作品名稱：共球等邊多面體

國中組　數學科　第一名

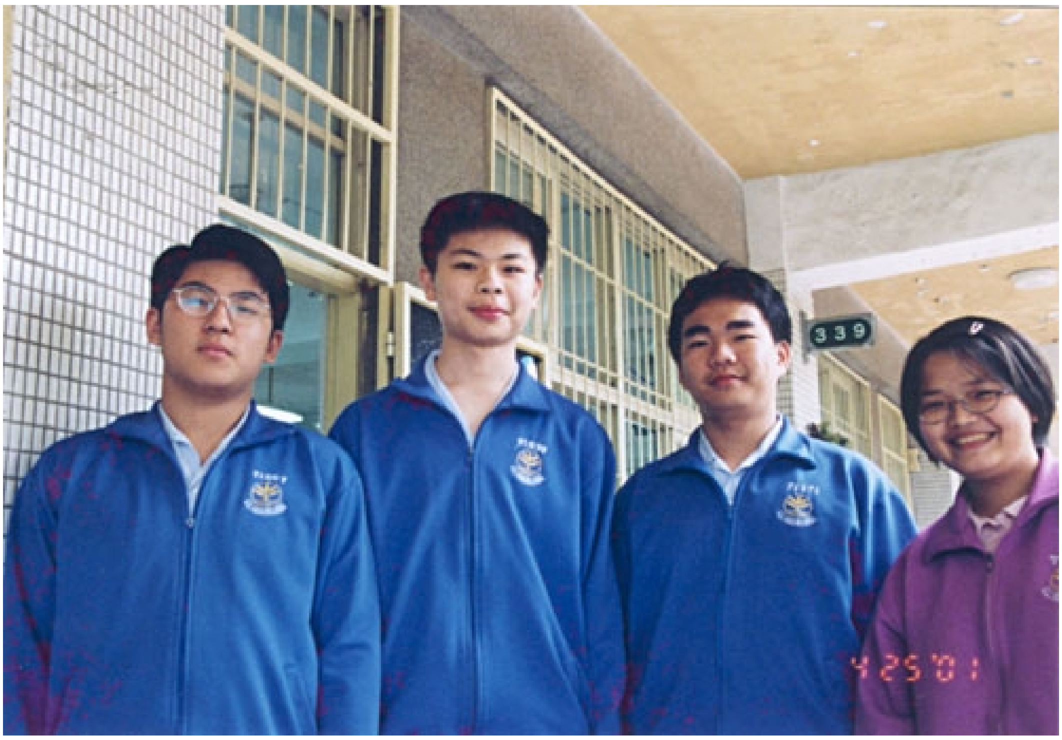
縣市：台北縣

作者：張涵鈞、許程傑、謝宗叡、林守望

校名：福和國民中學

指導教師：陳明貴、郭彥顯

關鍵詞：共球、共球等邊多面體、正多面體、等邊多面體



共球等邊多面體

一、研究動機：

二年級下學期見識到五個正多面體，是如此的完美，我們想知道還有那些類似的多面體？

二、研究步驟：

（一）、共球等邊多面體的性質與分類

（二）、找出所有頂點構造均相同的共球等邊多面體。

（三）、找出其共球等邊多面體是怎麼切割而成的。

(發現作出的共球等邊多面體均由正多面體切割而成，除鼓形及柱體)

（四）、找出所有頂點構造不同的共球等邊多面體。

三、研究過程及討論：

（一）.共球等邊多面體的性質與分類

我們研究的共球等邊多面體具備下列兩性質：

1.所有的邊長相等 2.所有頂點共球面

由 1.2.點綜合可得：同一面上的所有頂點共圓，且共球等邊多面體都是由正多邊形組合而成。

共球等邊多面體可依頂點構造的差異性分成兩大類：

(1)每個頂點構造相同 (2)頂點構造不完全相同

（二）找出所有頂點構造均相同的共球等邊多面體

五個正多面體的形狀，由於完全對稱，所以是屬於這一類。

除此之外，我們想找出所有可能的頂點構造，來組成更多的共球等邊多面體。

1.找出$(a.b.b)$之共球等邊多面體(表示每個頂點都接正 a 邊形一個，正 b 邊形二個)

設正 a 邊形 x 個　正 b 邊形 $2y$ 個，(頂點)$v=ax=by$ $\therefore x{:}y=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b{:}a$

