作品名稱： 數字黑洞

高小組　數學科　第一名

縣市：台北市　　　　　　　　　　作者：李光宇

校名：台北市立東湖國民小學　　　指導教師：張景翔、洪金城

關鍵詞：等價、大小排列之差

一、研究動機

我發現在三位數中，只要數字不完全相同，將數字由大到小的排列減去由小到大的排列（以下簡稱大小排列之差），所得到的差數再用同樣的規則繼續算下去，最後的結果一定是 495。比如說一開始我們選定 252，則 252→522－225＝297→972－279＝693→963－369＝594→954－459＝495。而把 495 不管再用同樣的規則做幾遍，結果還是一樣 495，我又試了許多其他的數，結果都是一樣 495，這樣的現象類似黑洞（進去後就出不來了）。這個問題很有趣，所以我打算去研究和探討。

二、研究目的

（一）三位數的黑洞是不是只有 495？
（二）三位數進入黑洞的路徑圖是怎樣的？而三位數以上又是什麼情況呢？
（三）如果黑洞存在，最多幾步就會掉入黑洞？黑洞的形式又是什麼樣子？
（四）其他位數有沒有黑洞，如果有的話，是不是只有一個？

三、研究器材

紙、筆、電腦

四、研究過程

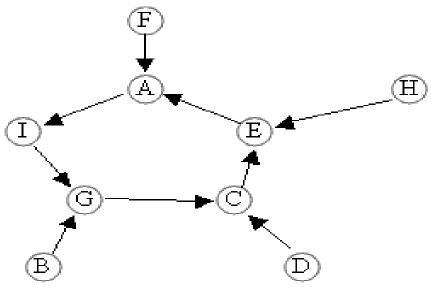
（一）如果一個數一個數去算的話，三位數要計算上百次，而四位數以上更不用說了，這樣毫無頭緒的計算非常沒有效率，於是我想出了一個有系統的分析方法來計算。

1.首先我定義一個「等價」的觀念：兩個不同的數，若它們會對應到相同的結果，就稱它們爲「等價」，以符號『≈』來表示。

（二）首先分析二位數：

定義：

	A (10)	B (20)	C (30)	D (40)	E (50)	F (60)	G (70)	H (80)	I (90)
包含的數	10 21 32 43 54 65 76 87 98	20 31 42 53 64 75 86 97	30 41 52 63 74 85 96	40 51 62 73 84 95	50 61 72 83 94	60 71 82 93	70 81 92	80 91	90
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	09 (90)	18 (70)	27 (50)	36 (30)	45 (10)	54 (10)	63 (30)	72 (50)	81 (70)

