作品名稱：棋盤的費伯那契

高中組　數學科　第三名

縣市：彰化縣　　作者：梁益昌 林俊男 吳韋達

校名：國立彰化高中　　指導老師：張世標

關鍵詞：費伯那契數列（Fibonacci sequence）、比內公式（Binet Formula）、殘缺項

林俊男　　梁益昌　　吳韋達

壹・研究動機

在學校科研營的教材中，有一個題目，其內容相當於：「在一列格子中，放入黑棋與白棋。規定白棋不可連續放置，而黑棋不受此限，請問共有幾種可能的排列方式？」此題之答案，基本上就是鼎鼎大名的費伯那契數列(Fibonacci Sequence)，因此，我們用此規則，而把一列格子增加為 m 列 n 行，用來探討它的規律及關係。

貳・研究目的

(一).首先定義：在長方形棋盤中，每一格皆放入黑棋或白棋，規定白棋不可和白棋相鄰，而黑棋沒有限制。

例：

A	B
C	白

A：可放入白棋或黑棋
B、C：只可放入黑棋

(二).其次定義：我們用 F(m,n) 表示在 m 列 n 行的棋盤，遵照上述規定放入白棋與黑棋，所有可能的排法的總數。

(三).我們的目的：探討 F(m,n) 的性質。

參・研究設備與器材

紙、筆、計算機、個人電腦

肆．研究方法及過程

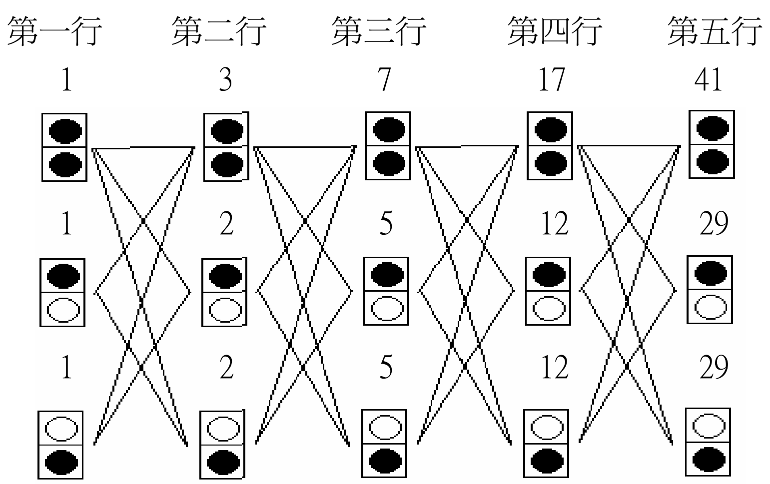
(一).F(m,n)的求法：

1.實際排列：

定義：顧名思義就是把每一種可能的排列組合一一列出，再清點所有個數.

2.導向排列：

定義：見圖一為導向法的樹狀結構圖，圖為二列 5 行可能的排列個數

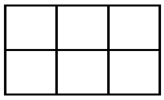


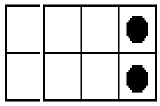
(圖一)

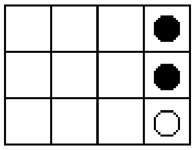
3. 導向排列符號化：

為方便計算，我們將棋盤符號化。

首先，我們將已放入黑棋的格子以 b 表示，而放入白棋的格子以 w 表示。

例： F() = F (2 , 3)

F() $= F\left(4, \begin{matrix} b \\ b \end{matrix}\right)$

F() $= F\left(4, \begin{matrix} b \\ b \\ w \end{matrix}\right)$

4. 程式計算：

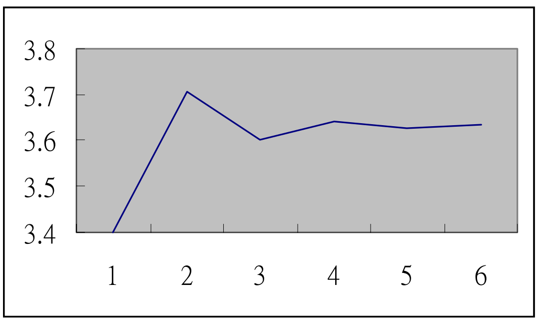
定義：延續第二、三點之邏輯，利用電腦進行其繁雜的運算

以下為利用電腦所計算之數據表(表一)

