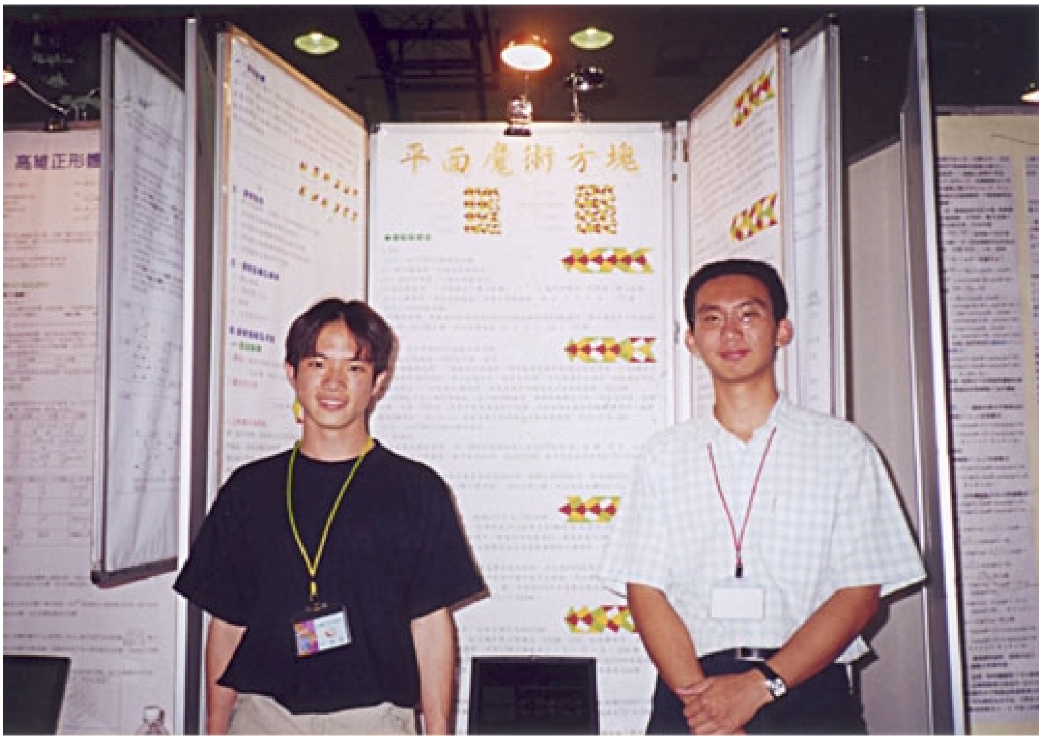
作品名稱：平面魔術方塊

高中組　數學科　第一名

縣市：屏東縣　　　　　　　　　　作者：　邱中鎮、鄒志隆

校名：屏東中學　　　　　　　　　指導教師：　張淑娟、吳勝雄

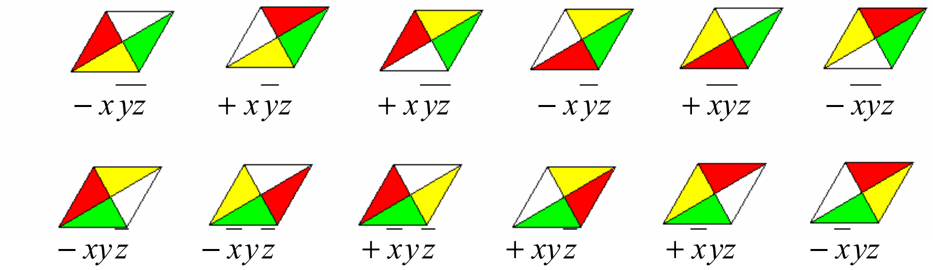
關鍵詞：排列組合



一、研究動機

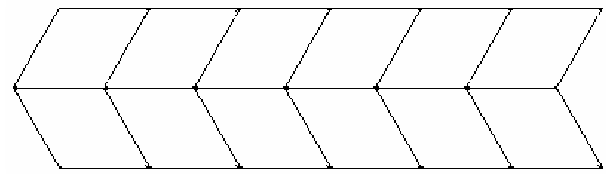
在一次研討會中，劉江楓教授介紹了數種在加拿大訓練資優生的數學玩具，其中一種玩具引起了我們研究的興趣，它是從魔術方塊及中國的七巧板演變而來，是由十二塊菱形（如圖一）所組成，去排成數種不同的圖形，但排

