作品名稱：Amazing Fairy Chess --- 討論多元方形鏈的數量

高中組　數學科　第二名

縣市：台南市

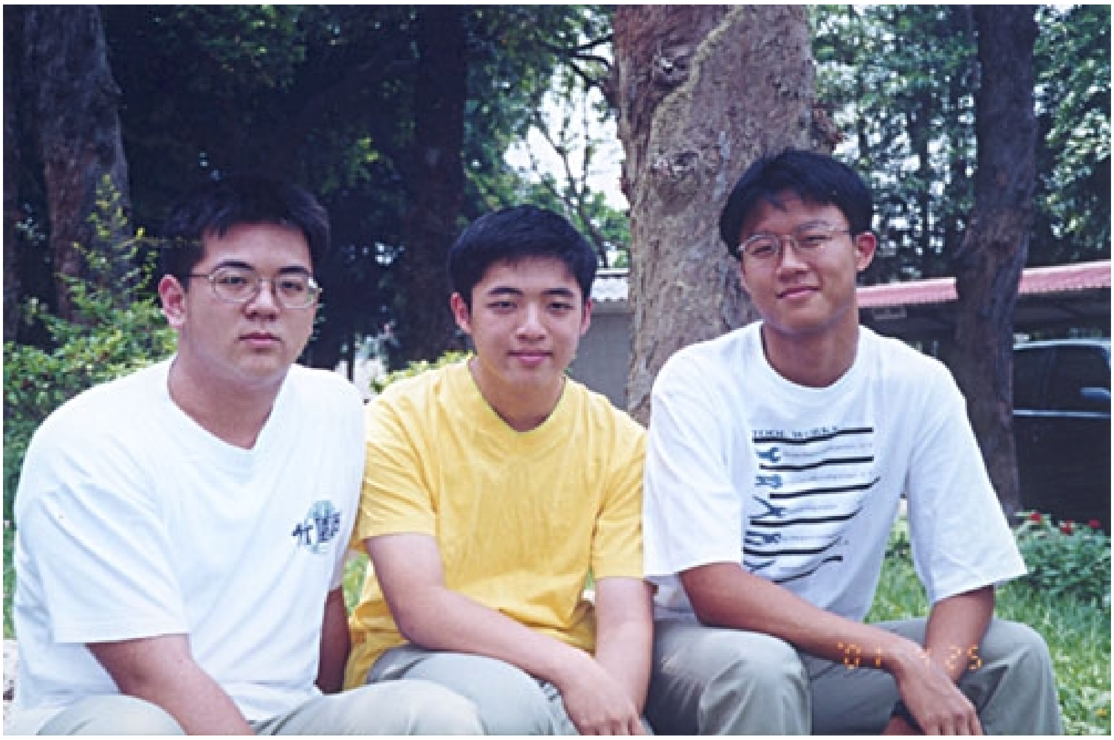
作者：　林逸侖、施文智

　　　　蔡昊澐

校名：台南第一高級中學

指導老師：　黃重嘉　老師

關鍵詞：Fairy Chess、多元方形鏈、多方塊、polyominoes



施文智　　　　林逸侖　　　　蔡昊澐

序、名詞注釋

A.方形鏈(Polyominoes)：

指在同一平面上，數個正方形以邊相接所結合的圖形，也被稱作多方塊。

B.天使棋(Fairy Chess)：

是方形鏈的俗稱，由於方形鏈的型態變化多端而得此名。

一、研究動機

在一九九九年的一次數學競賽中，有一道題目是：求作所有以六塊正方形連接成的圖形，共有幾種？（扣除鏡射、翻轉所形成的等價圖形）在看到這道題目的時候，突然回憶起曾經在某一本書上看到有關多方塊的概略介紹，於是在比賽過後便進一步找尋相關資料。但是查詢到的資料並不多，並且發現到似乎沒有計算其變化數量的方程式，書中介紹的大多是排列組合出的圖形，所以就想要好好地研究一番。