行\列	1	2	3	4	5	6	7	8
一	2	3	5	8	13	21	34	55
二	3	7	17	41	99	239	577	1393
三	5	17	63	227	827	2999	10897	39561
四	8	41	227	1234	6743	36787	200798	1095851
五	13	99	827	6743	55447	454385	3729091	30584687
六	21	239	2999	36787	454385	5598861	69050253	851302029

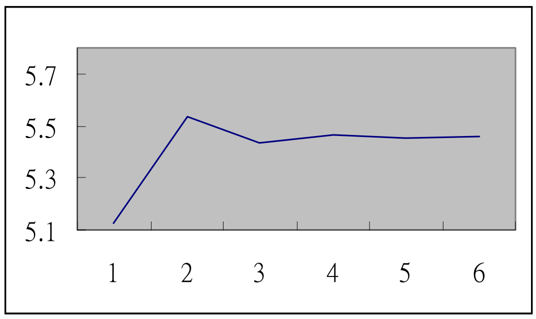
由數據觀察分析，可知 $\forall m \in N$, 當 $n \to \infty$ 時，$\dfrac{F(m,n)}{F(m,n-1)}$ 會趨近一個定值(如圖二、三、四、五)。

下圖為 F(3,n+1)/F(3,n)之圖形變化



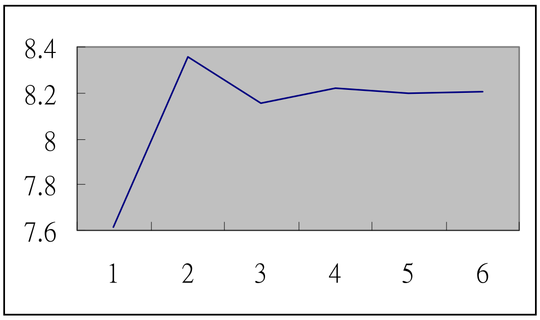
(圖二)

下圖為 F(4,n+1)/F(4,n)之圖形變化



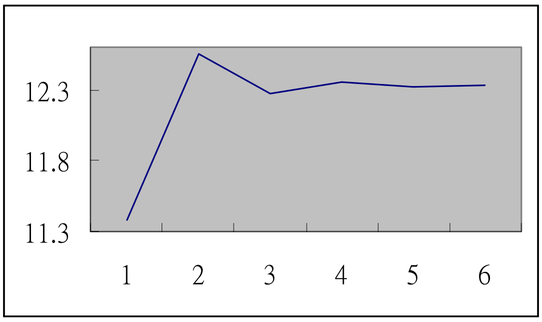
(圖三)

下圖爲 F(5,n+1)/F(5,n)之圖形變化



(圖四)

下圖爲 F(6,n+1)/F(6,n)之圖形變化



(圖五)

(二).F (m , n)的性質：

(甲) .一列性質之探討：

F (1 , n)即爲費伯那契數列，證明如下：

$$F(1,n)=F(\underbrace{\square\square\square\cdots\cdots\square}_{n\text{個}})$$

$$=F(\underbrace{\square\square\square\cdots\cdots\boxed{黑}}_{n\text{個}})+F(\underbrace{\square\square\square\cdots\cdots\boxed{黑}\boxed{白}}_{n\text{個}})$$

$$=F(\underbrace{\square\square\square\cdots\cdots\square}_{n-1\text{個}})+F(\underbrace{\square\square\square\cdots\cdots\square}_{n-2\text{個}})$$

所以， F (1 , n) = F (1 , n-1) + F(1 , n-2)

(乙) .二列性質之探討：

由表(一)直接觀察可猜測 2 列的遞迴公式爲:

