氣的方式使之發音
- 2.用調音器測量重複 5 次，並紀錄於表三

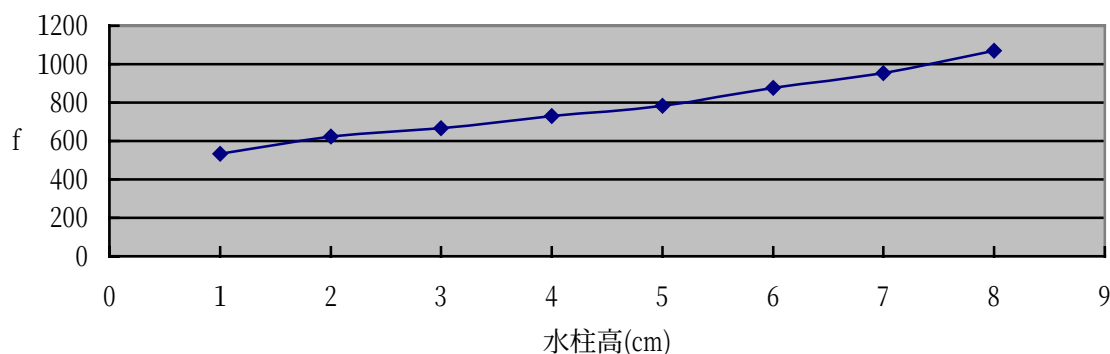
研究結果：

依據實驗部份敘述如下：

使用管口直徑：1.5cm 全長：16.0cm 溫度：28°C 聲速：347.8m/s

表三：不同長度水柱所發出聲音頻率之關係表

水柱長	平均頻率f	1/f
1.0cm	534.24	0.001871818
2.0cm	622.56	0.001606271
3.0cm	666.45	0.001500488
4.0cm	730.68	0.001368588
5.0cm	784.00	0.0012551
6.0cm	875.44	0.001142283
7.0cm	953.44	0.001048834
8.0cm	1069.76	0.000934789



圖二：頻率與水柱長的關係圖

由圖二可知：水柱越低其頻率越低，但卻無成正比關係。

實驗結果分析：

由課本中所提到的「水柱越高，頻率越高」來說，兩者應呈正比關係，但經由實驗結果發現並沒有，因為當水柱長為 0 cm 時，亦可發出聲音，所以水柱長與頻率高低並沒有直接的關係。

【實驗二】

由【實驗一】發現水柱與頻率無直接關係，於是我們懷疑是否與空氣柱有關並加以探討兩者的關係。

實驗步驟：

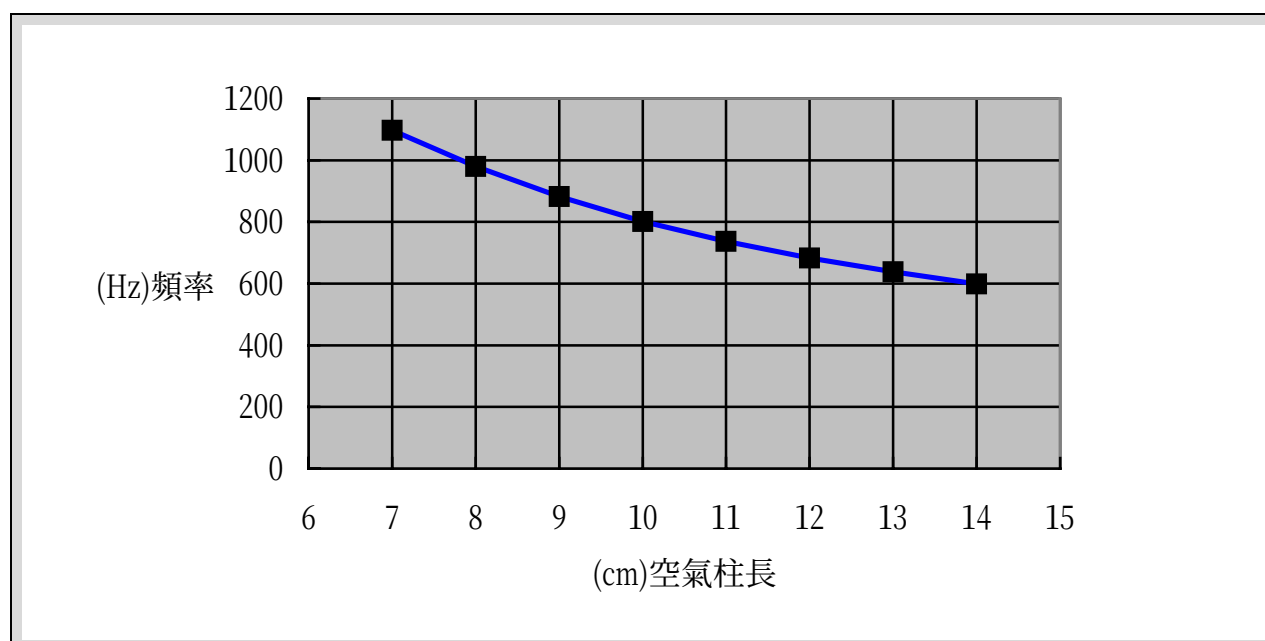
1. 取1根口徑同為1.5cm的量筒，分別調整成7cm~14cm的空氣柱，並以吹氣的方式使它發出聲音
2. 先將量筒調出不同的空氣柱高低
3. 對空氣柱吹氣，並用調音器測量重複5次，將數據記錄於表四

