作品名稱：費馬點的研究與應用

國中組　數學科　第三名

縣市：高雄市　　作者：　蕭敦仁

校名：高雄市五福國民中學　　指導老師：　余尚芸，張榮富

關鍵詞：費馬點

費馬點的研究與應用

一、 研究動機

未來 21 世紀高雄將跟上首都臺北的腳步---興建捷運系統，將海都高雄完全發展成最先進的都會區。高雄捷運跟台北不一樣，採地下化建築，其中紅線與橘線基本路網已經規劃好，聽爸爸說，不管是哪一路線都需建捷運主機廠，主機廠對於捷運相當於心臟對於人類，於是便想：是否能找到一個位置到各捷運站的的距離和為最小，以方便控制？

又從文獻上得知在三角形中有一點到三頂點距離和為最小，稱為「費馬點」，於是即以此為出發點，對費馬點的性質來進行一系列的探討與研究。

二、 研究目的

（一）以數學方法證明費馬點的存在及其特性。
（二）運用物理學方法探討費馬點之相關理論。
（三）求作直角座標系中的費馬點驗證物理實驗結果。
（四）探討費馬點在生活中的應用實例。

三、 研究設備器材

滑輪、木條、棉線、黏土塊、方格紙、量角器、直流電源供應器、自製電路板、一對三 IC 夾。

四、 研究過程

(一) 以數學方法證明費馬點的存在及其特性：

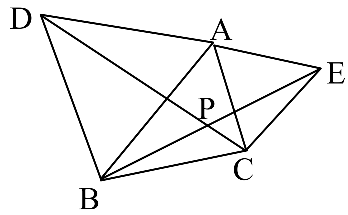
Ⅰ.其實在之前就有一些有名的數學家提出相關的作 法及證明，我把文獻上找到的一一列於附件說明，另外我也試著做做看是否有其他的方式可以求出費馬點：

1.費馬點之求法（參考圖一）。

(1) 做一三內角均小於 120° 之 △ABC。

(2) 以 $\overline{AB}$ ，$\overline{AC}$ 為一邊，分別向外側做正三角形△ABD 與△ACE。

(3) 連接 $\overline{DC}$ ，$\overline{BC}$ 交於 P 點，則 P 點即為所求。



圖一

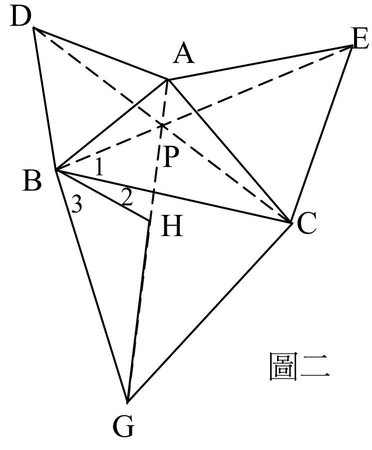
2.費馬點的性質：L= $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ 為最小值。

～首先證明由上述作法做的費馬點存在-----

ㄅ.（參考圖二）旋轉△BPC，
使 $\overline{BG}$ 與 $\overline{BC}$ 重合（ $\overline{BG}=\overline{BC}$ ），
P 點落在 H 處
則∠BPC=∠BHG=120 °

ㄆ.又∠BHP=60 °（證明在ㄇ）
∴∠BHG+∠BHP=180°
故 A，P，H，G 三點共線

ㄇ.∵△BHG≅△BPC



圖二

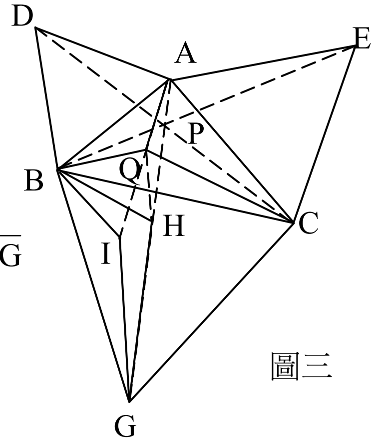
得 $\overline{HG}=\overline{PC}$ ， $\overline{BP}=\overline{BH}$