二、研究目的

(一) 利用程式算出ｎ元方形鏈變化型態的數量。

(二) 分析這些數據之間的相關性。

三、研究設備

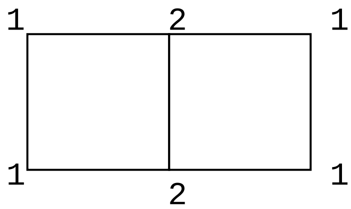
紙、筆、電腦、C 語言、Microsoft Excel。

四、研究過程

(一) 先將圖形以序組作相對應的表示。

以環狀方式把各端點所含括的方塊數排成序組。

範例如下，以二元方形鏈為例：

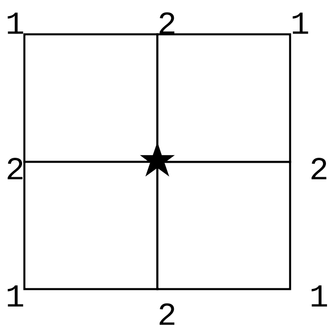


任意選取其中一個端點，再以順時針的方向把端點上的數字排成序組

0(1, 2, 1, 1, 2, 1)

其中，最前頭的 0 是代表有 0 組連接四個方塊的頂點數，並將該點命名為四角點。

又以四元方塊之正方形為例：



※註：“★”即爲四角點。

其序組即爲　1(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)

但是這種序組表示法並非一對一對應，而是屬於一個圖形對應至多組序組，所以如果要先求出序組的數量再推導至圖形數量，尙必須扣除珠狀排列的同價序組數目。而且用這種表示手法並不能含括“中空”的方形鏈。但是假使能夠創造出序組，再計算出非同價的序組個數，就能得到所求的答案。

（二）定義數值範圍。

定義：　n=單位方形的數量。
m=四角點的數量。
T=序組中元素個數。
S=序組中元素總和。

由於 n 是已知數值，僅需將 m,T,S 以 n 表示即可。

(其中，T 和 S 的值較易推算……)

<<T 值推導>>

考慮依序增加一個方形的情況，若與原圖形相接於一個邊時，會增加兩個新的端點(T 增加 2)；如果相接於兩個邊時，則不會增加新的端點(T 值不變)，但會創造一個四角點(m 值增加 1)。

再由起始值 T=4（單位方形）

於是得到　$T=4+2(n-1)-2m=2n-2m+2$

<<S 值推導>>

由於每一個方形會使 S 增加４（四個角落各佔１）而每一個四角點則會使四個頂點互相抵消，於是 S 會減少４。

很簡單就可以得到　$S=4n-4m$

(至於 m 值的範圍就比較不容易推算……分成兩個階段證明)

<<m 值推導>>

[step1 證明當方形鏈組合成大正方形時有最大的 m 值]

設 $n=k^2=g*h$　$g<k<h$ 且 g,h,k 皆屬於正整數

若排成 $k*k$ 之正方形時，$m=(k-1)^2=k^2-2k+1=n+1-2k$

若排成 $g*h$ 之長方形時，$m=(g-1)(h-1)=gh-g-h+1=n+1-g-h$

根據算幾不等式 $k=gh^{1/2}<(g+h)/2$

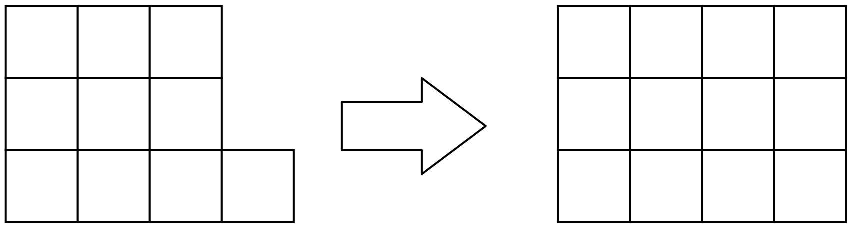
從而 $2k<g+h \Rightarrow (k-1)^2>(g-1)(h-1)$

