作品名稱：追！追！追！~多邊形追逐軌跡之探討

國中組　數學科　第三名

縣市：高雄市　　　　　　　　　　　作者：　潘世昂

校名：陽明國中　　　　　　　　　　指導教師：　林錦榮、羌梅芳

關鍵詞：追逐軌跡

追！追！追！
～多邊形追逐軌跡之探討

一、研究動機

http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Four.Dogs/four.dogs.html 數學網站有以下此問題：『有四隻狗分別位於正方形的頂點上，在同一時間開始以同一速率依逆時針方向追向下一隻狗，求每隻狗所留下的軌跡形狀及此軌跡的長度。』當我認真尋思此問題時，發現這是個非常有趣複雜的數學謎題，可視不同的給定條件而變化多端，於是開始了這趟有趣的數學之旅。

二、研究目的

（一）將原問題幾何化，以每隻狗的所在位置依序連線形成多邊形，將問題改成此 n 多邊形每個頂點同時開始依順時針（或逆時針）方向往鄰近的下一個頂點追去。

（二）研究運算程式，再用電腦呈現任意狀況下各點相追之結果。

（三）探討各種變因對追逐結果的影響，以及求追逐軌跡的特性及長度。

三、研究設備

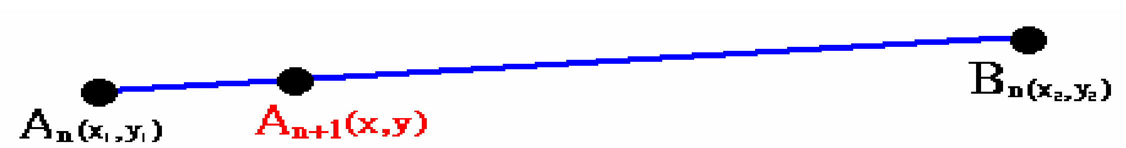
使用軟體：Windows 98、IE 5.0、Microsoft Word 2000、Microsoft Excel 2000、The Geometer’s Sketchpad 動態幾何、Visual Basic6.0

四、研究過程

（一）用 **Excel** 畫出追逐圖形

利用 Excel 能繪出 xy 軸座標圖，能做簡單的數學計算及處理各種數列的功能，寫出能畫任意追逐軌跡圖形的程式，作爲以後研究時參考及驗證的工具。研究步驟如下：

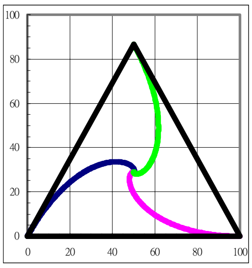
1. 研究如何將多邊形方便的放在座標系上。
2. 利用無限切割曲線的方法，從起始條件推得整個軌跡曲線。
3. 求點下一位置的公式：

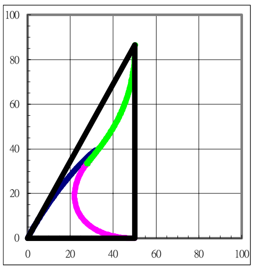


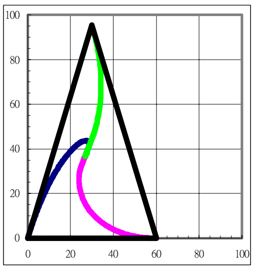
若 An $(x_1，y_1)$追向 Bn $(x_2，y_2)$，An 點在一瞬間前進距離爲 d（d 極小，依速率自定，$x_1 < x_2$ 時定 d 爲正，$x_1 > x_2$ 時定 d 爲負），A_nB_n 線段斜率爲 m，則 A_n 點下一位置 A_{n+1} 座標爲 $\left(x_1+\frac{d}{\sqrt{m^2+1}}，y_1+m\times\frac{d}{\sqrt{m^2+1}}\right)$。