研究結果：

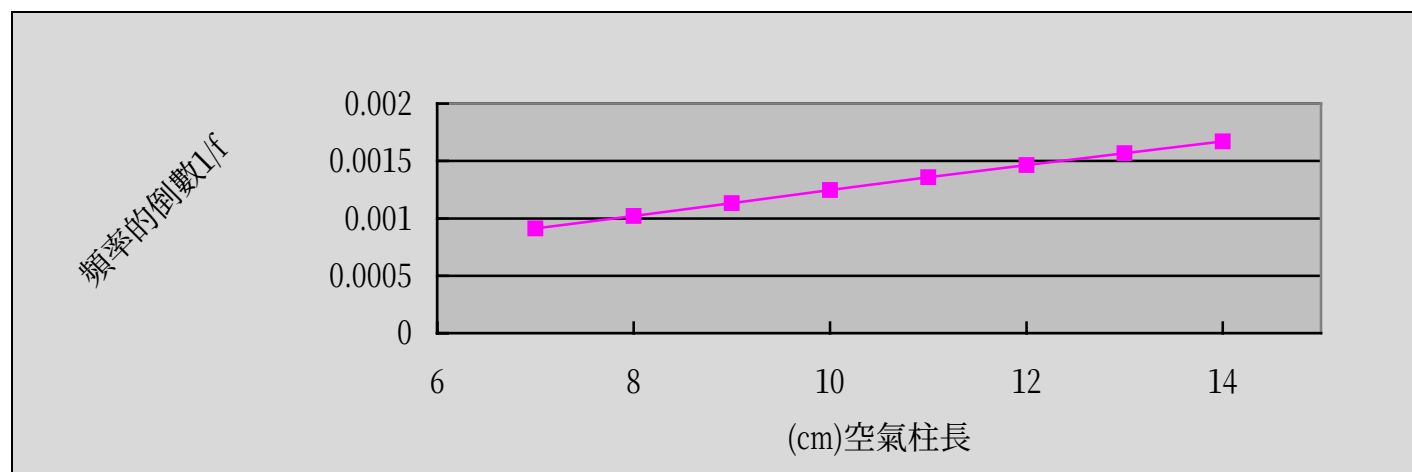
使用管口直徑:1.5cm 全長:16.0cm 溫度:30°C 聲速:349.0m/s

表四：不同長度空氣柱所發出聲音頻率之關係表

空氣柱長	平均頻率f (Hz)	1/f	理論值	誤差
7.0cm	1097.1	0.000911502	1246.43	11.98%
8.0cm	980.4	0.001019992	1090.6	10.10%
9.0cm	882.2	0.00113353	969.4	9.00%
10.0cm	801.2	0.001248128	872.0	8.12%
11.0cm	736.6	0.001357589	793.2	7.14%
12.0cm	683.4	0.001463272	727.1	6.01%
13.0cm	638.0	0.001567398	671.2	4.95%
14.0cm	598.9	0.001669728	623.2	3.90%

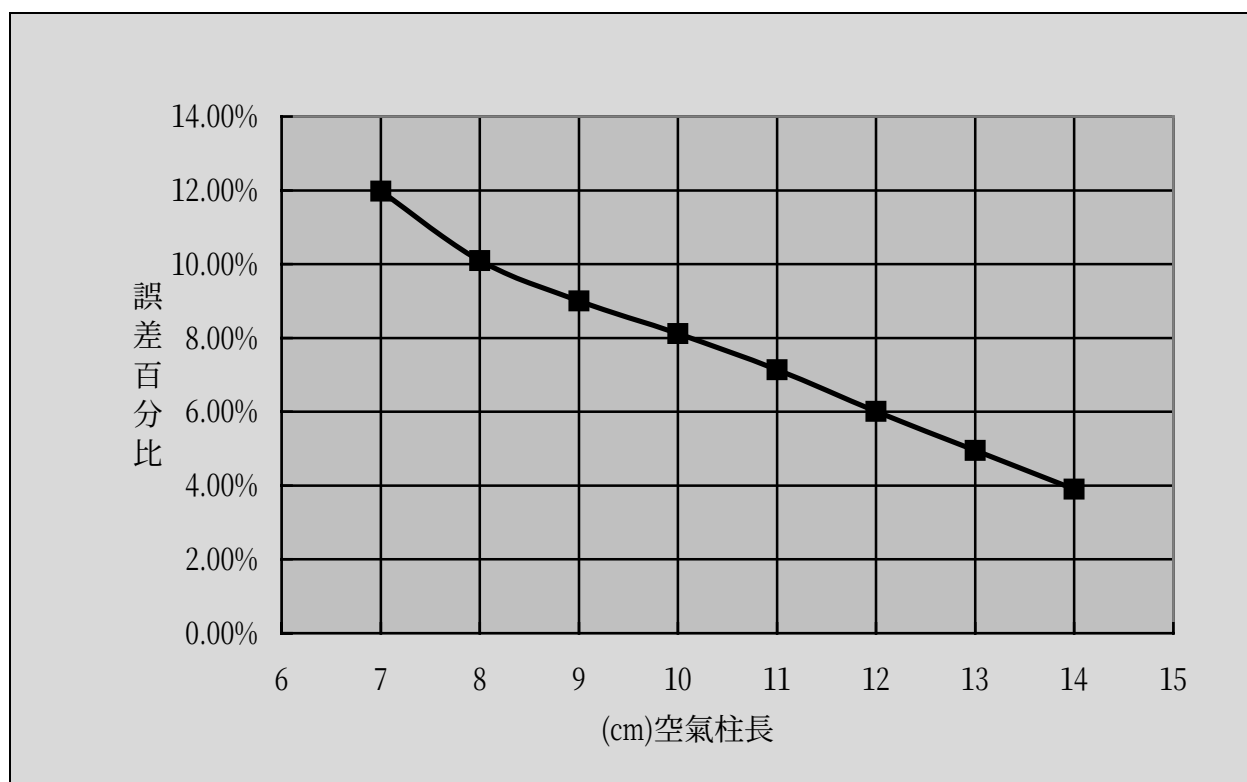


圖三：不同長度空氣柱所發出聲音頻率之關係圖



圖四：不同長度空氣柱所發出頻率倒數之關係圖

由圖三,四可知： f 與空氣柱間的關係，也因此可驗證出 $l \propto \frac{1}{f}$ 的公式出來，但圖四中曲線的延長與原點有些微的差距，所以我們認為那即是實驗誤差所在。