所以當方形鏈組合成正方形時有最大的 m 值。

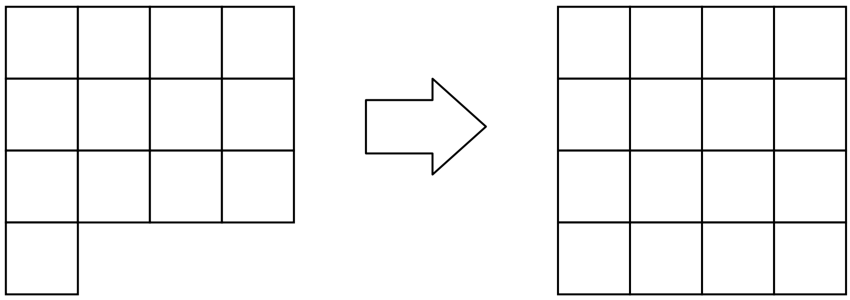
[step2 考慮 n 不爲完全平方數時]

而 n 不爲完全平方數時，先組合出最大的正方形後，再將其餘的單位元附加至原圖，自加入第二個後 m 值才逐次加 1，一直到原正方形某一側

排滿爲止（如下圖）。



而再從鄰邊繼續添加單位元；類似地，自加入第二個單位後m值才逐次加１，一直到再度形成一個新的大正方形（如下圖）。



[綜合 step1&2]

根據上述，可以推導出以下公式：

取 $k=[n^{1/2}]$　　[]代表高斯符號

(1)　　若　$n=k^2$

　　　則　$m_{max}=(k-1)^2=n-2k+1$

(2)　　若　$k^2<n<k^2+k+1$

　　　則　$m_{max}=(k-1)^2+(n-k^2)-1=n-2k$

(3)　　若　$(k+1)^2-k-1<n<(k+1)^2$

　　　則　$m_{max}=(k-1)^2+(n-k^2)-2=n-2k-1$

（三）　其他規則

根據序組表示的定義條件，得知每一個圖形至少對應至一組序組，但是任一個序組都可以轉換成圖形嗎？顯然隨意產生的一個序組並不一定能夠構成圖形，若能夠成圖形，則必須符合下述條件。

A.　在 $n>1$ 時，序組中不出現三個 1 相連或者三個 3 相連的情況：如果有三個 1 相連，繪圖得知第四個元素必爲 1，會形成一獨立方塊，此與假設 $n>1$ 不合；類似地，若有三個 3 相連，則第四個元素必爲 3，會形成中空的圖形，但是這超過討論範圍，所以也不予計算。

B.　將條件 A 加以擴大，將序組轉換成路徑，引入一個參數作爲判斷序組正確性的準則。除了合乎上述 T 和 S 值的限制外，尙需使整個路徑恰可以繞成一個迴圈。其構想是：假想在方形鏈的一個邊上，有一隻螞蟻沿著周圍爬行，依照遇到的端點不同（１、２、３）螞蟻改變牠行走的路線；換言之，螞蟻的座標在更動，由於會經過許多直角，所以採用複數來表示，方法如下。

令　序組：$m(A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n)$

參數：$<G_q>$　$q=0\sim n$

$G_0=0+0i$

1. 若　$A_{k+1}=1$　　　　則　$G_{k+1}=(G_k+1)*i+1$
2. 若　$A_{k+1}=2$　　　　則　$G_{k+1}=G_k+2$
3. 若　$A_{k+1}=3$　　　　則　$G_{k+1}=(G_k+1)*(-i)+1$

若 $G_n=0+0i=G_0$ 時，代表螞蟻恰好可以回到原點，也就是指這一組序組合乎所求。(而且若 $i\neq j \Leftrightarrow G_i\neq G_j$)

(四) 開始編排程式

我們接著就利用分析的步驟完成子程式後，再合併而執行之……

流程：創造序組

➔刪除不合規定的序組

➔合併重複的序組

➔統計序組數量

➔顯示在營幕上(printf)