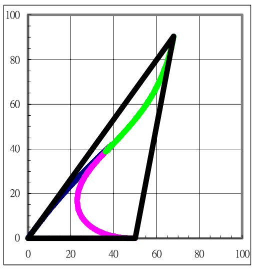
4. 用 Excel 繪出軌跡圖形：

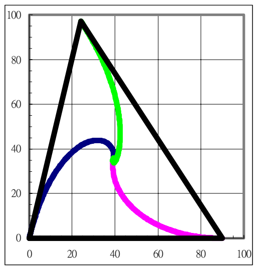
(1)任意三點追逐軌跡圖：


正三角形

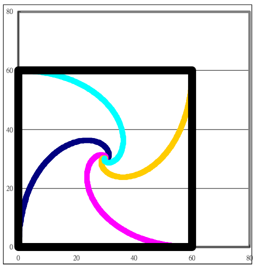

直角三角形

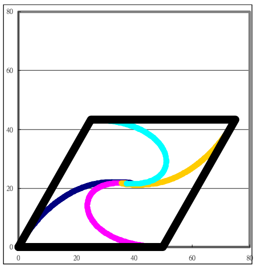

等腰三角形

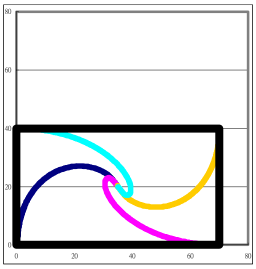

鈍角三角形

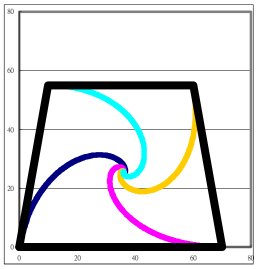

銳角三角形

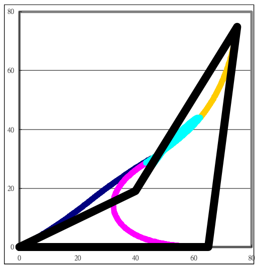
(2)任意四點追逐軌跡圖：


正方形

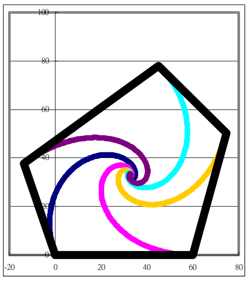

平行四邊形

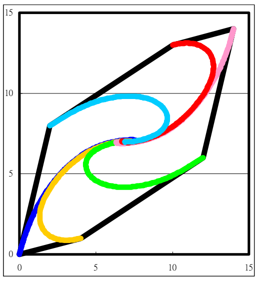

長方形

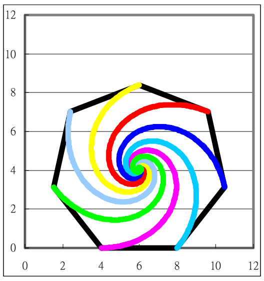

等腰梯形

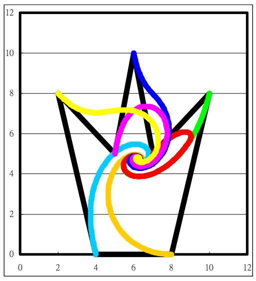

凹四邊形

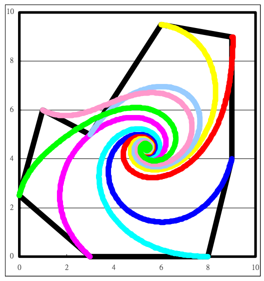
(3)任意五、六、七、八點追逐軌跡圖：


任意五邊形


平行六邊形


正七邊形


任意七邊形


任意八邊形

＊ 任意多點的軌跡圖不再舉例說明

（二）追逐情形的分類（直線族、正 n 邊形族、旋轉對稱族、鏡像對稱族、任意族）

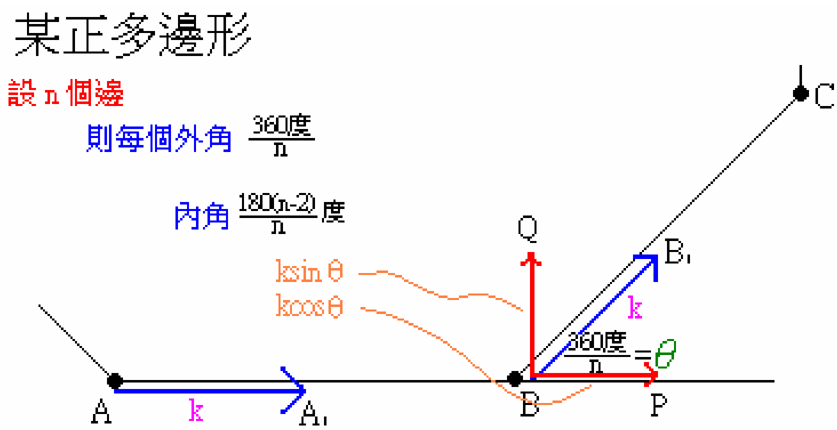
＊以正 n 邊形族舉例（各族詳細說明請參考報告書）

發現過程：

我從網路資料中判斷出正 n 邊形族的獨特性的。原題目以正方形的頂點爲相追起點，直覺上我就用我的程式作出其他正多邊形的追逐圖形，發現軌跡圖形都相同。我便開始積極尋求其他特性。

追逐軌跡：

1. 利用「分量」的觀念，求出「追捕者」與「被追者」相對靠近的速率，並以此求出軌跡長。

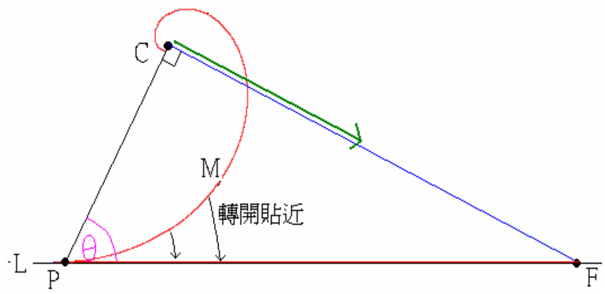