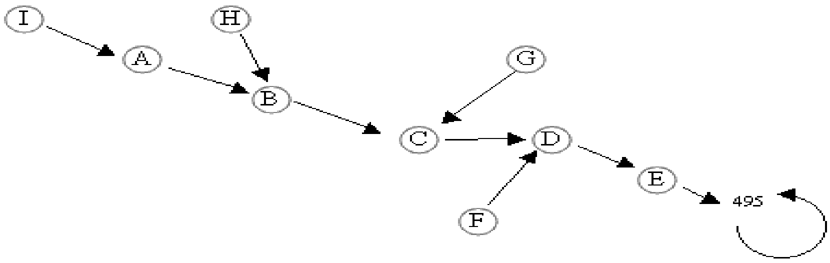


二位數分析後的結論：二位數並沒有黑洞，而是一個循環。

（三）三位數的分析：

三位數無論由大排到小或由小排到大，中間的數都會一樣，大小排列之差，中間必然是一個 9。

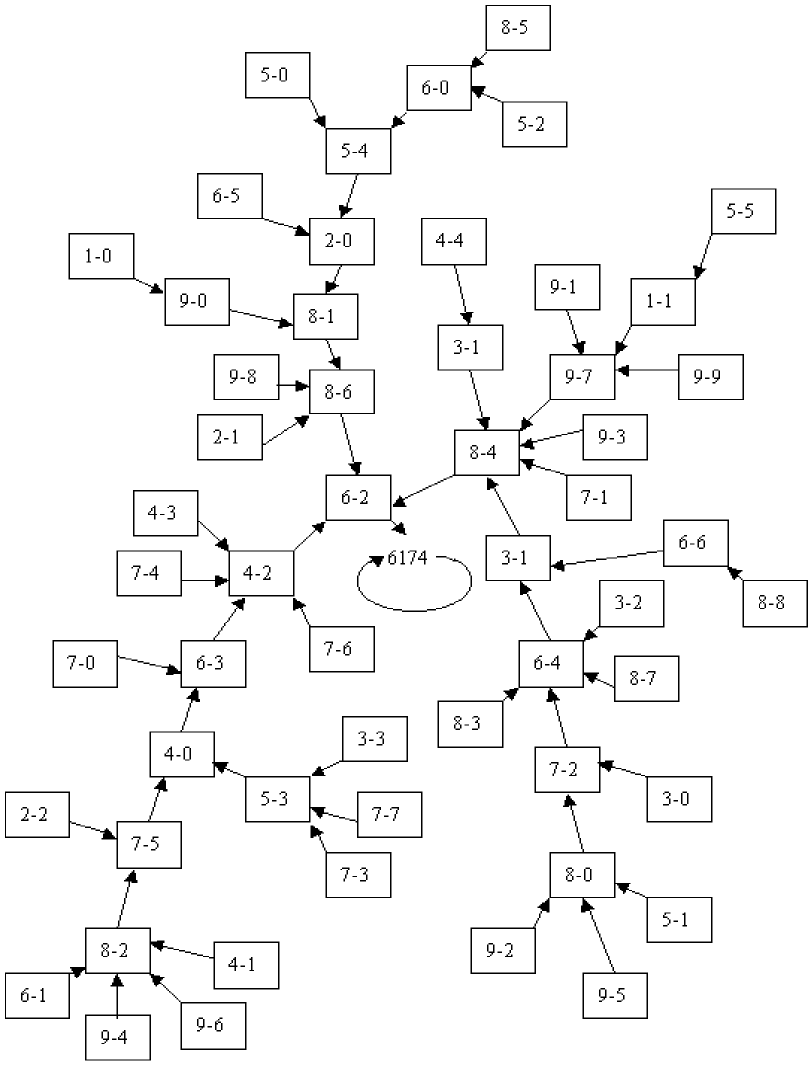
A	B	C	D	E	F	G	H	I
(900)	(800)	(700)	(600)	(500)	(400)	(300)	(200)	(100)
891	792	693	594	495	396	297	198	099



三位數只有一個黑洞 495，不論哪一個三位數總是會在六步之內到達黑洞。

（四）分析四位數：以 A-B ≈ $x\,y\,z\,u$ 表示四位數，其中 $9 \geq x \geq y \geq z \geq u \geq 0$ 且 A= $x-u$，B= $y-z$；A-B 必能充分的表達四位數的同一族群(證明略)