∵∠2+∠3=60゜且∠1=∠3

∴∠1+∠2=60゜=∠PBH

因此△BPH 為正△，得 $\overline{BP}=\overline{PH}$

知存在一點 P 使得 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PH}+\overline{HG}=\overline{AG}$



圖三

～再來證明所求出的點至三頂點距離最小

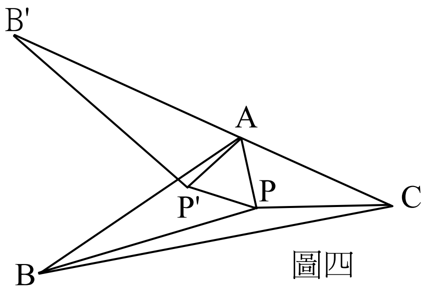
ㄅ.（參考圖三）在 ABC 內另取一點 Q 異於 P，
連接 $\overline{QA}$ 、 $\overline{QB}$ 、 $\overline{QC}$

ㄆ.參考步驟（1）之證法同理可證得 $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{QA}+\overline{QI}+\overline{IG}$

ㄇ. $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{QA}+\overline{QI}+\overline{IG}\geq\overline{AG}=\overline{AP}+\overline{PH}+\overline{HG}=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$
故 P 點使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 為最小值

Ⅱ.一般費馬點的探討僅限於三角皆小於 120˚ 三角形內部，那麼如果討論任一角大於或等於 120˚之三角形，是否能找到一點至三頂點距離和最短？（參考圖四）

(1) △ABC 的∠A＞120゜，P 為△ABC 內部任一點
延長 $\overline{CA}$ 至 B'，使 $\overline{AB'}=\overline{AB}$
做∠B'AP'=∠BAP，取 $\overline{AP'}=\overline{AP}$
故△B'AP'≅△BAP，得 $\overline{PB}=\overline{P'B'}$ 。
於是 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{P'B'}+\overline{PC}$ ，



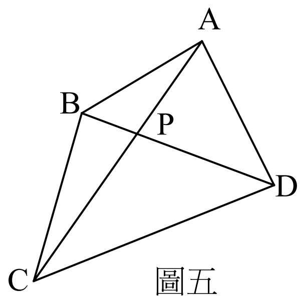
圖四

(2) 但因∠A＞120゜，故∠B'AB＜60゜，
亦得∠PAP'＜60゜；從而等腰三角形 P'AP
中∠AP'P＞60゜，故 $\overline{PA}>\overline{P'P}$
則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{P'P}+\overline{P'B'}+\overline{PC}>\overline{AB'}+\overline{AC}$，即 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{AB}+\overline{AC}$
亦即：如果∠A＞120゜，則 A 點即是到 A、B、C 三點距離之和最小的點。

(3) 證得：若已知三角形有一內角大於或等於 120˚ ，則費馬點即為該內角的頂點。

Ⅲ.三內角皆小於 120°的三角形才存在費馬點，但在日常生活中不止三角形需要找到一點到各頂點距離和最小ㄚ！也就是如果改變形狀後是否能找到一點 P 點，使得 P 點至頂點距離和最小，我們以下就最簡單的四邊形先做討論（參考圖五）。

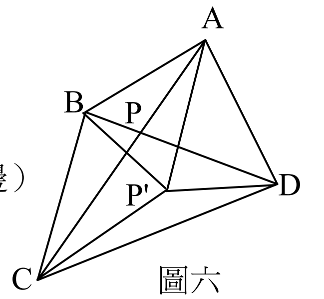
(1) 已知：四邊形 ABCD
求作：ABCD 內的 P 點
做法：在四邊形 ABCD 中
∵對角線為直線
∴對角線 $\overline{AC}$ 為 A、C 之間的最小距離
同理對角線 $\overline{BD}$ 為 B、D 之間的最小距離
發現： $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 之交點 P 為四邊形 ABCD 內之一點
使得 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$ 為最小值
即 P 點至四邊形四個頂點距離和最小