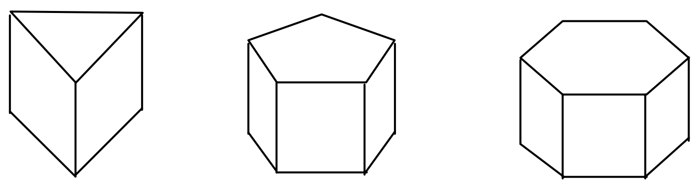
設 $x=br$, $y=ar$, (面)$f=br+2ar$, $v=abr$, (邊)$e=\dfrac{3abr}{2}$ ，

利用尤拉公式$(v+f=e+2)$找出符合 a,b 的值

a	3	3	3	3	4	5	6	7	8
b	4	6	8	10	6	6	4	4	4
r	1/2	2/3	1	2	1	2	1/2	1/2	1/2
x	2	4	8	20	6	12	2	2	2
$2y$	3	4	6	12	8	20	6	7	8
備註	柱體						柱體	柱體	柱體

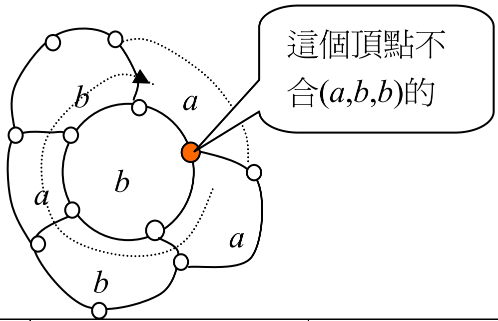
結論：(1).當 $b=4$ 時，a 可為$\geqq 3$ 的任意整數，我們稱之為柱體。

柱體: (3.4.4.)　(5.4.4.)　(6.4.4.)



（2）.當 b 爲奇數時以 b 爲底，每一邊以 b,a 依序接合，則會有兩個 a 共頂點，不合$(a.b.b)$的形式，所以 b 爲奇數時，此多面體無法組成。

（3）.除了 b=4 以外，可爲(a,b,b)的圖形只有 5 個

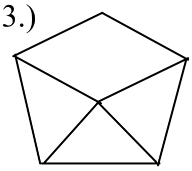


2 找出$(a.b.b.b)$之共球等邊多面體

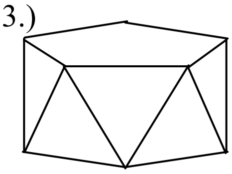
a	3	4	5	6
b	4	3	3	3
備註		鼓形	鼓形	鼓形

結論：(1).當 b=3 時，則 a 可爲≧3 的任意整數，我們稱之爲鼓形。

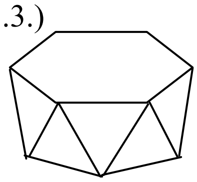
鼓形：　(4.3.3.3.)



(5.3.3.3.)



(6.3.3.3.)



(2).除了鼓形以外$(a.b.b.b.)$的共球多面體只有(3.4.4.4.)。

使用上述過程可得以下各結論：

3 找出$(a.b.a.b)$之共球等邊多面體

結論: $(a.b.a.b.)$的形式只有(3.4.3.4.)、(3.5.3.5.)兩種

4 找出$(a.b.\ c.c.)$之共球等邊多面體

結論：無$(a.b.c.c.)$形式之共球等邊多面體

原因：

（1）若 a 爲奇數，以 a 爲底，每邊 $b.c.c$ 以依序接合，則會有 2 個 b 共頂點，因此不合$(a.b.c.c.)$。

（2）若 a 爲偶數，以 a 爲底，每兩邊一個 b 依序接合，使 a 的頂點爲$(a.b.c.c.)$，則會有 3 個 c 組成∴無$(a.b.c.c.)$形式之共球等邊多面體。

5 找出$(a.b.c.)$之共球等邊多面體

結論：若 $a.b.c$ 爲相異數時

說明：設有一個正 a 邊形、正 b 邊形、正 c 邊形組成的多面體，在正 a 邊形的邊上，以 $b.c$ 的順序排列組合

（1）當若 a 爲奇數時，會有一頂點由$(a.b.b.)$組成，則不合$(a.b.c.)$的形式，∴$a.b.c$ 若有奇數則不合

（2）若 abc 均爲偶數，則只有(4.6.8.) (4.6.10.)的一內角和<360°　，且代入尤拉公式均成立，∴符合$(a.b.c.)$形式的多面體，因此 abc 爲相異數時，則只有(4.6.8.) (4.6.10.)