$F(2,n)=2F(2,n-1)+F(2,n-2)\quad \forall n\geq 3$

證明：

$$F(2,n)=F(n,\begin{matrix}b\\b\end{matrix})+F(n,\begin{matrix}b\\w\end{matrix})+F(n,\begin{matrix}w\\b\end{matrix})$$

$$=F(2,n-1)+F(n,\begin{matrix}b\\w\end{matrix})+F(n,\begin{matrix}w\\b\end{matrix})$$

$$=F(2,n-1)+[F(n-1,\begin{matrix}b\\b\end{matrix})+F(n-1,\begin{matrix}w\\b\end{matrix})]$$

$$+[F(n-1,\begin{matrix}b\\b\end{matrix})+F(n-1,\begin{matrix}b\\w\end{matrix})]$$

$$=F(2,n-1)+F(n-1,\begin{matrix}b\\b\end{matrix})+[F(n-1,\begin{matrix}b\\b\end{matrix})$$

$$+\mathrm{F}\left(n\text{-}1,\ \begin{matrix} w \\ b \end{matrix}\right)+\mathrm{F}\left(n\text{-}1,\ \begin{matrix} b \\ w \end{matrix}\right)]$$

$$=\mathrm{F}(2,n\text{-}1)+\mathrm{F}(2,n\text{-}2)+\mathrm{F}(2,n\text{-}1)$$

$$=2\,\mathrm{F}(2,n\text{-}1)+\mathrm{F}(2,n\text{-}2)$$

仿效比內公式的求法，我們可得到二列公式

$$\mathrm{F}(2,n)=\frac{1}{2}\ [(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1\text{-}\sqrt{2})^{n+1}]$$

因此我們可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(2,n)}{F(2,n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}+(1-\sqrt{2})^{n}}=1+\sqrt{2}$

(丙).三列性質之探討：

原本我們打算利用二列遞迴公式的求法，實際演算後發現三列的遞迴公式並不如預期的那麼簡單，因爲有煩人的殘缺項（$\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-3,b \\ b \end{pmatrix}$、$\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-3,w \\ b \end{pmatrix}$、$\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-3,b \\ w \end{pmatrix}$、$\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-3,b \\ w \end{pmatrix}$）無法消去，因此在這裡卡了好一陣子，最後終於想到先利用 F(m,n)和殘缺項的關係，將殘缺項以 F(m,n)表示，然後再代回去他們的關係式中，即可輕易的求出三列的遞迴公式，詳細運算過程如下:

$$\mathrm{F}(3,n)=\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n,w \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n,b \\ w \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{F}(3,n-1)\ +\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n,w \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n,b \\ w \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{F}(3,n-1)+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,w \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}$$

$$+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-1,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,w \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,w \\ b \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{F}(3,n-1)+4\,\mathrm{F}(3,n-2)+2\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-1,b \\ b \end{pmatrix}+3\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,w \\ b \end{pmatrix}+2\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-1,b \\ w \end{pmatrix}+\mathrm{F}\begin{pmatrix} w \\ n-1,b \\ w \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{F}(3,n-1)+4\,\mathrm{F}(3,n-2)+2\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-2,b \\ b \end{pmatrix}+2\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-2,w \\ b \end{pmatrix}+2\,\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-2,b \\ w \end{pmatrix}+3\mathrm{F}\begin{pmatrix} b \\ n-2,b \\ b \end{pmatrix}$$

$$+3F\begin{pmatrix} & b \\ n-2, b & \\ & w \end{pmatrix} +3F\begin{pmatrix} & w \\ n-2, b & \\ & b \end{pmatrix} +3F\begin{pmatrix} & w \\ n-2, b & \\ & w \end{pmatrix} +2F\begin{pmatrix} & b \\ n-2, b & \\ & b \end{pmatrix} +2F\begin{pmatrix} & w \\ n-2, b & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$+2F\begin{pmatrix} & b \\ n-2, w & \\ & b \end{pmatrix} +F\begin{pmatrix} & b \\ n-2, b & \\ & b \end{pmatrix} +2F\begin{pmatrix} & b \\ n-2, w & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$= F(3, n-1) + 4F(3, n-2) + 8F(3, n-3) + 5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, w & \\ & b \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & w \end{pmatrix}$$