圖五

(2) 證明：（參考圖六）

在四邊形 ABCD 內另取一點 P'異於 P
連接 $\overline{AP'}$ 、 $\overline{BP'}$ 、 $\overline{CP'}$ 、 $\overline{DP'}$
△P'BD、△AP'C 中
$\overline{AP'}+\overline{CP'} > \overline{AC}$ 且 $\overline{BP'}+\overline{DP'} > \overline{BD}$（任兩邊和大於第三邊）
$\therefore \overline{AP'}+\overline{BP'}+\overline{CP'}+\overline{DP'} > \overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$
故 P 點使 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$ 為最小值



圖六

(二) 運用物理學方法探討費馬點之相關理論———常聽人說『數學是科學之母』，那是否能運用科學方法驗證費馬點的存在性或一些費馬點的性質ㄋ？參考老師的意見並思考後做了一系列有關力學的實驗：

1. 實驗一：從三力平衡證明費馬點的性質－ $\overline{AP}$ 、$\overline{BP}$ 、$\overline{CP}$ 所夾的三個角必為 120°。

(1) 以木條為邊組裝正三角形，三頂點各裝置一滑輪，取三條等長棉線一端各懸掛一等重黏土塊 W，分別由三滑輪垂下，另一端連在一起代表 P 點。

(2) 讓重物自然垂下到達靜止狀態，量測∠APB、∠APC、∠BPC 之角度（數據略）。

(3) 因為三重物重量相等，三條線的張力亦相同，即 F1=F2=F3=W 在平衡時所構成的力圖形成的「封閉三角形」為正三角形，亦即該力圖之三力所夾的三個角皆為 120 °。

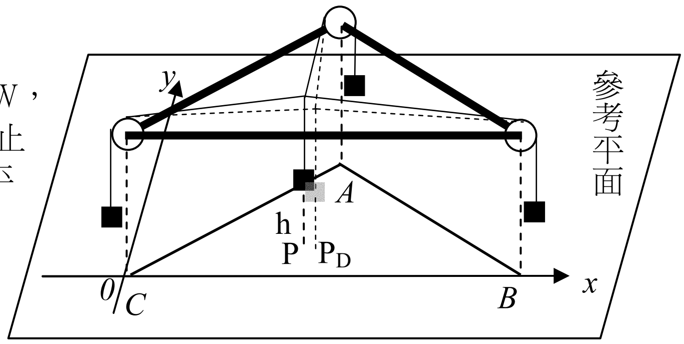
(4) 將步驟(2)之實驗裝置垂直置於一座標平面之上方，紀錄 P 點座標，再和（三）求出之 P 點一次函數，以電腦程式計算是否符合。

(5) 重複以上步驟 5 次，並改變三角形的形狀重複操作。

2. 實驗二：從實驗發現費馬點具有最低的位能的特性。

(1) 以木條為邊組裝正三角形 ABC 置於水平面上，三頂點各裝置一滑輪，取三條等長棉線一端各懸掛一等重黏土塊 W，分別由三滑輪垂下，由實驗一已知 P 點為費馬點。

(2) 於 P 點（費馬點）懸掛一黏土塊 W，讓重物自然垂直向下移動到達靜止狀態(左圖)，量測此時 P 點與水平面之垂直距離，分別作三次後取平均值，高度為 h_P。



(3) 將 P 點任意移向三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 上任意點，然後將重物放開，發現不論在任何邊上，均會趨向費馬點。根據「物體會自由趨向能量最低點」的原理，可證明費馬點具有最低的位能。

(4) 將步驟(3)之實驗過程分別紀錄得到位能高度 h'（三次平均值）、$P_{\overline{BC}}$ 、$h_{\overline{BC}}$（代表從 $\overline{BC}$ 點釋放後的狀況，依此類推）、$P_{\overline{AC}}$ 、$h_{\overline{AC}}$ 、$P_{\overline{AB}}$ 、$h_{\overline{AB}}$（數據略）。