(五) 執行程式

我們得到了前 12 組的數據，茲列在附錄一。

五、討論

(一) 若用這種序組表示法時，無法討論包含中空的圖形，應該再研究出一種方法可以兩者皆兼顧到。

(二) 程式執行速度不夠快，所能處理的記憶體也不夠大，應要再修改程式碼，儘可能除去不必要的過程。

(三) 可以考慮把序組改成三進位表示法，再轉換成十進位數字，也許可以有比較容易的做法。

(四) 將平面上的圖形研究後，理應可推導至三維甚至以上的空間。

六、結論

如果不使用電腦計算的話，我們尚未找出一道合適的公式直接解出變化種類數目，也許還有待進一步的研究、討論；但是已經可以計算出非中空多方塊變化的數量，仔細一想，也許可以把化學中碳鏈的鍵結和我們研究的數據合併討論，但是碳鏈的結構是呈現正四面體，也許變化數量反而沒有方形鏈多。

七、參考資料

A. 數學迷惘 Mathematical Puzzles & Diversions　復漢出版

B. POLYOMINOES　　the Math. Association of America

八、附錄

附錄一：程式執行的數值

方形數	圖形數
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	107
8	363
9	1248
10	4460
11	16094
12	58937

附錄二：執行結果範例(n=5)

```
--------------------------------DOS 環境--------------
5
   n=1 m=0 aaaa
   n=2 m=0 baabaa
   n=3 m=0 caababaa
   n=3 m=0 bbaabbaa
   n=4 m=0 cbaabbabaa
   n=4 m=0 cabaacabaa
   n=4 m=0 caacaabbaa
   n=4 m=0 bbbaabbbaa
   n=4 m=1 babababa
   n=5 m=0 ccaababbabaa
   n=5 m=0 cbbaabbbabaa
   n=5 m=0 cbabaacbabaa
   n=5 m=0 cbaacaacabaa
   n=5 m=0 cacaabacabaa
   n=5 m=0 cabbaabcabaa
   n=5 m=0 cbaabcaabbaa
   n=5 m=0 bcbaabbabbaa
   n=5 m=0 caacbaabbbaa
   n=5 m=0 bbbbaabbbbaa
   n=5 m=0 caacaacaacaa
   n=5 m=1 cabababbaa
total: 21
```

註：a 代表 1、b 代表 2、c 代表 3

total 是指 n=1 到 n=5 的所有圖形數

評語：

本作品由俄羅斯方塊遊戲及六方塊拼圖遊戲推算 n 方塊將圖形狀的數量，作者利用遞迴性質推算出結果，思考過程運用編碼方式處理圖形排列型態，進而借用電腦推算變化種類的數目，表達能力完整並具實用價值，是一份很好的作品。

作者簡介

『吃一頓美味的大餐，還比不上解決難題時的喜悅。』

我是林逸侖，目前就讀台南一中，高中二年級，生長在一個小而溫馨的家庭，從小，父母親就很重視我的教育，培養我對於各種科目的喜好，在所有科目之中，數學算是我頗有心得的一門吧！因此，我也陸續參加許多競賽。

這次的題目，也是從競賽試題與兒時記憶得到的靈感，當初只是有興趣想要加以研究罷了，並未料想到會得到這麼好的成績，真是又驚又喜。在這次研究過程中，也遇到了不少挫折與困難，還好我們都一一克服了，這次參展真是一次難忘的經驗，我還會繼續研究，補足這次不完美的地方。

最後，我要謝謝這次一起努力的夥伴和指導老師的配合，更要感謝父母親在這段期間給我的支持與鼓勵。

我是施文智，我原本對於數學就有蠻濃厚的興趣，當林逸侖同學告訴我他打算研究這題目時，馬上就使我有一股要解決它的想法，在思考的過程中曾碰到許多不易解決的死角，但是這並沒有降低了我們的興趣，反倒是更激起另一層要完成它的想法。

能有這般毅力可以說有一大部分都是在台南一中培養出來的。由於老師們提供的資源與幫助，使我們能從多方面下去思考，才能完成這次科展作品。

蔡昊澐，目前就讀台南一中二年級。從小我就對數理充滿極大興趣，喜歡讀些課外書籍，對日常生活中的種種現象更是觀察入微，盼能追根究柢，奠定了我對科學的喜愛和興趣。因此當林同學提出邀約時，我毫不猶豫地參加這次的研究，也從中得到了不少心得與經驗。一路走來除了感謝組員間一同努力合作，還要感謝老師的指導，我會持續努力的！