$$+5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & w \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & w \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & w \\ n-3, b & \\ & w \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$+5F\begin{pmatrix} & w \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, w & \\ & b \end{pmatrix} +3F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +3F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, w & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$= F(3, n-1) + 4F(3, n-2) + 8F(3, n-3) + 18F(3, n-4) + 10F\begin{pmatrix} & w \\ n-3, b & \\ & b \end{pmatrix} +13F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, w & \\ & b \end{pmatrix}$$

$$+10F\begin{pmatrix} & b \\ n-3, b & \\ & w \end{pmatrix} +5F\begin{pmatrix} & w \\ n-3, b & \\ & w \end{pmatrix}$$

$=$………………

令 $X=F\begin{pmatrix} & w \\ n, b & \\ & b \end{pmatrix}$, $Y=F\begin{pmatrix} & b \\ n, w & \\ & b \end{pmatrix}$ $Z=F\begin{pmatrix} & b \\ n, b & \\ & w \end{pmatrix}$ $W=F\begin{pmatrix} & w \\ n, b & \\ & w \end{pmatrix}$

則我們由上式可得

$X = Z$……………………………………………………………………… ...(1)

$X+Y+Z+W = F(3, n) - F(3, n-1)$ ……………………………………………………………..(2)

$2X+3Y+2Z+W = F(3, n+1) - F(3, n) - 4F(3, n-1)$ ……………………………………………..(3)

$5X+5Y+5Z+3W = F(3, n+2) - F(3, n+1) - 4F(3, n) - 8F(3, n-1)$ ……………………………..(4)

$10X+13Y+10Z+5W = F(3, n+3) - F(3, n+2) - 4F(3, n+1) - 8F(3, n) - 18F(3, n-1)$……. ……...(5)

先由 (1) (2) (3) (4) ，解出 X 、Y、 Z、 W，再代入 (5)

$$10X+13Y+10Z+5W = F(3, n+3) - F(3, n+2) - 4F(3, n+1) - 8F(3, n) - 18F(3, n-1)$$

即得三列的遞迴公式爲:

$$F(3, n) = 2F(3, n-1) + 6F(3, n-2) - F(3, n-4) \quad \forall n \geq 3,\ F(3,0)=1\ F(3,1)=5\ F(3,2)=17$$

接下來，我們一樣仿效比內公式，求出三列的公式。

$$F(3, n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n + C_4\alpha_4^n, \quad \forall n \geq 0 .$$

其中 $-1.568 < \alpha_1 < -1.567$, $-0.453 < \alpha_2 < -0.452$,

$0.388 < \alpha_3 < 0.389$, $3.631 < \alpha_4 < 3.632$,

而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(3,n)}{F(3,n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_4^n (c_4 + c_3(\frac{\alpha_3}{\alpha_4})^n + c_2(\frac{\alpha_2}{\alpha_4})^n + c_1(\frac{\alpha_1}{\alpha_4})^n)}{\alpha_4^{n-1} (c_4 + c_3(\frac{\alpha_3}{\alpha_4})^{n-1} + c_2(\frac{\alpha_2}{\alpha_4})^{n-1} + c_1(\frac{\alpha_1}{\alpha_4})^{n-1})} = \alpha_4$.

(丁).四列以上性質之探討：

利用類似的方法我們可探討 m ≥ 4 的情形。

例如，m = 4 時，我們有

$F(4,n)=4F(4,n-1)+9F(4,n-2)-5F(4,n-3)-4F(4,n-4)+F(4,n-5), \forall n \geq 5$,

而 $F(4,0) =1$, $F(4,1) = 8$, $F(4,2) = 41$, $F(4,3) = 227$, $F(4,4) = 1234$.