(5) 重複以上步驟 3 次，並改變三角形的形狀重複操作。

3. 實驗三：運用電學方法驗證費馬點。

(1)以電腦程式計算正三角形之費馬點至三頂點的距離，並各乘以一單位電阻，代表從三頂點至費馬點並聯的電阻線。將此三條電阻線連接成如圖(略)之電路圖。

(2)開啓電源供應器，量測毫安培計的讀數（數據略）。

(3)在三角形內隨意找三個不爲費馬點的點，重複以上兩步驟。因爲此時爲 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ 最小値，根據「電阻長度和電阻大小成正比」，此時三段電阻 a、b、c 皆爲最小，所以並聯後電阻和 $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$ 爲最大値，使得電源開啓時，電流爲 I 最大。

(4)重複以上步驟 3 次，並改變三角形的形狀重複操作。

(三)求作直角座標系中的費馬點驗證物理實驗結果———直角座標常被利用在地圖的表示上，是否我們能找出求作直角座標系中的 P 點（P 點爲至各頂點距離和最小的一點）再配合電腦程式來驗證我們實驗結果？

(1) 三角形---

a.爲方便起見一邊固定於 x 軸上且一頂點爲原點，做法乃利用前述 I 的想法

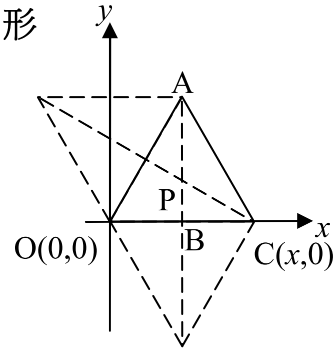
b.以下先就特殊三角形一一做討論再推廣至一般三角形

ㄅ.正三角形（參考圖七）

$\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\overline{BP}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$

故 P 點座標爲（$\dfrac{x}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$）



圖七

ㄆ.等腰三角形（參考圖八）

∵四邊形 AOBC 爲鳶形

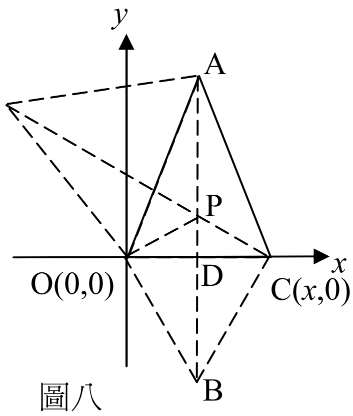
∴ $\overline{AB}\perp\overline{OC}$

又∠OPC=120°

因此∠OPD=60°

故 $\overline{DP}=\dfrac{\overline{OD}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$

則 P 點座標爲（$\dfrac{x}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$）



圖八

ㄇ.直角三角形（參考圖九）

設過 P 點之函數爲 $y=ax+b$

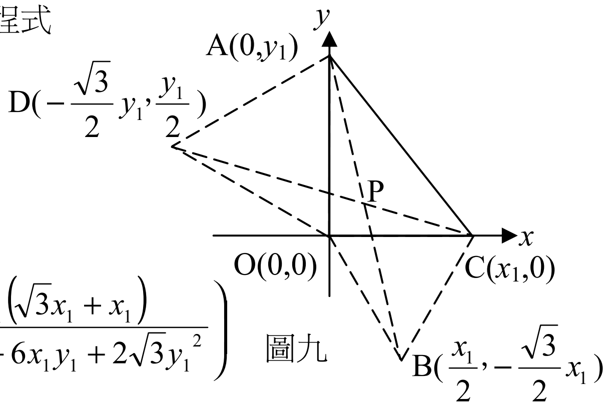
將 A，B，C，D 四點座標代入

求 $\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{CD}$ 之方程式並解聯立方程式

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB}：y=\dfrac{-\sqrt{3}x_1-2y_1}{x_1}x+y_1 \\ \overleftrightarrow{CD}：y=\dfrac{-y_1}{\sqrt{3}y_1+2x_1}(x-x_1) \end{cases}$$

得 P 點座標爲

$$\left(\frac{x_1y_1\left(x_1+\sqrt{3}y_1\right)}{2\sqrt{3}x_1^{\ 2}+6x_1y_1+2\sqrt{3}y_1^{\ 2}},\frac{x_1y_1\left(\sqrt{3}x_1+x_1\right)}{2\sqrt{3}x_1^{\ 2}+6x_1y_1+2\sqrt{3}y_1^{\ 2}}\right)$$