6 找出$(a.b.b.b.b.)$之共球等邊多面體

結論: $(a.b.b.b.b.)$的形式只有(4.3.3.3.3.)、(5.3.3.3.3.)兩種

7 找出$(a.b.c.b.)$之共球等邊多面體

結論：當 b 爲 3 時,以 $b.c.b$ 的形式在 a 的每個邊依序接合,則會有兩個 c 共頂點,不合$(a.b.c.b.)$的形式。

（三）.找出其共球等邊多面體是怎麼切割而成的。

頂點構造	各正多邊形的面數 (n-m,表示正 n 邊形有 m 個)	總面數(面)	切割來源
(3.6.6.)	3-4,6-4	8	正四面體
(3.8.8.)	3-8,8-6	14	正六、八面體
(3.10.10.)	3-20,10-12	32	正十二、二十面體
(4.6.6.)	4-6,6-8	14	正八、六面體
(5.6.6.)	5-12,6-20	32	正十二、二十面體
(3.4.4.4.)-1	3-8,4-18	52	正六、八面體
(3.4.4.4.)-2	3-8,4-18	52	正六面體
(3.4.3.4.)	3-8,4-6	14	正六、八面體
(3.5.3.5.)	3-20,5-12	32	正十二、二十面體
(4.6.8.)	4-12,6-8,8-6	26	正六、八、十二面體
(4.6.10.)	4-30,6-20,10-12	62	正十二、二十面體
(3.4.5.4.)	3-20,4-30,5-12	62	正十二.、二十面體
(4.3.3.3.3.)	4-6,3-32	38	正六面體
(5.3.3.3.3.)	5-12,3-80	92	正十二面體

1.(3.6.6.)

若一正四面體邊長爲 a，欲切割成(3.6.6.)之共球等邊多面體，由此正四面體之頂點向邊長取 $\frac{a}{3}$，如圖 1-1 切割即得(3.6.6.)之共球等邊多面體，如圖 1-2

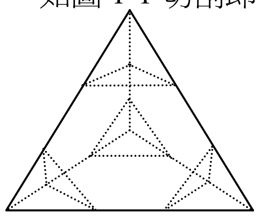


圖 1-1

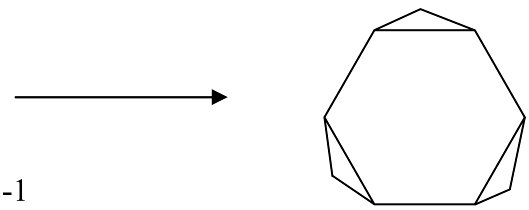


圖 1-2

2. (3.8.8)

若一正六面體邊長爲 a，欲切割成(3.8.8.)之共球等邊多面體，則由每一頂點向邊長取 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$，把每個鄰近的頂點用圖 2-1 的方法切割 ,則得(3.8.8.) 之共球等邊多面體，如圖 2-2

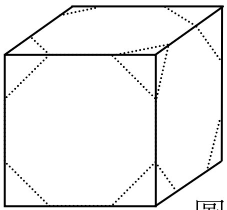


圖 2-1

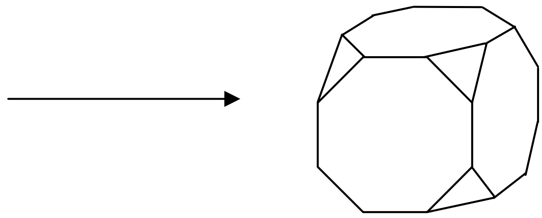


圖 2-2

3 .(3.10.10)

若一正十二面體邊長爲 a，欲切割成(3.10.10)之圖形，可由此正十二面體的頂點向邊長取 $\frac{5-\sqrt{5}}{10}a$，如圖 3-1 切割，則得(3.10.10.) 之共球等邊多面體，如圖 3-2。

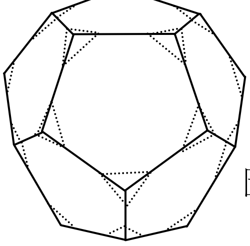


圖 3-1

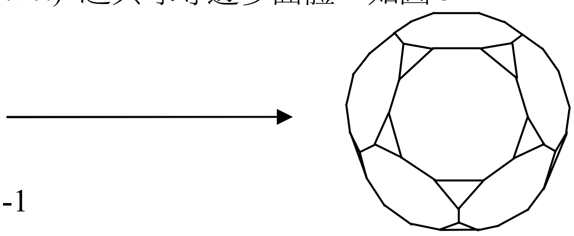


圖 3-2

4.(4.6.6.)