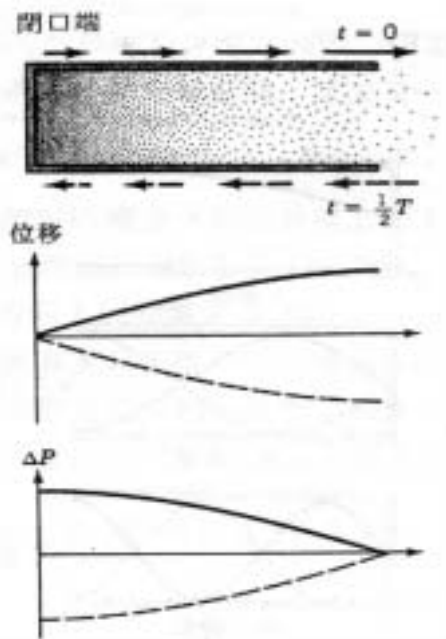


圖五：空氣柱長度與產生聲音頻率之誤差關係圖

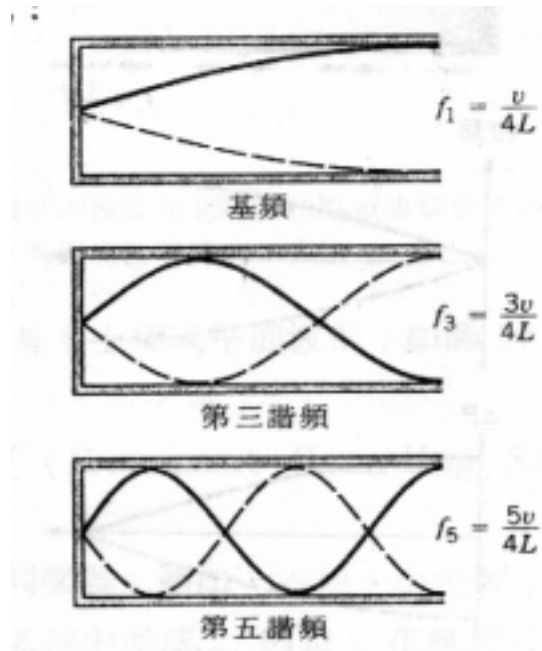
由圖五可知：空氣柱越長其誤差也就越小，於是我們懷疑此誤差是否與量筒之間有所關係

實驗結果分析：

根據 University Physics(Benson)內容中提到共振駐波在空氣柱的形成，本實驗應屬於所謂封閉管子 (closed pipe)，即僅一端被封閉。當一壓縮脈波沿管子行進若遇到封閉端它反射一壓縮波，而稀疏波則反射一稀疏波。當管子斷面區域突然發生改變時，聲波也是部分地反射，部分地透設過去。例如：當一稀疏波到達開口時，周圍的空氣衝向此區域且形成一壓縮波而沿著管子回傳。類似情形，當一壓縮波達到一開口端時，擴散而形成一稀疏波，因此，一壓縮波在開口端會反射一稀疏波。如果每一個被反射的脈波在管中來回一次花的時間是此波源週期的倍數，則將產生一個共振駐波。



圖六：發聲表示圖



圖七：諧頻表示圖

封閉管子：(圖六)表示分子移動情形在 $t = 0$ 時，以實線箭頭表示運動方向；在 $t = \frac{T}{2}$ 時，以虛線箭頭表示之，此處 T 是週期。在封閉端點其位移永遠為零，這就是位移的節點。如果我們記得封閉端是位移節點而開放端是位移腹點，則高次的諧波也很容易被建立。為求出頻率，由波動之關係式： $v = f\lambda$ 即波速=頻率×波長，因此 $\lambda = \frac{v}{f}$ ，然後即是空氣柱的長度 $L = (2n-1) \times \text{波長} \div 4$ ，大部分發出基音時，上式即變成 $L = \frac{v}{4f}$ ，得到此式後，在將它變成 $f = \frac{v}{4L}$ ，(圖七)顯示一封閉管子僅能有奇數諧波的存在 $fn = \frac{nv}{4L}$ ($n=1, 3, 5, \dots$) (封閉管子)，即若是 10cm 之空氣柱，溫度為 15°C，則當時的聲波速率為 $v = 331 + 0.6t = 331 + 0.6 \times 15 = 340(\text{m/s})$ ，則我們可將數字帶入式子中 $f = \frac{340\text{m/s}}{4 \times 0.1\text{m}} = 850(\text{Hz})$ ，即求出當時所發出的聲音頻率理論值是 850 (Hz)。

科學展覽作品/會唱歌的聲音—利用調音器分析聲音的性質

由實驗數據可看出水柱高度越高（即空氣柱越短），發出聲音的音調亦越高。(圖三)中經轉換成「頻率—空氣柱長」的圖形後可看出空氣柱長度與聲音的頻率的關係近乎成反比關係，在此可驗證空氣柱振動公式 $f = \frac{(2n-1)v}{4l}$ 即空氣柱長 $l \propto \frac{1}{f}$ ，由(圖四)可看出。而其誤差的部分可由稍後的實驗探討。

【實驗三】

根據【實驗二】的結果我們發現誤差與量筒有所關係，但我們也發現似乎有其他因素造成了實驗的誤差，於是我們便想到是否與口徑有所關係，所以做了以下實驗來探討兩者之間是否有關係