圖九

ㄷ.等腰直角三角形

等腰直角三角形爲等腰三角形之一種，故 P 點座標與等腰三角形相同。
同理 P 點座標也和直角三角形相同。

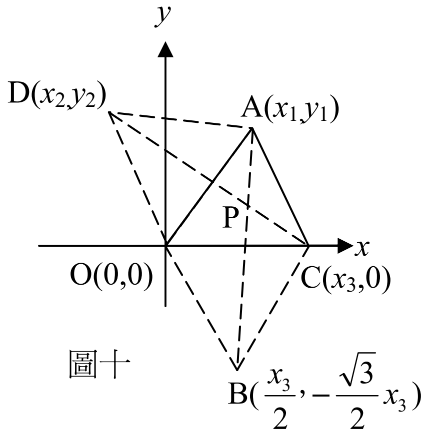
ㄉ.任意三角形（參考圖十）

設過 P 點之函數爲 $y=ax+b$

將 A，B，C，D 四點座標代入

求 $\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{CD}$ 並解聯立方程式

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB}：y=\dfrac{2y_1+\sqrt{3}x_3}{2x_1-x_3}x-\dfrac{x_3y_1+\sqrt{3}x_1x_3}{2x_1-x_3} \\ \overleftrightarrow{CD}：y=\dfrac{y_2\left(x-x_3\right)}{x_2-x_3} \end{cases}$$



圖十

得 P 點座標爲

$$\left(\frac{x_3\left(x_2y_1-y_1y_3+\sqrt{3}x_1x_2-\sqrt{3}x_1x_3-2x_1y_2+y_2x_3\right)}{2x_1y_2-x_3y_2-2y_1x_2-\sqrt{3}x_2x_3+2x_3y_1+\sqrt{3}x_3^{\ 2}},\frac{x_3\left(y_1y_2-\sqrt{3}x_1y_2+\sqrt{3}y_2x_3\right)}{2x_1y_2-x_3y_2-2y_1x_2-\sqrt{3}x_2x_3+2x_3y_1+\sqrt{3}x_3^{\ 2}}\right)$$