若一正八面體邊長爲 a，欲切割成(4.6.6.)之共球等邊多面體，可由頂點向邊長取 $\frac{a}{3}$

如圖 4-1 切割即得(4.6.6.)之共球等邊多面體，如圖 4-2

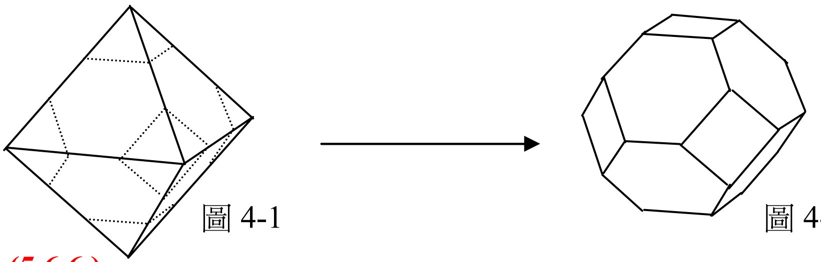


圖 4-1 圖 4-2

5. (5.6.6.)

若有一正十二面體邊長爲 a 時，欲切割成(5.6.6.)的共球等邊多面體，面上距離邊爲 0.2811a 予以切割如圖 5-1，得圖 5-2，取正五邊形各邊中點，如圖 5-2 切割，則得(5.6.6.) 之共球等邊多面體，如圖 5-3

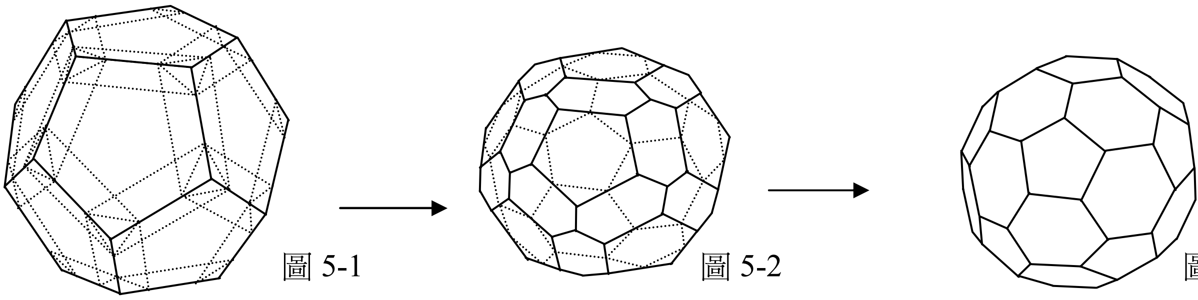


圖 5-1 圖 5-2 圖 5-3

6.(3.4.3.4.)

若一正六面體邊長爲 a，欲切割成(3.4.3.4.)之共球等邊多面體，由此正六面體之頂點向邊長取 $\frac{a}{2}$

如圖 6-1 切割，即得(3.4.3.4.)之共球等邊多面體，如圖 6-2

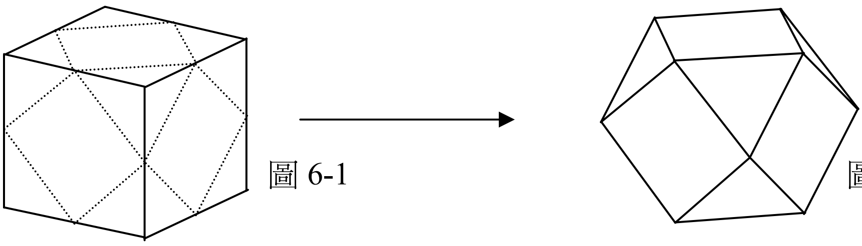


圖 6-1 圖 6-2

7.(3.5.3.5.)