(圖一)



的原則是“相鄰必須同色”，我們即以其中一種圖形（如圖二），展開一連串的探索過程。

(圖二)



二、研究目的

1. 探討此圖形之所有類型的存在性。
2. 分別探討每種類型圖形的特性、排法策略及所有排法數。
3. 以電腦程式驗證研究結果

三、研究設備及器材

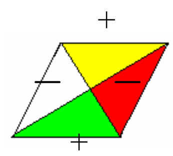
1. 個人電腦　　2. DELPHI 5.0　　3. 紙筆　　4. 自製數學模型

四、研究過程及方法

(一)名詞解釋

我們必須將一些製作過程中有提到的名詞加以解釋及定義：

(1) 符號、顏色與方塊的值：

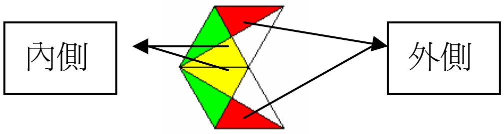


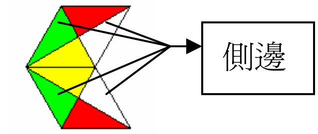
橫軸爲正，縱軸爲負 x：黃色　y：綠色　z：紅色

在水平軸上的可以判定爲”負的”，同理在鉛直軸上的就是

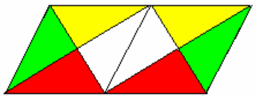
”正的”。在圖三中，在水平軸上的是紅色也就是 z,故我們可以說紅色的就是 。 而黃色及綠色是在鉛直軸上,故我們就可說黃色爲 x,綠色爲 y

(2) 圖形的分區

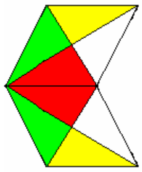




(3) 正對稱及負對稱：



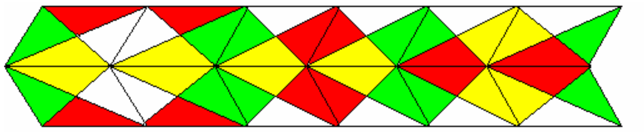
(圖一)



(圖二)

圖一爲正對稱，是兩個 xyz 正負質相同的方塊相接成，且兩方塊正負相異
圖二爲正對稱，是兩個 xyz 正負質相異的方塊相接成，且兩方塊正負相同

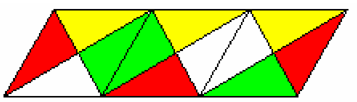
(4) 非對稱與對稱性：對稱型指的就是像這個上下互爲負對稱的圖形。不具有此特性的就稱做非對稱型。



(5) 多連形區塊：

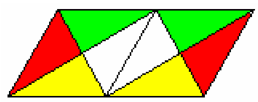
1.獨立區塊(Independent Zone)(簡稱 IZ)：

3IZ



爲三個方塊相連頭尾同色的區塊

2IZ



爲二個方塊相連頭尾同色的區塊

2.非獨立區塊

兩個方塊以上相連，但不具有獨立區塊性質的都算此類，這類情形非常的多，但是會到討論的只有 3 連型

(二)解題策略

1.以代數的方法(符號的值)配合幾何的方法(圖形的對稱)來做探討。

2.在研究過程中，原則上是根據內側的顏色來做一討論。 而由於全部顏色共有四種，在我們的研究過程中已在內側最多的顏色看做 A，而第二多的看做 B，第三的看做 C，第四的就爲 D。所以我們將就內側不同的情形分做以下幾種來探討:

(1) 6A (2) 5A1B (3) 4A2B (4) 4A1B1C (5) 3A3B (6) 3A2B1C (7) 3A1B1C1D (8) 2A2B2C (9) 2A2B1C1D 共以上九種排法。

3. 以 2 IZ 及 3 IZ 爲核心，根據其圖形特性恰可將所有類型分爲二類。

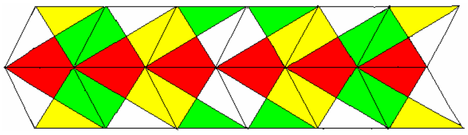
4.我們先從對稱型下手，而對稱型上述的那 8 類依排法邏輯所採用的策略可分成

① 2 IZ 與 3IZ 並行 → 6A、4A2B、4A1B1C、2A2B2C

② 3 IZ → 3A3B、3A1B1C1D、2A2B1C1D、3A2B1C

◆邏輯與排法

1. 6A



[策略一]以 2IZ 和正對稱爲主軸

以一個方塊爲首，可排出的情形有

(1)一組 IZ 之後接「一組正對稱夾 IZ」 (2)爲正對稱夾「一正對稱夾一獨立區塊」

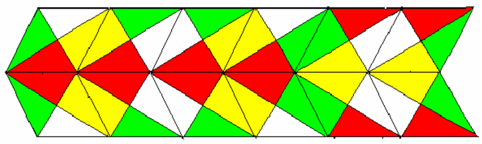
(3)爲正對稱夾一 IZ 再接一獨立區塊

以上三種情形，因有四種顏色，再乘上無限循環，共 3 × 4 × 6 = 72 種

[策略二]以 3IZ 爲主軸

在對稱型裡面，要排出 6A 必須爲兩 3A 型且 3A 顏色相同的 3IZ 相接而一個方塊爲首可排出 2 個 3A 型 3IZ，有 12 個方塊，所以可算出共 2 × 3 × 12 = 72 個

2. 4A2B



[策略一]以正對稱和 2IZ 爲排法的主軸

(1) 一組正對稱夾一組 IZ 再外接一組 IZ 當此正對稱固定時，一個被夾的區塊和一個外接的區塊會有 4 個不同的情形。但是 4 種其中的一種會形成 2A2B2C，所以必須扣除。故總共有 3 種，而正對稱中爲頭的一組區塊在固定側邊的情況下，內側會有 3 種情形，最後再乘上四個顏色以及無限循環，共 216 種。

(2)4A2B 也可由三個 IZ 來組成。當三組 IZ 相連時，會將四個顏色中的一個顏色用盡。在排列時，先將一 IZ 固定，其後可接區塊還剩下兩個。而此兩個區塊接回後有 2 種情形，翻轉後有 6 種情形，共 2×6=12。最後再乘上四個顏色以及無限循環，即 12×4×6=288。

[策略二]以 3IZ 和 2IZ 爲主軸作探討

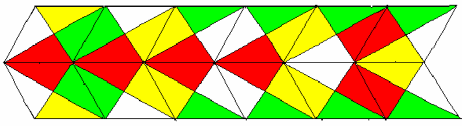
(1) 改變 6A

利用成對改變的特性，同一個 6A 可改變的地方有兩 3IZ 的頭-尾、尾-頭、中-中。這些地方做了成對性的改變後，都可排出 4A2B。而 6A 有 72 個，故可算出此情形有 3×72=216 種

(2) 三組 2IZ 連成。

只要將 6A 其中一排的 6 個方塊重新排出 3 組 2IZ，再將這些 2IZ 排列。因爲 3 個 2IZ 可重新排列出 4 種圖形(原圖形再加上 3 種位置調換)，而 6A 共有 72 種，故可得出此類有 4×72=288 種