(2) 四邊形---

a. 爲方便起見一邊固定於 x 軸上且一頂點爲原點，做法乃利用前述Ⅲ的想法

b. 以下先就特殊四邊形一一做討論再推廣至任意四邊形

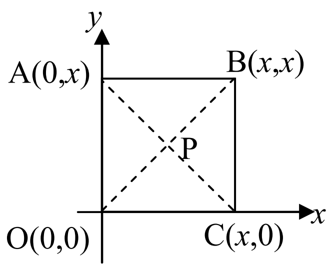
ㄅ.正方形（參考圖十）

∵四邊形 ABCO 爲正方形

∴ $\overline{AC}$ 平分 $\overline{BO}$ 且 $\overline{AC}=\overline{BO}$

（正方形中對角線互相平分）

故 P 點座標爲（$\frac{x}{2},\frac{x}{2}$）



圖十

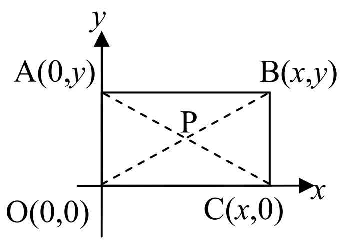
ㄆ.長方形（參考圖十一）

∵四邊形 ABCO 爲長方形

∴ $\overline{AC}$ 平分 $\overline{BO}$ 且 $\overline{AC}=\overline{BO}$

（長方形中對角線互相平分）

故 P 點座標爲（$\frac{x}{2},\frac{y}{2}$）



圖十一

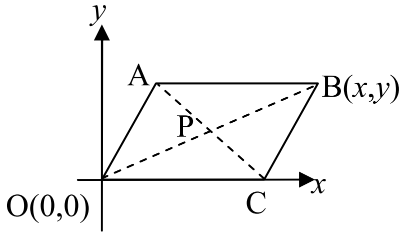
ㄇ.平行四邊形（參考圖十二）

∵四邊形 ABCO 爲平行四邊形

∴ $\overline{AC}$ 平分 $\overline{BO}$ 且 $\overline{AC}=\overline{BO}$

（平行四邊形中對角線互相平分）

故 P 點座標爲（$\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}$）



圖十二

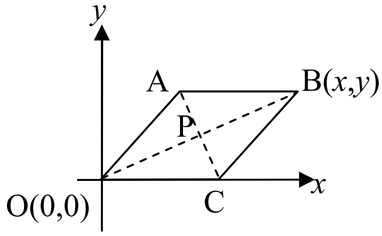
ㄈ.菱形（參考圖十三）

∵四邊形 ABCO 爲菱形

∴ $\overline{AC}$ 平分 $\overline{BO}$ 且 $\overline{AC}=\overline{BO}$

（菱形中對角線互相平分）

故 P 點座標爲（$\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}$）



圖十三

發現：若四邊形對角線互相平分，

則其 P 點爲此四邊形對角座標之中點。

ㄉ.等腰梯形（參考圖十四）

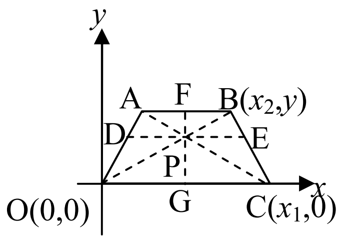
作 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}\,//\,\overline{OC}$

∵ $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}\,//\,\overline{OC}$

∴△ABP~△OPC

$$\Rightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PG}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}}=\frac{x_2-\dfrac{x_1-x_2}{2}}{x_1}$$

設 $\overline{PG}$ 爲 α ，$\overline{FP}$ 爲 y-α



圖十四

$$\frac{y-\alpha}{\alpha}=\frac{x_2-\dfrac{x_1-x_2}{2}}{x_1}$$

$$x_2\alpha-\frac{x_1\alpha-x_2\alpha}{2}=x_1y-x_1\alpha$$

$$2x_2\alpha-x_1\alpha-x_2\alpha=2x_1y-2x_1\alpha$$

$$x_2\alpha+x_1\alpha=2x_1y$$

$$(x_1+x_2)\alpha=2x_1y$$

$$\therefore \alpha=\frac{2x_1y}{x_1+x_2}$$

又∵ABCO 爲等腰梯形

$$\therefore \overline{OG}=\frac{\overline{OC}}{2}=\frac{x_1}{2}$$

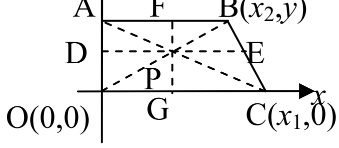
故 P 點座標爲（$\dfrac{x}{2},\dfrac{2x_1y}{x_1+x_2}$）

ㄊ.兩個內角爲直角的梯形（參考圖十五）

作 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}\,//\,\overline{OC}$

∵ $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}\,//\,\overline{OC}$

∴△ABP~△OPC



圖十五

$$\Rightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PG}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}}=\frac{x_2}{x_1}$$

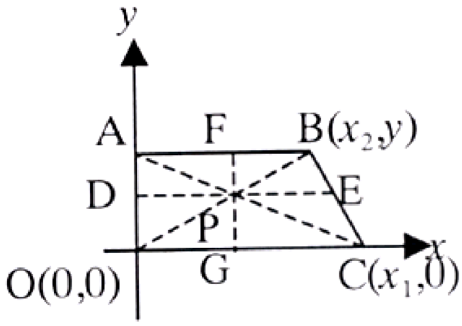
設 $\overline{PG}$ 爲 α ，$\overline{FP}$ 爲 y-α

$$\frac{y-\alpha}{\alpha}=\frac{x_2}{x_1}$$

$x_2\alpha = x_1 y - x_1\alpha$

$\alpha(x_2 + x_1) = x_1 y$

$\therefore \alpha = \dfrac{x_1 y}{x_1 + x_2}$



圖二十一

$\because \overline{AB} // \overline{DE} // \overline{OC}$

$\therefore \triangle ADP \sim \triangle AOC$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{DP}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \dfrac{\overline{FP}}{\overline{FG}} = \dfrac{y - \dfrac{x_1 y}{x_1 + x_2}}{y}$