實驗步驟：

1.取二種不同口徑的量筒：

管口直徑:1.5cm	全長:18.0cm(A)
管口直徑:2.3cm	全長:23.8cm(B)

使它們的空氣柱等長，然後觀察吹氣以後它們音調的關係

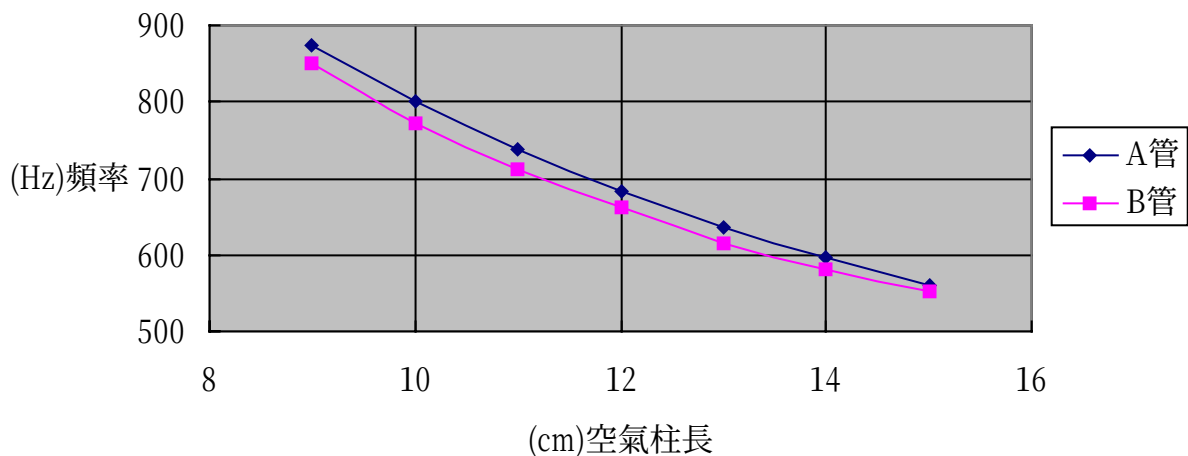
2.先調節水量，使其空氣柱的長度漸漸縮短（由 9cm ~ 15cm），每增加一公分便測量一次。

3.觀察並記錄結果於表五

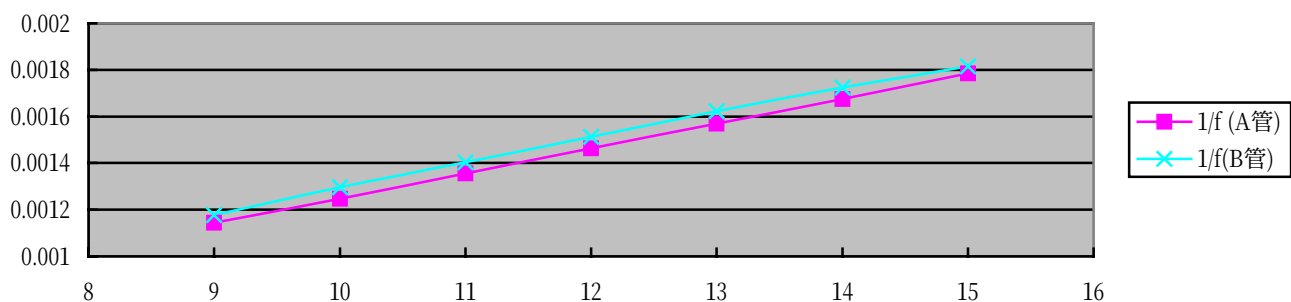
研究結果：

表五：不同空氣長度與管徑所發出頻率之關係表

空氣柱長	頻率 (A管)	1/f (A管)	頻率 (B管)	1/f(B管)
9.0cm	873.62	0.001144662	850	0.001176471
10.0cm	801.62	0.001247474	771.8	0.001295672
11.0cm	737.72	0.001355528	712.72	0.001403076
12.0cm	683.5	0.001463058	661.1	0.00151263
13.0cm	637.2	0.001569366	616	0.001623377
14.0cm	596.82	0.001675547	579.86	0.001724554
15.0cm	560.26	0.001784886	551.14	0.001814421



圖八：不同空氣長度與管徑所發出頻率之關係圖



圖九：不同空氣柱長度頻率倒數之關係圖

由圖八、九得知：管口越大，其頻率越低，因為口徑越大管口修正量及波長也越長，故 f 也越低。然而我們由圖九中發現此圖差不多符合 $l \propto \frac{1}{f}$ 的關係。

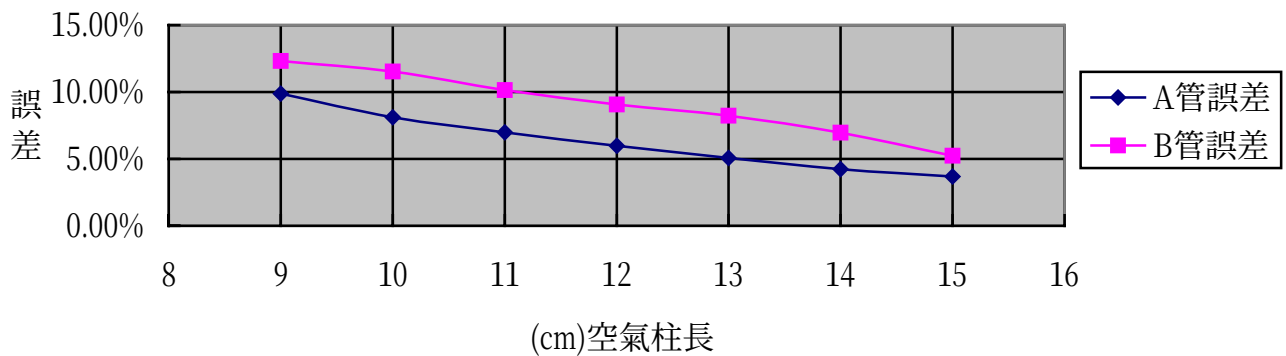
結果討論：

表六：不同空氣柱長度所發出頻率理論值關係表

空氣柱長	理論值
9.0cm	969.44Hz
10.0cm	872.5Hz
11.0cm	793.18Hz
12.0cm	727.08Hz
13.0cm	671.15Hz
14.0cm	623.21Hz
15.0cm	581.67Hz