3. 4A1B1C



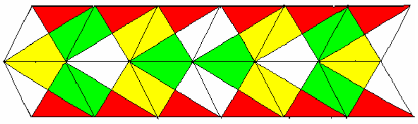
[策略一]以 2IZ 爲主軸

因爲其中有 4A，故當排列時，選擇 6A 中不是 2IZ 的相鄰區塊，經由負交替形成 1B1C。但要形成 1B1C 的總共有 4 種區塊(就是非 IZ 的區塊)，而每一種區塊會有四種變化。扣除因其中一種變化會回復成 6A，最後便剩下 3 種變化，乘上 4 種區塊有 12 種變化，再乘上四種顏色以及無限循環的六種情形，共 288 種。

[策略二]以 3IZ 爲主軸

要從 6A 推出 4A1B1C，也可利用改變成雙出現的特性，而之前 4A2B 是改變 6A 的 3IZ 接口，所以試著改變 3IZ。但要改變 3IZ 內部的兩方塊不能用互換的，所以考慮使用先前所說的負交替法。而最後的確可變出一 4A1B1C，進一步推因 3IZ 可作這種交替的地方有兩處，且一個 6A 有兩個 3IZ、總數爲 72，所以共有 72×4=288 種。

4. 2A2B2C



[策略一]以 2IZ 爲主

(1) 先選定一個方塊，可排出「以此方塊形成的 2IZ 接『一組正對稱夾 2IZ』」和「此方塊和其正對稱夾一 2IZ 接一 2IZ」這兩種情形。且一方塊翻轉後仍可同樣排出另兩個圖形，而有 12 個方塊故共 2×2×12×6=288 種

(2)固定一組 2IZ(做爲 2A)爲首後，其後可接之情形共有 2 種，但被固定的 2IZ 所形成的 2A 也會有 2 種情形，故總共會有 4 種。最後所有的情形是乘上 4 個顏色以及無限循環共 96 種。

[策略二]以 6A 和 3IZ 爲主軸

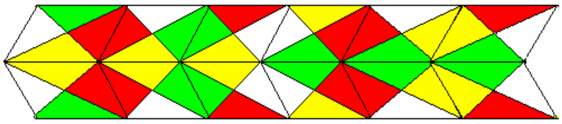
(1) 具 3IZ 型

所有 2A2B2C 皆可用 6A 的外側排出。利用成對改變的特性，一個 6A 可變出四個 2A2B2C(只翻轉 1 和 1'、 只翻轉 2 和 2'、只翻轉 3 和 3'、全翻轉)所以可算出 3IZ 型 2A2B2C 共有 72×4=288 種

(2) 2IZ 群

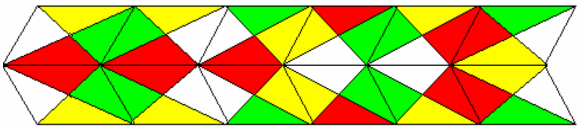
將 6A 其中一排的 6 個方塊重新排出 3 組 2IZ，在將這三個 2IZ 原來在 6A 的內側分成「移至外側、移至側邊、保持在內側」，重新排出的圖形及是。而 2A2B2C 不像 6A 可作 3IZ 的循環，但是可像 4A2B 裡提的一樣作四種排列，所以共 96 種。

5. 3A3B



先固定 6A 的一個 3IZ，然後改變另一邊的 3IZ，使兩 3IZ 頭尾相接處不產生 2IZ。因爲是要改變一組 3IZ，必須從對稱的另一 3IZ 取得可以使用的方塊，所以不能只看一排，要兩排同時討論。這個新的 3IZ 必須顧慮到頭尾的符號，而如果一 3IZ 的頭尾爲 z，則中間方塊的「z」必爲，相對的其對稱 3IZ 必爲一個 z 和兩個，也就是說要從另外一側取得可以當做新 3IZ 的方塊只有一個。而這個方塊可以分別置於頭尾，排出兩種 3IZ。而因一個 6A 圖形做 3IZ 的變換如前所述有兩種，而 6A 共有 72 個，所以可算出共有 2 × 72 = 144 個