若一正十二面體邊長爲 a，欲切割成(3.5.3.5.)之共球等邊多面體，如圖 7-2，則可由此正十二面體之頂點向邊長取 $\frac{a}{2}$ 如圖 7-1 切割， 即得(3.5.3.5.)之共球等邊多面體

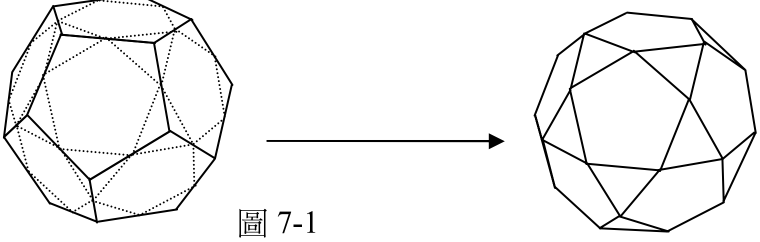


圖 7-1 圖 7-2

8.(4.6.8.)

若一正六面體邊長爲 a，欲切割成(4.6.8.)之共球等邊多面體，則可由每邊向面取

$\frac{4a-\sqrt{2}a}{14} \approx 0.1847a$ 切割，如圖 8-1，則得圖 8-2，再如圖 8-2 把四邊形每一頂點向其邊長取

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$ ，如圖 8-2 切割，則得(4.6.8.) 之共球等邊多面體，如圖 8-3

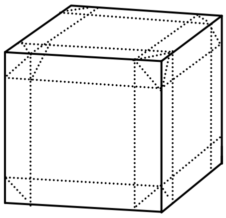


圖 8-1

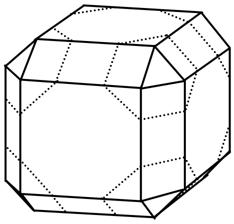


圖 8-2

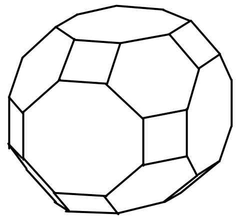


圖 8-3

9.(4.6.10.)

若有一正十二面體邊長爲 *a* 時，欲切割成(4.6.10)的共球等邊多面體，作每一邊的平行線在面上距離邊爲 0.1902*a* 予以切割如圖 9-1，得圖 9-2，再把五邊形每頂點向其邊取 0.2000*a*，如圖 9-2 切割，則得(4.6.10) 之共球等邊多面體，如圖 9-3 。

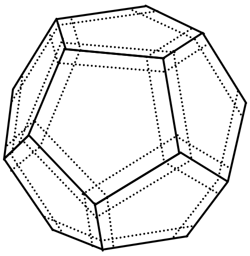


圖 9-1

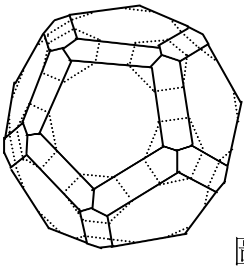


圖 9-2

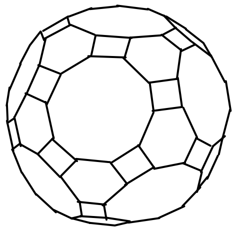


圖 9-3

10.(3.4.5.4.)

若有一正十二面體邊長爲 *a* 時，欲切割成(3.4.5.4.)的共球等邊多面體，作每一邊的平行線在面上距離邊爲 0.3170*a* 予以切割如圖 11-1，得圖 11-2，再如圖 11-2 切割，則得(3.4.5.4.) 之共球等邊多面體，如圖 11-3

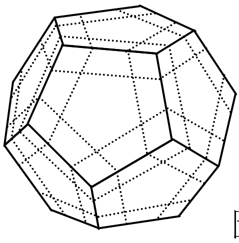


圖 11-1

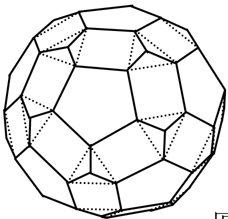


圖 11-2

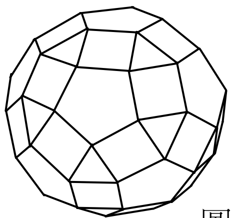


圖 11-3

11.(4.3.3.3.3.)