表七：不同空氣柱長度與口徑所做出的數據與理論之誤差關係表

理 論 與 實 驗 之 誤 差		
	A管誤差	B管誤差
9.0cm	9.88%	12.32%
10.0cm	8.12%	11.54%
11.0cm	6.99%	10.14%
12.0cm	5.99%	9.07%
13.0cm	5.06%	8.22%
14.0cm	4.23%	6.96%
15.0cm	3.68%	5.25%



圖十：不同空氣柱長度與口徑所做出的數據與理論之誤差關係圖

由以上數據顯示，不同口徑的量筒，其發出的頻率有些許的不同，而且口徑大的量筒發出的頻率與理論值誤差較大，不禁懷疑其原因，於是去找出口修正量的理論，並修正其誤差。

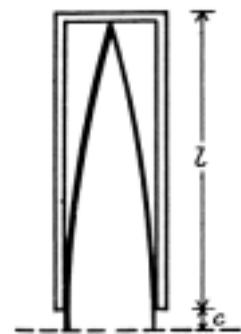
實驗結果分析：

閉管的管口修正量

管內的空氣柱形成駐波時，管口並非位移波的波腹，右圖中，波腹通常在管口外，與管口有一段距離 c ，稱為管口修正量。當空氣以基頻振動時

$$\lambda = 4(l + c) \quad \text{或} \quad f = \frac{v}{4(l + c)}$$

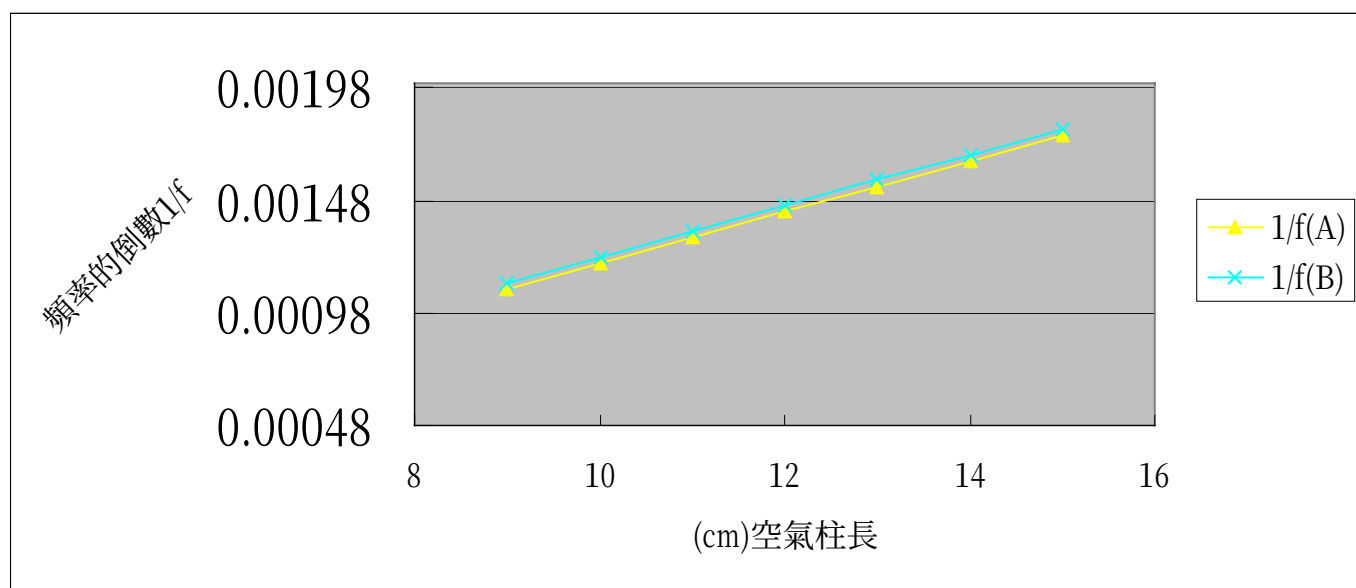
Helmholtz 和 Rayleigh 曾經發展出口修正量的數學理論，一般採行的結果是：若管的內半徑為 r ，則修正量 $c = 0.6r$ ，而且，修正量還與波長有關，通常波長越小，修正量也越小。