(分析表列於附件)四位數之路徑圖



四位數分析後的結論：

我們得到證明，任意四位數（四個數字不可完全相等）都會到達唯一的黑洞 6174，而且至多七步就會到達黑洞。

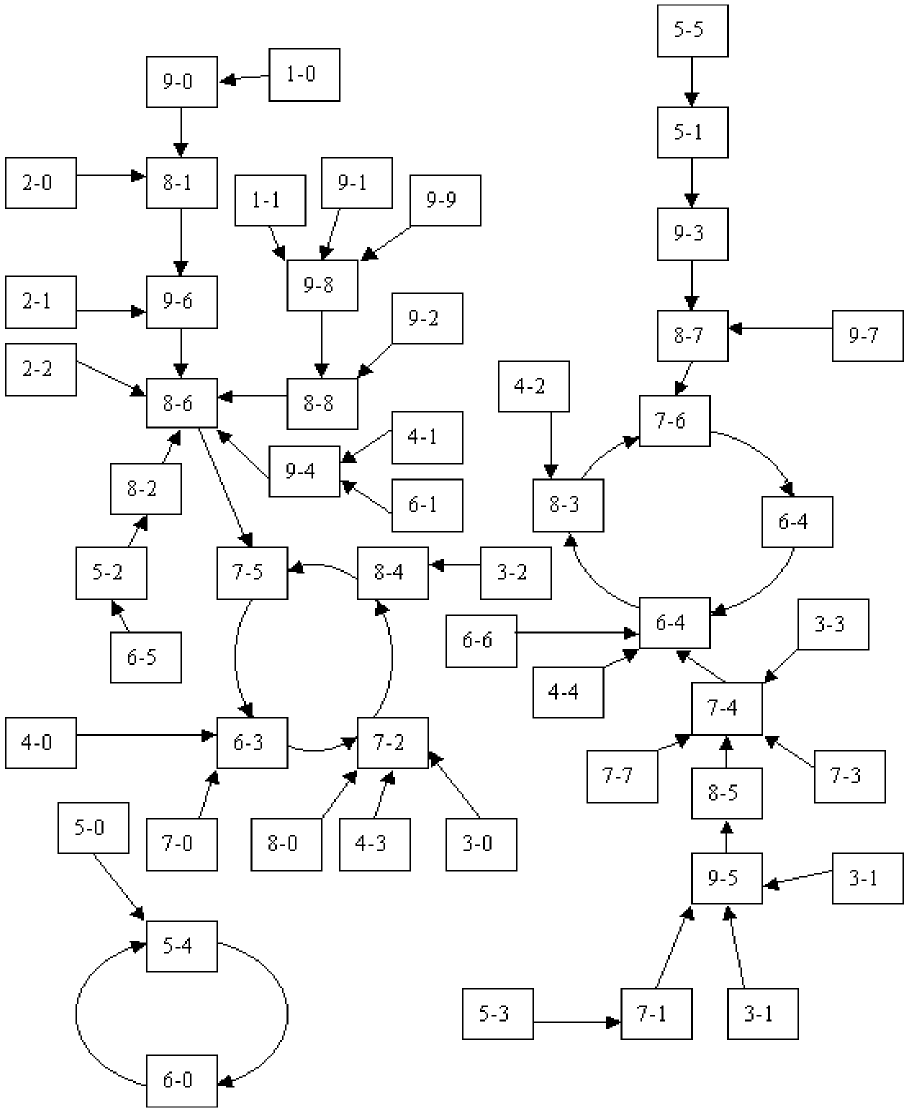
（五）分析五位數的狀況：

五位數和四位數的情況類似，同時五位數的第三位數字在排列大小都不

會改變位置，兩者之差必出現一個 9。

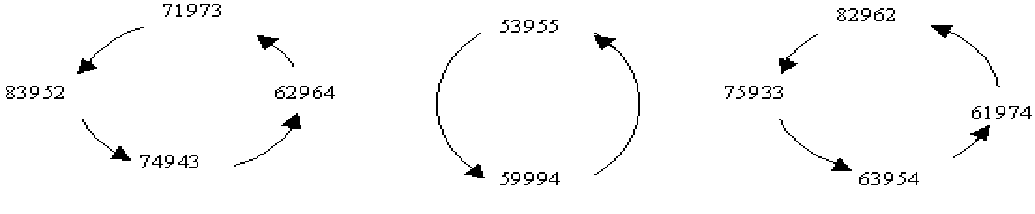
設五位數爲 $xyzuv$ 以 A-B 表示(分析表列於附件)

五位數之路徑圖



五位數分析後的結論：

五位數沒有黑洞，有三個循環，路徑簡圖以下圖表示：



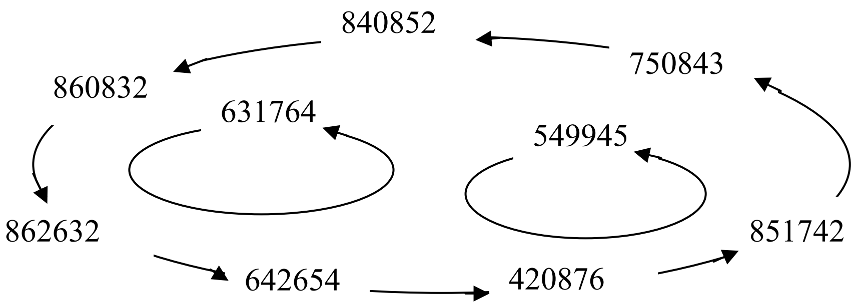
（六）六位數之分析

首先定義($abcd$)表示六位數的族群，其中 a 爲六位數中最大與最小的數字之差，b 表示第二大數字與第三大數字之差，c 表示第三大數字與第四大數字之差，d 表示第四大數字與最小的數字之差

我發現在求大小排列之差的計算規則時，影響結果的因素就是開頭所定義的 $abcd$ 而已(證明於附錄)，而且 $b+c+d \le a$(證明於附錄)