如果有一正方體，邊長爲 *a* 時，欲切割成(4.3.3.3.3.)的共球等邊多面體，可以用圖 12-1*a*:*b* 的比例（0.6605：0.2238）標出每面的正方形座標，再將圖 12-2 中類似△*ABC* 的所有三角形比例切割，則可得(4.3.3.3.3.)如圖 12-3

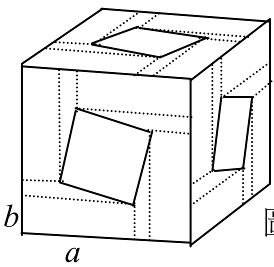


圖 12-1

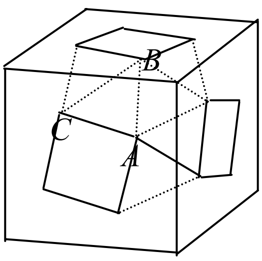


圖 12-2

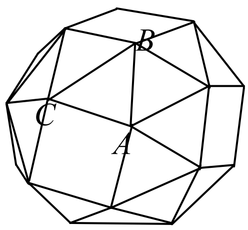
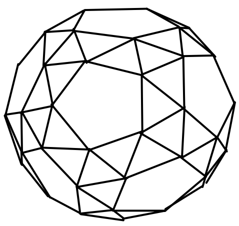


圖 12-3

12.(5.3.3.3.3.)目前無法求出切割比例


(5.3.3.3.3.)

13.(3.4.4.4)

頂點(3.4.4.4)可造成兩種不同的立體構造，分述如下；

(3.4.4.4)-1

若有一正六面體邊長爲 *a* 時，欲切割成(3.4.4.4)的共球等邊多面體，可由此正方面體的頂點向邊長取 $\frac{2a-\sqrt{2}a}{2}$ 切割如圖 13-1，則得(3.4.4.4) 之共球等邊多面體，如圖 13-2

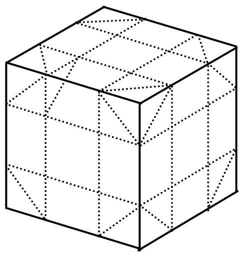


圖 13-1

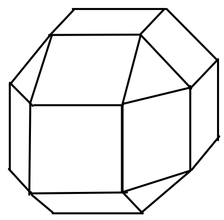
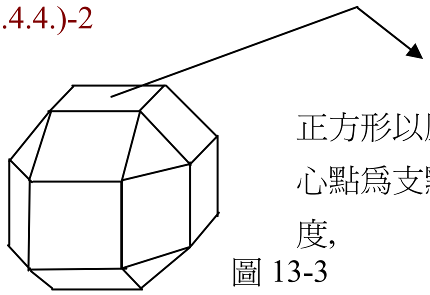


圖 13-2

(3.4.4.4.)-2



正方形以原面上的中心點爲支點，旋轉 45 度,

圖 13-3

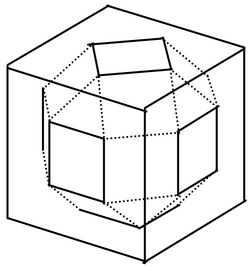
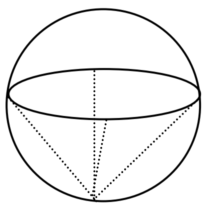


圖 13-4

（五）找出所有頂點構造不同的共球等邊多面體

如果頂點 *P* 構造和頂點 *Q* 構造可以相接，且能在同一個共球等邊多面體上，那必有兩個條件：

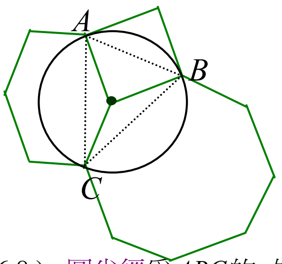


(1) *P*、*Q* 的外接球大小相等

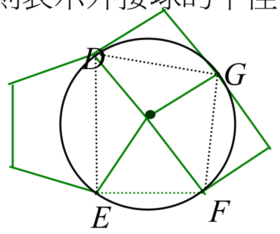
(2) *P*、*Q* 中必含有兩個相同邊數的正多邊形

1.如何比較頂點構造不同的外接球大小:

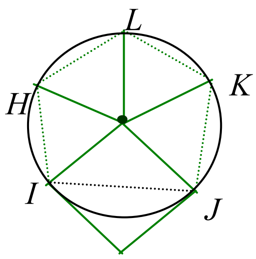
(1)在球面上，以小於球直徑的長度，可在球面上畫出一個圓(如上圖)，令所有頂點構造所延伸出來的邊長均爲 1(等邊)，因此我們可以比較頂點延伸出的端點所連成的圓半徑（以下簡稱圓半徑），如果這種圓半徑相等，則表示外接球的半徑也相等。