設 $\overline{DP}$ 為 β

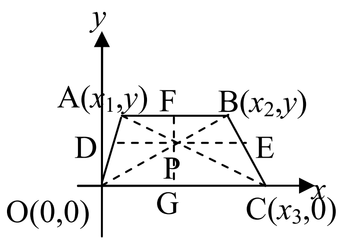
$\dfrac{\beta}{x_1} = \dfrac{y - \dfrac{x_1 y}{x_1 + x_2}}{y}$

$y\beta = x_1 y - \dfrac{x_1^{\ 2} y}{x_1 + x_2}$

$\therefore \beta = \dfrac{x_1 y - \dfrac{x_1^{\ 2} y}{x_1 + x_2}}{y} = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

故 P 點座標為（$\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \dfrac{x_1 y}{x_1 + x_2}$）

3.任意梯形（參考圖十六）



圖十六

作 $\overline{DE} // \overline{AB} // \overline{OC}$

$\because \overline{AB} // \overline{DE} // \overline{OC}$

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle OPC$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{FP}}{\overline{PG}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OC}} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3}$

設 $\overline{PG}$ 為 α ，$\overline{FP}$ 為 y-α

$\dfrac{y - \alpha}{\alpha} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3}$

$x_2\alpha - x_1\alpha = x_3 y - x_3\alpha$

$x_2\alpha + x_3\alpha - x_1\alpha = x_3 y$

$\alpha\ (x_2 + x_3 - x_1) = x_3 y$

$\therefore \alpha = \dfrac{x_3 y}{x_2 + x_3 - x_1}$

$\because \overline{AB} // \overline{DE} // \overline{OC}$

$\therefore \triangle ADP \sim \triangle AOC$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{DP}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \dfrac{\overline{FP}}{\overline{FG}} = \dfrac{y - \dfrac{x_3 y}{x_2 + x_3 - x_1}}{y}$

設 $\overline{DP}$ 為 β

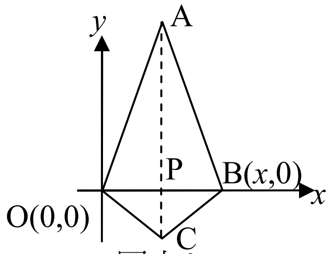
$$\frac{\beta}{x_3}=\frac{y-\dfrac{x_3 y}{x_2+x_3-x_1}}{y}$$

$$y\beta = x_3 y-\frac{x_3{}^2 y}{x_2+x_3-x_1}$$

$$\therefore \beta=\frac{x_3 y-\dfrac{x_3{}^2 y}{x_2+x_3-x_1}}{y}=\frac{x_3\left(x_2-x_1\right)}{x_2+x_3-x_1}$$

故 P 點座標為（$\dfrac{x_3\left(x_2-x_1\right)}{x_2+x_3-x_1},\dfrac{x_3 y}{x_2+x_3-x_1}$）

（以下為方便起見，將兩頂點固定於 x 軸上）



圖十七

ㄉ.鳶形（參考圖十七）

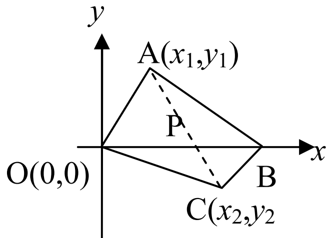
$\because \overline{\mathrm{BO}}$ 為對角線

$\therefore$P 點在 x 軸上

又四邊形 ABCO 為鳶形

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}$ 平分且 $\perp \overline{\mathrm{BO}}$

故 P 點座標為（$\dfrac{x}{2}$,0）



圖十八

ㄍ.任意凸四邊形（參考圖十八）

設過 P 點之函數為 $y=ax+b$

將 A，B，C，O 四點座標代入

求 $\overline{\mathrm{AC}}$，$\overline{\mathrm{BO}}$ 之方程式並解聯立方程式

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{AC}}: & y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x-x_1\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \\ \overline{\mathrm{BO}}: & y=0 \end{cases}$$