圖十一：閉管的管口修正量

表八：不同空氣柱長度與口徑修正後的理論值關係表

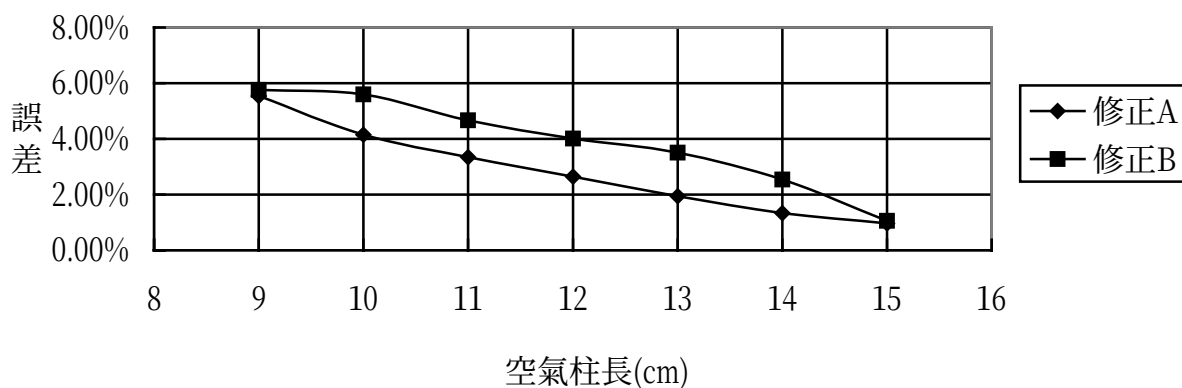
空氣柱長	修正後理論值A	1/f (理論值A)	修正後理論值B	1/f (理論值B)
9.0cm	924.87	0.001083095	901.96	0.001110605
10.0cm	836.36	0.001197705	817.59	0.00122522
11.0cm	763.32	0.001312319	747.65	0.001339836
12.0cm	702.01	0.001426941	688.73	0.00145444
13.0cm	649.81	0.001541545	638.42	0.001569046
14.0cm	604.84	0.00165615	594.96	0.001683672
15.0cm	565.70	0.001770789	557.04	0.00179827



圖十二：不同空氣柱長度與口徑修正後的理論值關係圖

表九：不同空氣柱長度與口徑修正後的誤差值關係表

修正後誤差		
空氣柱長	修正後誤差A	修正後誤差B
9.0cm	5.54 %	5.76 %
10.0cm	4.15 %	5.60 %
11.0cm	3.35 %	4.67 %
12.0cm	2.64 %	4.01 %
13.0cm	1.94 %	3.51 %
14.0cm	1.33 %	2.54 %
15.0cm	0.96 %	1.06 %



圖十三：不同空氣柱長度修正後誤差的關係圖

根據以上實驗結果，我們從表七〔實驗誤差〕及表九〔修正後誤差〕誤差變小的現象來看管口修正量的確存在，也說明了口徑較大，頻率誤差也較大，除此也對【實驗二】的圖四不夠漂亮的正比圖形提出合理的解釋。也就是說，圖四成正比圖形與原點的誤差大部份是因為管口修正量所造成的。

【實驗四】

由【實驗三】結果得知，不同口徑的大小，均存在一段管口修正量，為要求實驗精準，我們將運用空氣柱共鳴管原理來更進一步求取管口修正量的數值。

實驗步驟：

1. 取滴定管、橡膠管、1000ml 的燒杯裝滿水和支架，加以裝設完成儀器〔裝置如圖十四〕。
2. 在滴定管口固定高度敲擊音叉，並用連通管原理，將水位由最高點慢慢降低，找出共振範圍，並在範圍內，來回測量出共振聲音最大的一點，並記錄此數據。
3. 往剛剛水位範圍的下方水位移動，找出第二個共振點並記錄。



圖十四：實驗四裝設圖

實驗結果討論：

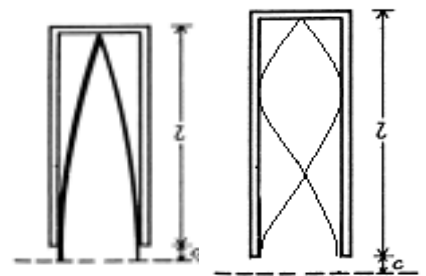
表十：第一共振點與第二共振點的空氣柱長度關係表（滴定管口徑 1.0cm）

	第一共振點(cm)	第二共振點(cm)	C 值(cm)
1	22.1	66.6	0.15
2	22.3	67.6	0.35
3	22.3	67.3	0.2
4	22.1	66.9	0.3
5	22.2	66.8	0.1

從實驗得知，真正產生共振的波腹，並不在管口，而是位於試管口上方一小段 c 長度，稱為管口修正量。由高中物理實驗，做一些修正來討論 c 的值，找一已知頻率的音叉在管口上方震動，運用連通管原理來調整水柱高度，找出第一共振點和第二共振點的空氣柱長度 l_1 和 l_2

$$\frac{1}{4}\lambda = l_1 + c \text{ 與 } \frac{3}{4}\lambda = l_2 + c \text{ 則 } l_2 + c = 3(l_1 + c) \text{ 所以 } c = \frac{l_2 - 3l_1}{2}$$

根據以上理論得知 c 值發現與理論值〔0.3cm〕相差不遠且我們可由此驗證 Helmholtz 和 Rayleigh 的數學理論的正確性。



(左)圖十五：第一次共振

(右)圖十六：第二次共振

【實驗五】

由【實驗一】到【實驗四】中，我們可了解空氣柱產生共振的原因和發音原理，於是我們探討日常生活中吹管樂器的發聲原理。

實驗步驟：

1. 取一把簫(D 調) 如(圖十七)，依序吹出各音調，以調音器換算出頻率的數值。
2. 依序量出各指孔與吹口端之距離。
3. 以前述空氣柱駐波理論公式，計算出理論之波長、頻率並以實驗值探討其誤差成因，與樂器發聲原理。



圖十七：簫

研究結果：

室溫：28°C

聲速：347.8m/s

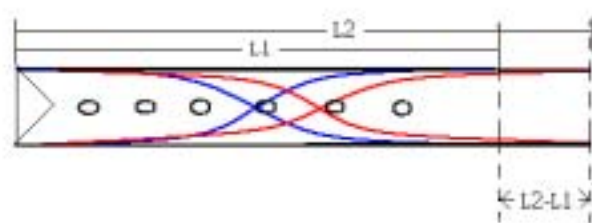
表十一：簫發出基音與指孔至吹氣端距離之關係表

音調	頻率(Hz)	指孔至吹氣端 L1(cm)	理論駐波長 L2 (cm)	L2-L1 (cm)
D	294.00	51.8	59.14	7.34
E	330.00	44.3	52.69	8.39
F#-30	357.60	40.0	48.62	8.62
G-10	389.85	36.1	44.60	8.50
A-30	432.80	31.7	40.18	8.78
B	494.00	27.5	35.20	7.70
*C#-30	546.40	23.9	31.83	7.93