同時我們可求得四列的比內型公式如下：

$$F(4,n)=d_1\beta_1^n + d_2\beta_2^n + d_3\beta_3^n + d_4\beta_4^n + d_5\beta_5^n .$$

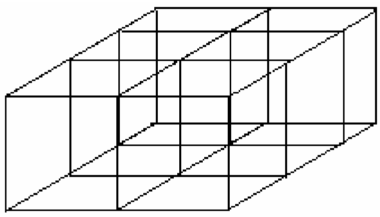
其中 $-1.79087<\beta_1<-1.79086$,$-0.63176<\beta_2<0.63175$,

$0.21634<\beta_3<0.21635$,$74856<\beta_4<0.74857$,$5.45770<\beta_5<5.45771$.

(三). F (m , n ,k) 的性質：

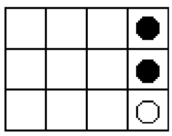
現在我們想將平面的棋盤推廣為空間中的棋盤。首先，我們想像一個長方體棋盤，其長、寬、高分別為 k、 m、 n 單位，因此總共有 m×n×k 個格子。那麼在我們限制的放法 (任何兩個放入白球的格子不可有任何一面相鄰) 之下，共有幾種放法呢？

例: 圖六為 F(2,1,3) 的立體圖。

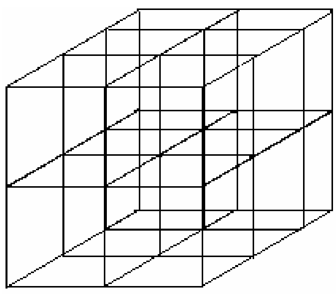


(圖六)

我們延續平面上三列遞迴公式的求法及符號，發展成空間中的求法與類似型式的符號。

在三列符號中， F() = $F(4, \begin{matrix} b \\ b \\ w \end{matrix})$,

類似地，在空間符號中，

F() = F (2 ,2 , 3) = $F(4, \begin{matrix} bb \\ bb \end{matrix})$.

我們延續平面上求三列遞迴公式的方法來討論空間中的遞迴公式。

例如：$F(2,2,k) = 5F(2,2,k-1) + F(2,2,k-2) - F(2,2,k-3)$.

(四) F (m , n) 的大小順序：

我們將不同的棋盤所對應的方法數加以比較。

首先，我們發現，當 $m\geq 2, n\geq 2$ 時，利用下圖所示的轉換方式可將 m 列 n 行棋盤上的合法排列轉換成一列 $m\times n$ 行棋盤上的合法排列。

(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	…………..	(1 , n)
(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	…………..	(2 , n)
(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	…………..	(3 , n)
(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	…………..	(4 , n)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(m , 1)	(m , 2)	(m , 3)	…………..	(m , n)

(1,1)	…	(1,n)	(2,n)	(2,n-1)	…	(2,1)	(3,1)	…	(3,n)	…	(m,k)

(當 m 是偶數時,k=1;當 n 是奇數時,k=n)

而且顯然 A 上所作不同的合法排列所轉換成的一列 mn 行上的排列是不同的，所以 $F(m,n) \leq F(1,mn)$

一般而言，任給兩個棋盤 A 和 B,我們如何比較 F(A)和 F(B)之大小呢?這是我們目前很感興趣,極力想探討的問題。

伍・結論

(1)各列的遞迴公式為

<a> $F(1,0)=1, F(1,1)=2, F(1,n) = F(1, n-1) + F(1, n-2)$, $\forall n\geq 2$.

<b> $F(2,0)=1, F(2,1)=3$, $F(2,n) = 2F(2,n-1)+F(2,n-2)$, $\forall n\geq 2$.

<c> $F(3,0)=1, F(3,1)=5, F(3,2)=17, F(3,n) = 2F(3,n-1) + 6F(3,n-2) - F(3,n-4)$, $\forall n\geq 3$.

<d> $F(4,0)=1$, $F(4,1)=8$, $F(4,2)=41$, $F(4,3)=227$, $F(4,4)=1234$,

$F(4,n)=4F(4,n-1)+9F(4,n-2)-5F(4,n-3)-4F(4,n-4)+F(4,n-5)$, $\forall n\geq 5$.