$\angle B_1BP = 360/n$ 度 $=\theta$　　∴ $BP = k \times \cos\theta$　　A 與 B 每一瞬間的相對靠近速度 $= k(1-\cos\theta)$

A、B 相距 L　→ A 追到 B 所需時間 $= \frac{L}{k(1-\cos\theta)}$　　k 可視爲單一點移動的絕對速率

∵速率 × 時間＝距離　　∴ $k \times \frac{L}{k(1-\cos\theta)} = \frac{L}{(1-\cos\theta)}$……得正 n 多邊形軌跡長公式

2. 利用對數型螺旋的特性：線上任一點的切線與連心線的夾角恆等，求出軌跡長。



設 PC 長爲 R(正多邊形外接圓的半徑)，正多邊形邊長爲 L，將螺旋線 M 轉開貼近 L。

$PF = PC \div (PC/PF) = PC/\cos\theta = R/\cos\theta = T$ (軌跡長)

θ ＝ 正 n 邊形內角的一半 ＝ $(\pi - 2\pi/n)/2$

$T = R/\cos((\pi-2\pi/n)/2) = R/\sin(\pi/n)$　　……(1)

$R = L/2\times\sec(\theta) = L/2\cos(\pi/2-\pi/n) = L/2\sin(\pi/n)$　　……(2)

由(2)式代入(1)式 $T = (L/2\sin(\pi/n))/\sin(\pi/n)$

$= L/2(1-\cos^2(\pi/n))$

$= -L/2\cos(\pi/n)^2-2$

$= -L/\cos(2\pi/n)-1$

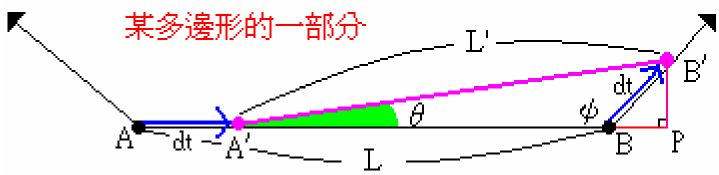
$= L/1-\cos(2\pi/n)$

（其他各族研究過程大致相同，共同特性也有完整證明，因空間不足無法附上，獲得結果都在結論）

（四）　軌跡公式的推演

（五）

基本公式：



上圖爲某多邊形的一部份，設 dt 爲點一瞬間的移動距離：

∵dt 趨近於零　　　∴θ 趨近於零　　　∴ A′B′=A′P

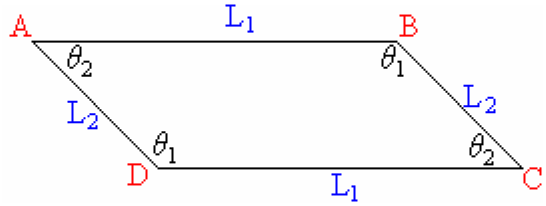
且 BP = $\cos(\pi-\phi)\times dt = -\cos\phi\times dt$