用較大的氣可吹出第一泛音，亦是高八度音，再討論發出第一泛音與指孔至吹氣端距離關係

表十二：簫發出第一泛音與指孔至吹氣端距離之關係表

音調	頻率(Hz)	指孔至吹氣端 L1(cm)	理論駐波長 L2 (cm)	L2-L1 (cm)
*D+30	598.80	51.8	58.08	6.28
*E+30	671.40	44.3	51.80	7.50
*F-20	732.40	40.0	47.48	7.48
*G+20	793.40	36.1	43.82	7.72
*A+30	896.20	31.7	38.80	7.10
*B+20	1000.00	27.5	34.78	7.28
*C#+30	1067.00	23.9	32.59	8.69

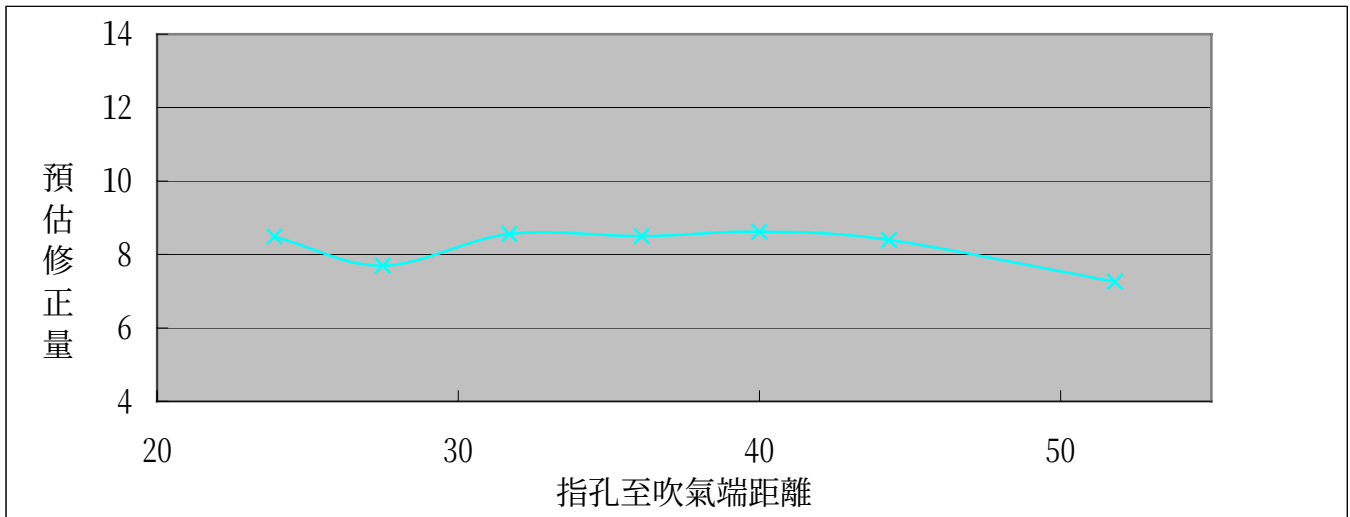


圖十八：預估修正量關係

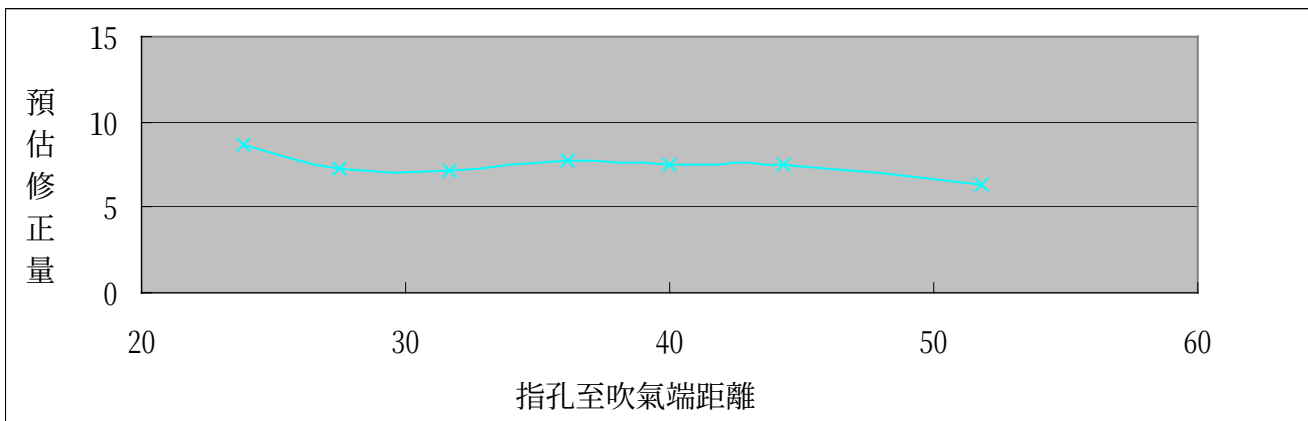
實驗結果討論：

由實驗測得數據，簫吹奏出的聲音頻率與所按指孔之關係，可推斷其中的空氣柱之駐波其波腹應出現在改用之指孔，但依此推斷而測量計算出之空氣柱長與理論值有相當之誤差，由反覆嘗試與計算，偶然發現每個聲音之理論空氣柱長與實際值均相差約固定值，且每個音階都一樣，但與前敘之“管口修正量”卻有相當之差異，故大膽假設 $\langle L_2-L_1 \rangle$ 為預估修正量。