(4.6.8.): 圓半徑爲 *ABC* 的 外接圓半徑



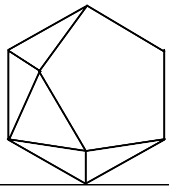
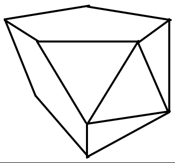
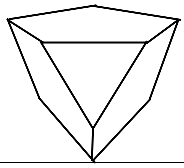
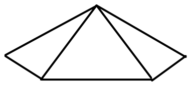
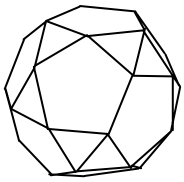
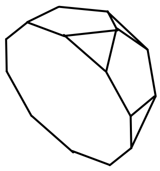
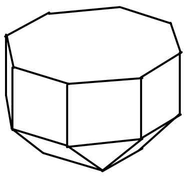
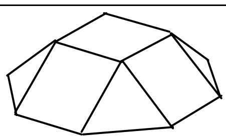
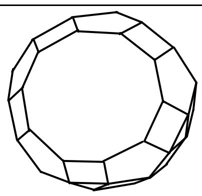
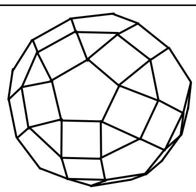
(3.4.4.5.): 圓半徑爲 *DEFG* 的外接圓半徑

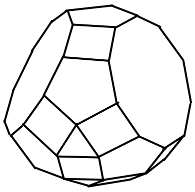
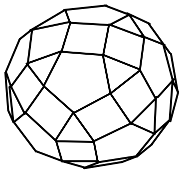
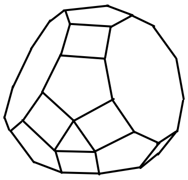
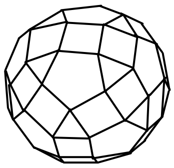
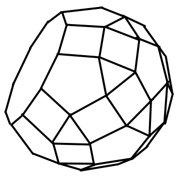
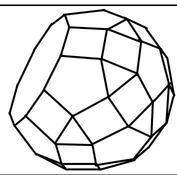
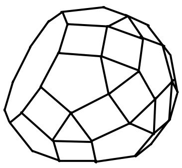
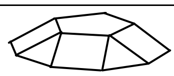
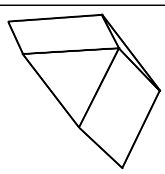
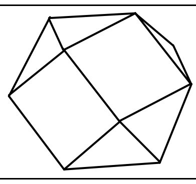
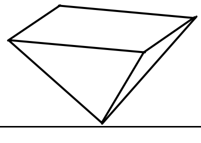


(3.3.3.3.5.) :圓半徑爲 *HIJKL* 的外接圓半徑

(2)由於一個頂點最多有五個面，所以不同頂點構造所連成的圓均是三邊形、四邊形、五邊形的外接圓，又我們可以求出這些多邊形的邊長，因此求出外接圓半徑，也就是我們用來比較的圓半徑。

2.頂點構造不同，但圓半徑相同，且可存在於同一共球等邊多面體的共有 21 個，如下表。

編號	圖	頂點構造	圓半徑
（1）		(3.3.3.5.) (3.3.3.3.3.)	0.850651
（2）		(3.3.3.5.) (3.5.5.) (3.3.3.3.3.)	0.850651
（3）		(3.5.5.) (3.3.3.5.)	0.850651
（4）		(3.3.3.3.3.) (3.3.5)	0.850651
（5）		(3.5.3.5.) (3.3.5.5.)	0.951057
（6）		(3.5.3.5.) (3.5.10)	0.951057
（7）		(3.4.4.4.) (4.4.8)	0.933949
（8）		(3.4.4.4.) (3.4.8.)	0.933949
（9）		(4.5.10) (3.4.5.4.)	0.974608
（10）		(3.4.5.4.) (3.4.4.5.)	0.974608