令 $dL = L'-L = A'B'-AB = A'P-AB = (A'B+BP)-(AA'+A'B)$

$= BP-AA' = -\cos\phi\times dt-dt = -(1+\cos\phi)\times dt$ →適用於任何狀況

$\therefore \int dL = \int -(1+\cos\phi)\times dt$

平行四邊形軌跡長：



$dAB+dBC+dCD+dDA = d(AB+BC+CD+DA) = d(L_1+L_2+L_1+L_2)$

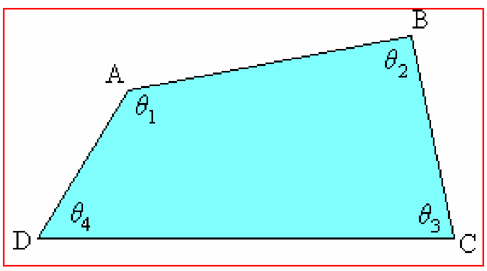
$=(1+\cos\theta_1)dt+(1+\cos\theta_2)dt+(1+\cos\theta_1)dt+(1+\cos\theta_2)dt$

$=4dt+2(\cos\theta_1+\cos\theta_2)dt = 4dt+2[\cos\theta_1+\cos(\pi-\theta_1)]$

$=4dt+2[\cos\theta_1-\cos\theta_1] = 4dt$

→ $\int d$(週長) ＝ $\int 4dt$　→ 週長＝4t　→ t ＝ 週長÷4

任意凸四邊形軌跡長：



各頂點依順時針相追，A 追 B、B 追 C、C 追 D、D 追 A，如左圖。

dAB ＝ (1+cosB)dt ＝ $(1+\cos\theta_2)dt$

dBC ＝ (1+cosC)dt ＝ $(1+\cos\theta_3)dt$

dCD ＝ (1+cosD)dt ＝ $(1+\cos\theta_4)dt$

dDA ＝ (1+cosA)dt ＝ $(1+\cos\theta_1)dt$

$d(AB+BC+CD+DA)=d$(週長)＝$(4+\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4)\,dt$

設　$y=\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4$　　※對於每個 n，$0\leq\theta_n\leq\pi$

令　$\theta_1+\theta_2=2x$　　$\theta_3+\theta_4=2\pi-2x$　（一定可以找在任意凸四邊形中找到這種配對）

→　$\theta_2=2x-\theta_1$　　→　$\theta_4=2\pi-2x-\theta_3$

令 $p = \cos\theta_1+\cos\theta_2 = 2\cos[(\theta_1+\theta_2)\div 2]\times\cos[(\theta_1-\theta_2)\div 2]$

$= 2\cos[2x\div 2]\times\cos[(\theta_1-(2x-\theta_1))\div 2] = 2\cos x \times \cos(\theta_1-x)$

∵ $0 \leqq x \leqq \pi/2$ ∴ $\cos x > 0$ ※ x爲固定值，只是不知其值。

則 p 最大值在 $\cos(\theta_1-x)=1$ 時存在，即 $\theta_1=x$，此時 $p=2\cos x$。

p 最小值在 $\theta_1=0$ or $2x$ 時存在，此時 $p=2\cos^2 x$。

※ 因爲 $\theta_1+\theta_2= 2x$，所以 $\theta_1\leqq 2x$ → θ_1 最小 0，最大 2x。

令 $q= \cos\theta_3+\cos\theta_4=2\cos[(\theta_3+\theta_4)\div 2]\times\cos[(\theta_3-\theta_4)\div 2]$