經由實驗五數據分析可得指孔至吹氣端距離與預估修正量之關係圖(圖十九、圖二十)



圖十九：簫發出基音與指孔至吹氣端距離之關係圖



圖二十：簫發出第一泛音與指孔至吹氣端距離之關係圖

【實驗六】

由【實驗五】，知道管樂器發音的原理，想要運用在日常生活，於是找一支塑膠水管，製做一支與簫發音相同的模擬管樂器。

實驗步驟：

1. 取一支塑膠水管（口徑 2.0cm），截取原來簫的長度(57.5cm)。首先在吹氣端磨出 1 個小缺口，再用銼刀和砂紙將吹氣端磨成圓滑薄狀。
2. 計算出音調 D 的理論駐波長，再減去預估修正量的位置，挖洞，再用銼刀和砂紙磨成圓滑。
3. 依步驟二挖出音調 E. F#. G. A. B. *C#的音調 (全部完成後如圖二十一)
4. 再比較其發出頻率，與原先的頻率的差距。



圖二十一：模擬管樂器的圖

實驗結果討論：

室溫：28°C

聲速：347.8m/s

表十三：水管發出基音與指孔至吹氣端距離之關係表

指孔至吹氣端距離(cm)	音調	頻率(Hz)	差距(Hz)
51.8	D#-33.33	306.00	12.00
44.3	E+36.66	336.97	6.97
40.0	F#-20	366.2	8.60
36.1	G+33.33	399.99	10.14
31.7	A+20	445.4	12.60
27.5	B+20	499.40	5.40
23.9	*C#+26.66	564.53	18.13

由數據顯示，差距些微，表示其發音原理十分合理。礙於時間，無法去研究其他管樂器的發音原理，而且儀器並非十分精確，故存在了某些誤差。若有精密儀器，應可以做出更標準的管樂器。

伍、結論：

實驗發現，對量筒吹氣時的技巧類似吹奏管樂器。如：笛、簫……等，且如果吹氣強弱改變，有時可得到音調較高之泛音，此結果可以空氣柱共鳴柱理論： $f = \frac{(2n-1)v}{4l}$ ， $n=1、2、3……$ ， $n=1$ 時為基音，也就是正常吹氣所得的音調， $n=2$ 以上時頻率 f 較高，以調音器測其音高，發現亦為同一音調，只是不同的八度音，以此也可推論音階的每差八度音，其頻率加倍，兩個八度音則頻率變為四倍，以此類推。

綜合以上的研究與討論，我們得到以下結論：
藉由調音器分析不同聲音，進而驗證空氣柱的振動公式，並找出其誤差的原因與關係。可以得到下列結論：

1. 調音器所測得的音調經由換算可作相當精細的頻率測量，其精確度在低頻率時可達 0.1Hz。
2. 吹氣發聲是由於空氣振動，水柱越長，空氣柱相對變短，但頻率與水柱高低無直接影響。
3. 驗證空氣柱發聲振動公式（ $f = \frac{nv}{4l}$ ）也就是空氣柱長 $l \propto \frac{1}{f}$ ，並發現其誤差的成因(管口修正量)並修正。
4. 發現玻璃管的粗細對空氣柱發聲頻率也有些微影響，因為管口修正量與口徑有關，口徑越大，管口修正量越大，其誤差也越大。
5. 發現管口修正量 $\lambda = 4(l + c)$ 或 $f = \frac{v}{4(l + c)}$ 的計算，可解決管口的粗細對聲音頻率的影響，且也可加以解釋空氣柱之誤差。
6. 利用實驗四，找出了第一次共振點與第二次共振點的位置，並加以驗證管口修正量的數值。
7. 測量管樂器(簫)之發音頻率，並以前述理論公式，發現指孔位置與空氣柱長有一固定之誤差(管口修正量)，經修正後符合理論值。
8. 運用簫的發音原理，製做一支與簫發音相同的模擬管樂器。

本次研究結果讓我們感到新奇與滿意，若有更有充分的時間、人力與器材，還可以加強於管口修正量的深入探討，調音器接收頻率影響的修正，吹管材料的種類對發聲的影響以及對各種吹管樂器做進一步的研究，甚而若有更完整的實驗設備，可對其波形做進一步分析，相信可有更精確及更深入的研究與發展，此外如果能將實驗結果加以應用，相信對樂器的設計原理與演奏會有所幫助。

陸、參考文獻：

1. 林明瑞 1999 高級中學基礎物理 南一 臺南市
2. 廖大淵 編著 1999 新標準高中基礎物理 建興 臺北縣永和市
3. 黃 亮 編著 1999 細說高中基礎物理(全) 建興 臺北縣永和市
4. 楊樹基,楊啟輝 編著 1999 領航龍騰高中基礎物理(全) 龍騰 臺北縣五股鄉
5. 國立臺灣師範大學科學教育中心 主編 1995 高級中學物理 國立編譯館 臺北市
6. 國立臺灣師範大學科學教育中心 主編 1991 高級中學物理實驗手冊 國立編譯館臺北市
7. 黃立天 譯著(Sears, Zemansky, Young) 1989 大學物理學精要 2冊(University physics, 6th ed.) 曉園 台北市
8. 侯瑞琳 譯 (David Halliday, Robert Resnick 原著) 基本物理學 (Fundamentals of physics /Extended 3rd ed.) 1992 新陸 台北市
9. Adrian C. Melissinos, Frederick Lobkowicz 1975 Physics for scientists and engineers Saunders Philadelphia 國際標準號碼 0721662676 (v. 1)