6. 3A2B1C

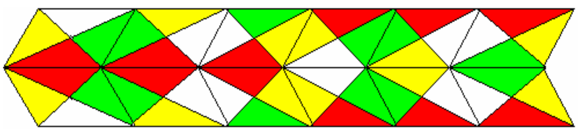


經過手動排列後，發現所有具 3IZ 的 6A、4A2B、2A2B2C 皆可以利用上述的推測變換出 3A2B1C。而這三個圖形具有 3IZ 的共有 72+216+288=576 種

實際操作起來，我們確定在 6A、4A2B 和 2A2B2C 裡具有 3IZ 的圖形，可以像 6A 變出 4A1B1C 一樣，用負交替排出新的 3IZ，而得到一個 3A2B1C。

而這三個圖形具有 3IZ 的共有 72+216+288=576 種

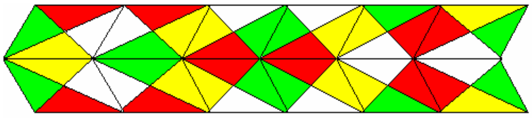
7. 3A1B1C1D



排此圖形最容易的方法是將 6A、4A2B、2A2B2C 圖形裡的一個 2IZ 分開而成兩 3IZ，將其中一個 3IZ 翻轉，在接回去，即可排出 3A1B1C1D。只有那三個圖形可以的原因是因爲必須符合具有 6A 的「互相對稱特性」，而具有這種特性的也

只有這三個。而因 4A2B 具 3IZ 的都是從 6A 利用對稱性改變得出來的，並沒有破壞 3IZ，故凡是 4A2B 能夠排出來的圖形全都可由 6A 排出。而所有 2A2B2C 具 3IZ 的皆可用此法排出 3A1B1C1D 來，在除以 3IZ 調換的重複圖形，由 2A2B2C 排出的共有 144 種，在加上 6A 的 72，共有 196 種。

8. 2A2B1C1D



經過我們多次的驗證後，除了 6A 以外所有具 3IZ 的圖形都可以排出 2A2B1C1D，但 2IZ 中以 3A2B1C 爲代表(別忘了先前探討 3A2B1C 時就發現它匯集了前面 3 類具 3IZ 的所有圖形)，只要將同是 3A 且在同一 3IZ 的兩方塊作負教替即可排出。而非 3IZ 型又因所有 3A3B 皆可藉破壞 3IZ 而排出爲代表。

所以可算出 2A2B1C1D 共有 576 (3A2B1C) ＋ 144(3A3B) = 760

五、研究結果

1. 邏輯與排法歸納如下：

6A	(1)選定所有具相同正負的符號的方塊，以此符號爲內側作排列 (2)選出兩個 A 相同的 3A 型 3IZ 相接
4A2B	(1)利用 6A 的成對性的改變排出具 3IZ 的類型 (2)利用 6A 同側排成的 2IZ 群排列由 2IZ 群構成的類型
4A1B1C	(1)將 6A 非 2IZ 型 2 連區塊做負交替 (2)利用改變成對出現的特性改變 6A 的 3IZ 排成
2A2B2C	(1)利用翻轉 6A 內側至外側排出具 3IZ 的類型 (2)改變 6A 同側的 2IZ 群，將內側分別做「移至外側、移至內側、保持在內側」這三項轉變，在排列後即可得出 2IZ 群構成的類型
3A3B	固定 6A 的一 3IZ，然後將另一 3IZ 做改變，即將它對稱 3IZ 的中間方塊移至其頭或尾重新排出一新 3IZ，然後在與固定的 3IZ 相接。
3A2B1C	利用改變成對出現的特性，以 6A、4A2B、2A2B2C 具 3IZ 的圖形，

	固定一 3IZ，負交替改變另一 3IZ，除新組合而成。此三種圖形都可排出 3A2B1C。
3A1B1C1D	將 6A、4A2B、2A2B2C 固定其中一個 3IZ，然後翻轉另一個 3IZ，在重新接上以後就可排出
2A2B1C1D	除了 6A 以外都可以利用破壞成對出現和負教替法改變原有的圖形。 但以 3A2B1C 爲代表,只要將同是 3A 且在同一 3IZ 的兩方塊作負教替即可排出 2IZ 型。 以 3A3B 爲代表，利用破壞 3IZ 的方法排出非 2IZ 型。
完全非對稱	主要可參考樹狀圖結構