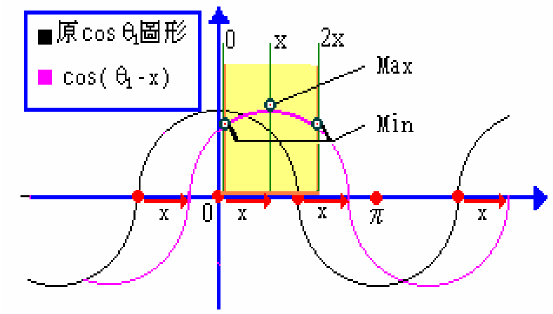
$= 2\cos(\pi-x)\times\cos[(\theta_3-(2\pi-2x-\theta_3))\div 2]$

$= 2\cos(\pi-x)\times\cos(\theta_3-(\pi-x)) = -2\cos x \times \cos(\theta_3-(\pi-x))$

∵ $0 \leqq x \leqq \pi/2$ ∴ $\cos x > 0$

則 q 最大值在 $\theta_3=\pi$ or $\pi-2x$ 時存在，此時 $q=-2\cos^2 x$。

q 最小值在 $\cos(\theta_3-(\pi-x))=1$ 時存在，即此時 $\theta_3=\pi-x$，此時 $p=-2\cos x$。



左圖為 cosine 圖形，向右平移 x 單位長後形成 $\cos(\theta_1-x)$的圖形。黃色部分為可用範圍，最大值與最小值已經標示。同理可做出 $\cos(\theta_3-(\pi-x))$圖形。

※ 兩端最小，中間最大，但乘於負號時相反。

∵ $y=p+q$ ∴ y 的最大值爲 p 最大值＋q 最大值

→ $\mathrm{Max}(y) = \mathrm{Max}(p+q) = 2\cos x-2\cos^2 x = -2(\cos x-0.5)^2+0.5$

→ $\cos x=0.5$ 時 y 產生最大值 0.5

（此時 $x=60$ 度，$\theta_1=\theta_2=\theta_3=60$ 度、$\theta_4=180$ 度）

∴y 的最小值爲 p 最小值＋q 最小值

→ $\mathrm{Min}(y) = \mathrm{Min}(p+q) = -2\cos x+2\cos^2 x = 2(\cos x-0.5)^2-0.5$

→ $\cos x=0.5$ 時 y 產生最小值 0.5

（此時 $x=60$ 度，$\theta_1=0$ 度、$\theta_2=\theta_3=\theta_4=120$ 度）

∴ $-0.5 \leqq y \leqq 0.5$ ∴ $3.5 \leqq 4+y \leqq 4.5$

又 d(AB+BC+CD+DA)＝d(週長)＝$(4+\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_4)\,dt$