<e> $F(2,2,0)=1$, $F(2,2,1)=7$, $F(2,2,2)=35$, $F(2,2,3)=181$,

$F(2,2,k) = 5F(2,2,k-1) + F(2,2,k-2) - F(2,2,k-3)$, $\forall k\geq 3$.

(2)我們已知道 , $\forall n\geq 0$,

$$F(1,n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+2)} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+2)}\right],$$

F(2,n)=$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$,

F(3,n)= $C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n + C_4\alpha_4^n$,

F(4,n)= $d_1\beta_1^n + d_2\beta_2^n + d_3\beta_3^n + d_4\beta_4^n + d_5\beta_5^n$.

(3)若 $m\geq 2,n\geq 2$ 則 F(m,n)<F(1,m×n)

陸・討論

(1)我們用來求三列遞迴公式的方法，其實適用範圍很廣。例如，將規則改成：「不但有一邊相鄰的格子不可放白棋，而且有共同頂點的格子也不可都放入白棋。」那麼，在新的規定下，怎麼求 F(m,n)呢？顯然 F(m,n)之求法，還是可以用我們發展出來的方法來求得。

(2)我們希望藉由 2 列、3 列……等公式的變化，而得到一個統一的公式。只要給定列數 m，由這統一的公式，我們馬上可以寫出 F(m,n) 的遞迴公式、求極限的方程式以及比內型公式等等。

(3)由數據顯示 $\frac{F(m,n)}{F(m,n-1)}$ 成波浪型上下起伏的變化，而終於趨近一個定值。爲什麼會上下起伏呢？當 m=2 時，令$\alpha=2a=1+\sqrt{2},\beta=2b=1-\sqrt{2}$ ，則 F(2,n)=$a\alpha^n+b\beta^n$ 。

因爲$\frac{F(2,n)}{F(2,n-1)}-\frac{F(2,n+1)}{F(2,n)}=\frac{F(2,n)^2-F(2,n-1)\cdot F(2,n+1)}{F(2,n-1)\cdot F(2,n)}$，所以經計算後，上式的分子

$=-ab(\alpha-\beta)^2(\alpha\beta)^{n-1}=2(\alpha\beta)^{n-1}=2(-1)^{n-1}$

由此式可得當 n 爲偶數時，$\frac{F(2,n)}{F(2,n-1)}<\frac{F(2,n+1)}{F(2,n)}$，而當 n 爲奇數時，$\frac{F(2,n)}{F(2,n-1)}>\frac{F(2,n+1)}{F(2,n)}$ 這就是關鍵所在。

(4)當 $m\geq 2$ 時，我們也想探討 F(m,n)是否有其它許多類似於費伯那契數列的有趣性質。

柒・參考資料

斐波那契數列(九章出版社)

評語：

棋盤的費伯那契爲一將古典費伯那契數列推廣至多層數列。其研究方法爲一 backward induction 的有趣應用。作者利用此一概念去得到其與費伯那契數列的關係，並試著推廣到三維空間。其論證過程完整，態度熱忱認真。爲一優異作品。

作者簡介

梁益昌

出生於彰化縣福興鄉，現就讀彰化高中二年級，興趣是下棋、算數學、看課外讀物，參加攝影社，個性活潑開朗，人際關係良好，平常會利用課餘時間思考數學，遇到似乎較困難的數學問題時，會自己先想過，如果還是不會，再問老師。

林俊男

出生於彰化縣花壇鄉，現讀國立彰化高中二年級，喜好觀察及思考周遭事物，常利用課餘時間和師長及同學討論數學問題，而對於課內的數學問題喜歡靠自己探索及思考來獲得解決，假日喜歡和一群朋友聚會、聊天。

吳韋達

彰中二年級學生,現任電研社的社長。個性開朗,在同儕間,我的人際關係還算不賴。至於這次做科展的過程,是充滿了辛酸,數度陷於瓶頸中苦無進展,幸好我們沒放棄,因爲我們堅信,成功永遠屬於堅持到最後一秒的人.