2.非對稱的總結

用 2A1B 型 3IZ 推出的所有情形再加上 3A 型的補充做總結如下表：

種　　類	數　　量	備　　註
6A	0	對稱型的變化有 1224 個
4A2B	288	對稱型的變化有 216
4A1B1C	0	對稱型的變化有 288 個
2A2B2C	720	對稱型的變化有 216 個
3A3B	0	對稱型的變化有 144
3A1B1C1D	288	無對稱型的變化，在完全非對稱時含有 2IZ
3A2B1C	1008	無對稱型的變化
2A2B1C1D	864	對稱型的變化有 720 個

3. 八大類綜合結果如下表：

	特性	類型	排列數 (對稱型)	排列數 (非對稱型)
6A	正負相同的方塊在同一側	一正對稱夾一 2IZ	72	1224
4A2B	多爲三 2IZ 相接成	(1) 一正對稱夾一 2IZ (2)三個 2IZ 相接	504	360
4A1B1C	唯一必有 3IZ 的 2IZ 系統	僅具一 2IZ 而無其他 2IZ	288	288

		和正對稱的存在		
2A2B2C	多爲一正對稱夾一 2IZ	(1) 一正對稱夾一 2IZ (2)三個 2IZ 相接	384	384
3A3B	正負相同的方塊在同一側	兩 3A 型 3IZ 相接成	144	144
3A2B1C	唯一必有 2IZ 的 3IZ 系統	**(1)** 3A、2B1C **(2)** 2A1B、1A1B1C	576	576
3A1B1C1D	3IZ 無法獨自循環	(1) 3A、1B1C1D (2) 2A1B、1A1C1D	192	288
2A2B1C1D	唯一不受2IZ存在影響的3IZ系統	(1)2A1B、1B1C1D (2)2A1C、2B1D	720	936
Total			2880	4200

有關八大類的邏輯與排法及其他詳細過程請參見研究過程及方法

2.非無限循環共 2560 種

(1) 接在 3IZ 之後的共有 256 種　　　　(2)接在散亂三連方塊的共有 2304 種

總結：此圖案共有 2880 + 4200 + 2560 = 9640 種

六、未來研究方向

1. 本研究僅針對一種圖形作探討，未來可推廣至其他圖形，並探究各種結構圖形的存在性。
2. 可將平面圖形推廣至立體圖形，並用電腦程式加以驗證。

七、參考書目

1. 趣味的圖論問題，單墫，凡異出版社
2. 基礎數學第四冊，國立編譯館
3. PASCAL 程式設計：演算法與資料結構，蔡昌師、楊慕郁，全華科技圖書股份有限公司
4. DELPHI5 實用秘笈篇，陳世明，碁峰資訊股份有限公司

評語：

平面魔術方塊爲一有趣且深入的作品。作者利用坐標的概念，對不同菱形的圖色，做了代數的表示，並利用此一概念將圖形做系統性的分類。作者對問題的重要性及方法的可行性都能確切的控制與深刻的了解。表達能力完整與思考清析。爲一件相當優異的作品。

作者簡介

邱中鎮

我平時喜歡看些有的沒有的書籍，或是思考一些奇奇怪怪的問題。除了喜歡數學的奧妙，更沉溺於電腦程式所帶來的樂趣。沒事時除了運動和上網外，也喜歡和班上的人討論一些奇怪的數學問題。

鄒志隆

平時的興趣是打球、上網和看書。我覺得一個人若不吸收新知，就沒有生活的意義了。我也常常思考一些具啓發性的問題。不只對於數學，我對於物理及化學的一些現象也非常有興趣。而且常常會跟同學討論這類的問題。