→ d(週長) ＝ $(4+y)dt$ → $\int$d(週長) ＝ $\int(4+y)dt$

→ 週長 ＝ $(4+y)t$ → 週長 ÷ t ＝ $4+y$

∴ $4.5 \geqq$ 週長 ÷ t $\geqq 3.5$ → $1/4.5 \geqq$ t ÷ 週長 $\geqq 1/3.5$

∴ 週長 ÷ 4.5 ≦ t ≦ 週長 ÷ 3.5

（因爲版面的限制，其餘研究方法詳細推演過程請參考作品說明書。）

五、結論

五族名稱	特性趨勢	
直線族	**定義**	相追的 n 個點剛開始在同一直線上。
	追逐特性	此族各點在直線上逐漸逼近，最後全部的點在原本相離最遠的兩個點所形的線段的中點會合，全部相遇！
	軌跡長	軌跡長＝相距最遠兩點間的距離÷2。
正 n 邊形族	**定義**	相追的 n 個點剛開始位於一正多邊形的頂點上。
	追逐特性	正 n 邊形在相追過程中，各點仍形成正 n 邊形。這是移動最規律的一族，每個點所留下的追逐軌跡都相同，皆爲對數型螺旋，極座標表示方法爲 $r=e^{-\frac{\theta}{\tan A_1}}$。
	軌跡長	軌跡長爲 $\frac{L}{(1-\cos\theta)}$，$\theta=360/n$ 度（外角），L 爲邊長。
旋轉對稱族	**定義**	n 個點的起始位置以某一中心點旋轉若干度後，會與原來的圖形重合（正 n 邊形族除外）。
	追逐特性	跟正 n 邊形族非常相似，由旋轉中心點向外放出射線，可將多邊形分割成若干個一模一樣的圖形。依可切成幾個相等的圖形，以及每個小圖形有幾個點，可分類成「n 塊 m 點形」，追逐後會逐漸形成近似正 n 邊形，軌跡會近似對數型螺旋線。
鏡像對稱族	**定義**	追逐過程中 n 個點始終依一中軸保持鏡像對稱。
	追逐特性	1. 必爲有偶數個頂點的 Cross 形。 2. 對稱軸通過起始邊的交叉點。 3. 每對對稱點的移動方向必須依中軸對稱，因此，經過對稱軸的交叉點只能有奇數對。 4. 追逐過程中，鏡像對稱族的圖形會趨近於一種扁平的多邊形，而此扁平的多邊形會垂直於對稱軸。 5. 鏡像對稱族在追逐過程中必維持鏡像對稱，也就是說直到有任何點相遇之前，圖形必爲 Cross 形。
任意族	**定義**	不屬於以上四族，追逐過程毫無規律的情形。
	追逐特性	任意族追逐時只遵守所有族群的共同特性。
共同特性		
1. 凸多邊形相追時，在追逐過程中必保持爲凸多邊形。 2. 凹多邊形相追時，形狀會傾向變成凸多邊形。 3. 凸多邊形各點必同時相遇。 4. 每一族在追逐過程中，必維持在原來的族內，不會跳族。		

（一） 在多邊形中，若 A 追向 B，則經過極微小時間後，dL=－(1+cosB)dt，這就是基本公式，其中 dL、dt 為 L、t 的微小變化，L 為 AnBn 長，t 為 tract 單一點的總軌跡長（dt 為各點在一瞬間時的移動距離，所有 dt 總合即為 t）。

（二） 利用基本公式配合餘弦定理，經適當轉換的結果，可證明三角形週長 ÷ 4.5 ≦ t ≦ 週長 ÷ 4，當 ABC 面積趨近於零時則產生最大值，而 ABC 為正三角形時產生最小值。

（三） 利用基本公式和餘弦函數的極值，得到任意 n 邊形軌跡長 t ≧ 週長 ÷ 2n。

（四） 再利用餘弦函數極值等觀念的靈活運用，可證明任意凸四邊形週長 ÷ 3.5 ≧ t ≧ 周長 ÷ 4.5。

（五） 利用餘弦函數極值得推廣及固定角度和之探討，得到對於任意凸多邊形 t ≧週長÷ 4.5，而任意凸 n 邊形中，令 Min 等於以下值中最小的：

n-n×cos(360/n)、(n+1)-(n-1)×cos(180/(n-1))、4

，則 t ≦ 週長 ÷ Min。

六、參考資料：

1. http://mathworld.wolfram.com/MiceProblem.html
2. http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Four.Dogs/four.dogs.html
3. http://www.primaryresources.co.uk/maths/pursuit.htm
4. Gardner, M. 1959 The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. New York Simon and Schuster
5. Bernhart, Arthur. 1959 "Polygons of Pursuit." Scripta Math. 24, P23-50
6. 施威銘研究室著 實用的 Excel97 範例書 旗標出版

組　　別：國中組

科　　別：數學科

學校名稱：高雄市立陽明國中

指導老師：羌梅芳、林錦榮

參展作者：潘世昂

評語：

多邊形追逐是一個常見的趣味數學問題，一般的了解是它是一種螺線，但作者把它加以推廣到任意的封閉折線段圖形，惟需滿足追逐條件。作者用差分方式使用電腦程式加以模擬並計算其弧長。作者的數學性良好，表達也很清楚，令人印象深刻。

個人簡介

我出生於高雄，小學時就喜歡跟爸爸玩數學遊戲，也讀了許多有趣的課外書籍，引起我對科學的好奇，並激發稍後探究數理的欲望。這次研究起源於無意中遇到的問題，由於師長的鼓勵與協助，使我在這次科展中能夠得獎，謹在此致上最誠摯的謝意。