得 P 點座標為$\left(\dfrac{x_1\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)}{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}},0\right)$

五、 研究結果

（一）經由數學方法求得之費馬點和 P 點之一次函數，以電腦程式計算後可輔助實驗進行並增加實驗精確度。

（二）實驗一和實驗二數據（略）中測量值和計算值極為接近，即可證明實驗所得之 P 點為費馬點，但於實驗中會受到摩擦力等因素的影響造成誤差。而實驗三電學方式可求出在正三角形時費馬點使得 $\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$、$\overline{\mathrm{CP}}$ 三段電阻並聯時總電阻為最大，電流最小。而其他正三角形則尚待進一步實驗。

六、 討論與應用

（一）有一角大於或等於 120° 的三角形中，無法利用作正三角形的作圖法求出費馬點的位置，因為利用其作圖法求出來之 P 點，會落在三角形之外，不符合 P 點至三頂點之連線所成的三個角皆等於 120° 度，且根據證明，費馬點和大於或等於 120

°該 角之頂點爲同一點。故在此有一角大於 120 °或等於的三角形不予以討論。

（二）雖然凹四邊形之對角線交點在外部，但其對角線和 P 點性質與凸四邊形相同，且做法和座標也相同，因此省略不重複列出。

（三）我們從實驗二發現了一項費馬點在物理學上的性質：「費馬點爲三角形中能量最低點」。因爲在操作實驗二時，無論將 P 點移至何位置，釋放後總是會向原 P 點位置移動，即可證明原 P 點爲三角形能量最小值之位置。

（四）實驗所得之測量值和計算值極爲接近，即可證明實驗所得之 P 點爲費馬點，但於實驗中會受到摩擦力等因素的影響造成誤差。

（五）經由實驗三研究，發現在正三角形有此種和費馬點及電學有關之性質的特性，而其他三角形，則尚待進一步研究。

（六）費馬點在日常生活中也被廣泛應用，只要是存在於三點之間，求一點距離和爲最小值的情況，都可運用到費馬點的性質。例如在三城市中建立一變電所，要如何架設高壓電塔以減少電能的浪費，或是三戶人家之間挖掘一口井等，皆是費馬點運用的例子。

七、 結論

（一）費馬點在數學上有「三夾角皆爲 120 °」及「到三頂點之和爲最小值」兩種性質，除此之外，在物理學上也有「費馬點爲三角形中能量最低點」的性質。

（二）頂角小於 120 °的等腰三角形，費馬點必在底邊之高上，且底邊長度相同時，費馬點爲同一點。而四邊形之「費馬點」即爲對角線之交點。

（三）根據理論推出，費馬點至三頂點連成之線段所夾的三個角皆爲 120 °，恰和三力平衡時三力夾角皆爲 120 °的特性相同，因此可用物理學上三力平衡的實驗找出費馬點之位置。

（四）經由電學裝置進行實驗，發現在正三角形內費馬點使得 $\overline{AP}$ 、$\overline{BP}$ 、$\overline{CP}$ 三段電阻並聯時總電阻爲最大，電流最小。

八、 參考資料及其它

（一）參考書目

1. 酒井高男著，(1992) 力學的趣味實驗，亞東書局出版

2. 黃家禮 (1997)，幾何明珠，九章出版

3. 佚名 (1984)，數學和數學家的故事（下），六藝出版

4. 佚名 (1991)，數學的魅力，凡異出版

（二）參考網站

1. The Fermat Point and Generalizations
http://www.cut-the-knot.com/Generalization/fermat-point.html

評語：

本件作品之最大貢獻是作者能將費馬點的研究應用在物理之”力與平衡”及”電學”上，而且結果亦達預期之結果。

作者簡介

我是蕭敦仁，是個來自南台灣高雄市的國三學生。在升高中的升學壓力之下，不但要應付龐大的課業壓力，還要撥出時間參加科展，對自己也是個挑戰。由於這個題目是嘗試將數學和物理結合起來，以物理方法驗證數學理論，在科展史上算是個創新，能做出這樣的成果，並獲得參加全國科展的機會，自己也有些意外。