（11）		(4.5.10.) (3.4.5.4.)	0.974608
（12）		(3.4.4.5.) (3.4.5.4.)	0.974608
（13）		(4.5.10) (3.4.5.4.)	0.974608
（14）		(3.4.4.5.) (3.4.5.4.)	0.974608
（15）		(3.4.5.4.) (4.5.10.) (3.4.4.5.)	0.974608
（16）		(3.4.4.5.) (3.4.5.4.) (4.5.10.)	0.974608
（17）		(3.4.4.5..) (3.4.5.4.) (4.5.10.)	0.974608
（18）		(3.4.5.4.) (3.4.10)	0.974608
（19）		(3.4.3.4.) (3.4.6.)	0.933949
（20）		(3.3.4.4.) (3.4.3.4.)	0.933949
（21）		(3.3.4.) (3.3.3.3.)	0.707107

四、結論：

1.除了鼓形(無限多個)、柱體(無限多個)、正多面體(５個)

2.頂點構造相同的共球等邊多面體共有 14 個，

頂點構造不同的共球等邊多面體共有 21 個。

3.頂點構造相同的共球等邊多面體，如下表：

頂點構造	切割來源	切割方式	切邊的邊長比例	切角的邊長比例
(3.6.6.)	正四面體	切角		1:1:1
(3.8.8.)	正八面體	切角		$\frac{\sqrt{2}}{2}:1:\frac{\sqrt{2}}{2}$
(3.10.10.)	正八面體	切角		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}:1:\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
(4.6.6.)	正八面體	切角		1:1:1
(5.6.6.)	正十二面體	先切邊再切角		1:1
(3.4.4.4.)-1	正六面體	先切邊再切角	向面取$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$	
(3.4.4.4.)-2	正六面體	由(3.4.4.4.)-1 "轉一個蓋"而成		
(3.4.3.4.)	正六面體	切角		1:1
(3.5.3.5.)	正十二面體	切角		1:1
(4.6.8.)	正六面體	先切邊再切角	向面取 0.1847 a	四邊形頂點向其邊長取 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$
(4.6.10)	正十二面體	先切邊再切角	向面取 0.1902a	五邊形頂點向其邊取 0.2000a
(3.4.5.4.)	正十二面體	先切邊再切角	向面取 0.3170 a	
(4.3.3.3.3.)	正六面體	利用 0.6605:0.2238 的比例如圖 12-2 切割		
(5.3.3.3.3.)	正十二面體			

4.頂點構造不同的共球等邊多面體均由頂點構造相同的共球等邊多面體”切割”及”轉”而來。

※ 除了鼓形、柱體、正多面體外，共有 35 個共球等邊多面體。

5.(5.3.3.3.3.)的切割比例尚未求出，有朝一日再處理。

五、參考資料：

1.國中數學課本第四冊 幾單的立體圖形

2.國中數學課本第六冊選修 三角函數

評語：

把球的內接等邊多面體做了完整的分類，細膩完整，表達生動。運用百利智慧片等具體物幫助解說及計算，考慮週到，令人印象深刻。

球的內接等邊多面體來自阿基米得多面體及正多面體的擴充，是合適的科展問題，過去未見有此題材，足見做此題材的人需要很好的立體空間的思考能力。

作者簡介

許程傑

從小就對數學充滿興趣。這次有機會與同學、老師一同從事數學研究態度及研究方式，其過程雖然辛苦，然獲益良多。今後我仍會秉著孜孜不倦的研究精神去探索、挑戰數學，繼續開發研究之路。

林守望

我的興趣是自然和數學。從小最崇拜愛迪生，期許自己亦能研究發明。上國中後，在老師殷殷的啓迪下，使我對數學研究興趣更加濃厚。今年和三位同學共同研究科展，學到了更多解題方法和切磋研究的精神。今後我將更努力，朝我的目標及興趣邁進。

謝宗叡

自小便對數學、科學有著濃厚的興趣。國中時，在數學老師孜孜不倦的教誨及善誘下，我對數理方面的探究更覺有趣。而此次科展的研究過程，讓我學習到正確的研究態度，及學問的浩瀚深遠。今後我將更虛心探索宇宙奧妙之處，期盼人生有一番成就。

張涵鈞

對數學，從小因曾獲全國心算第三名起就有一份特殊的情感；而國中在老師循循善誘的啓發下，更加強我對數學的興趣；此次有幸與同學一起研究數學，除了使我在數學的領域上又望前邁進一大步外，更令我真正學習到“鍥而不捨，金石可鏤”的做事精神，相信這將是我此次得獎的最佳斬穫。