由六位數的分析得到

六位數之路徑圖（路徑簡圖）



六位數分析後的結論：

六位數有兩個黑洞，一個由有七個數組成的大循環。

（七）七位數之分析

七位數的分析法，和六位數的分析法大同小異，第四位數字並不需要考慮（因爲經過計算後會被抵銷，並形成一個 9）。

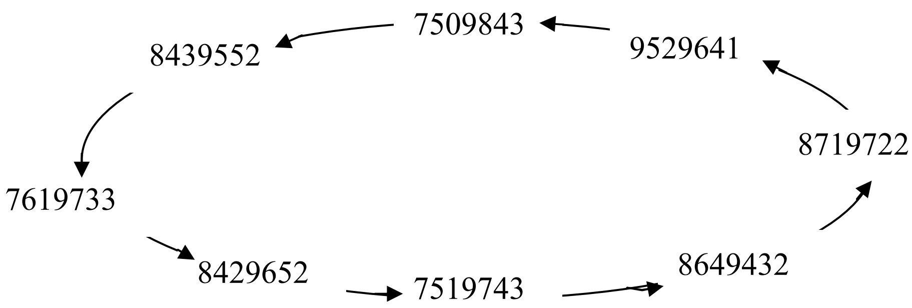
將七位數寫成 $x\,y\,z\,u\,v\,r\,s$，且 $9 \geq x \geq y \geq z \geq u \geq v \geq r \geq s \geq 0$

以數字族群（$abcd$）$\approx x\,y\,z\,u\,v\,r\,s$，其中

$a = x - s$; $b = y - z$; $c = z - v$; $d = v - r$

由七位數分析得到

七位數之路徑圖（路徑簡圖）



七位數分析後的結論：

七位數沒有黑洞，只有一個大循環，這個大循環的成員共計有八個數。

（八）八位數之分析

研究八位數的狀況，對於黑洞理論的瞭解之認識是非常重要的，它有助於我們檢視黑洞和循環是否有規則？找到規則的話就可以推廣到更高位數，使我們對高位數有更進一步的認識。若套用六位數的分析法，八位數的分組族群將超過 5000 組，所以我們必須想一個更聰明的方法，既能避免龐大族群的計算，又不會影響我們找的黑洞和循環的結果。

以八位數族群（$abcdef$）$\approx x\,y\,z\,u\,v\,r\,s\,t$，且 $9 \geq x \geq y \geq z \geq u \geq v \geq r \geq s \geq t \geq 0$，

$a = x - t$; $b = y - z$; $c = z - u$; $d = u - v$; $e = v - r$; $f = r - s$

我們就從八位數中可能被對應的數字來著手

首先將八位數 $xyzuvrst$ 改寫爲：

$(a+t)\ (s+b+c+d+e+f)\ (s+c+d+e+f)\ (s+d+e+f)\ (s+e+f)\ (s+f)\ s\quad t$

現在開始計算八位數由大到小和由小到大排列之差

狀況一：$d \geq 1$（$d \neq 0$）

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & (a+t) & (s+b+c+d+e+f) & (s+c+d+e+f) & (s+d+e+f) & (s+e+f) & (s+f) & s & t \\
- & t & s & (s+f) & (s+e+f) & (s+d+e+f) & (s+c+d+e+f) & (s+b+c+d+e+f) & (a+t) \\
\hline
 & a & (b+c+d+e+f) & (c+d+e) & (d-1) & (9-d) & (9-c-d-e) & (9-b-c-d-e-f) & (10-a)
\end{array}
$$

狀況二：$d=0$, $c+e\geq 1$ ($d=0$, 而 c 和 e 不全為 0)

	$(a+t)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+e+f)$	$(s+f)$	s	t
—	t	s	$(s+f)$	$(s+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(a+t)$
	a	$(b+c+e+f)$	$(c+e-1)$	9	9	$(9-c-e)$	$(9-b-c-e-f)$	$(10-a)$

狀況三：$d=0$, $c=0$, $e=0$, $b+f\geq 1$ ($c=0$, $d=0$, $e=0$, b 和 f 不全為 0)

	$(a+t)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+e+f)$	$(s+f)$	s	t
—	t	s	$(s+f)$	$(s+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(a+t)$
	a	$(b+f-1)$	9	9	9	9	$(9-b-f)$	$(10-a)$

狀況四：$b=0$, $c=0$, $d=0$, $e=0$, $f=0$

	$(a+t)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+e+f)$	$(s+f)$	s	t
—	t	s	$(s+f)$	$(s+e+f)$	$(s+d+e+f)$	$(s+c+d+e+f)$	$(s+b+c+d+e+f)$	$(a+t)$
	$(a-1)$	9	9	9	9	9	9	$(10-a)$

分析：八位數中會被對應的數字，只有上述四種狀況，我就從最簡單的狀況四開始討論

狀況四：第一位數字＋最後一位數字＝ 9 ，其餘位數都是 9

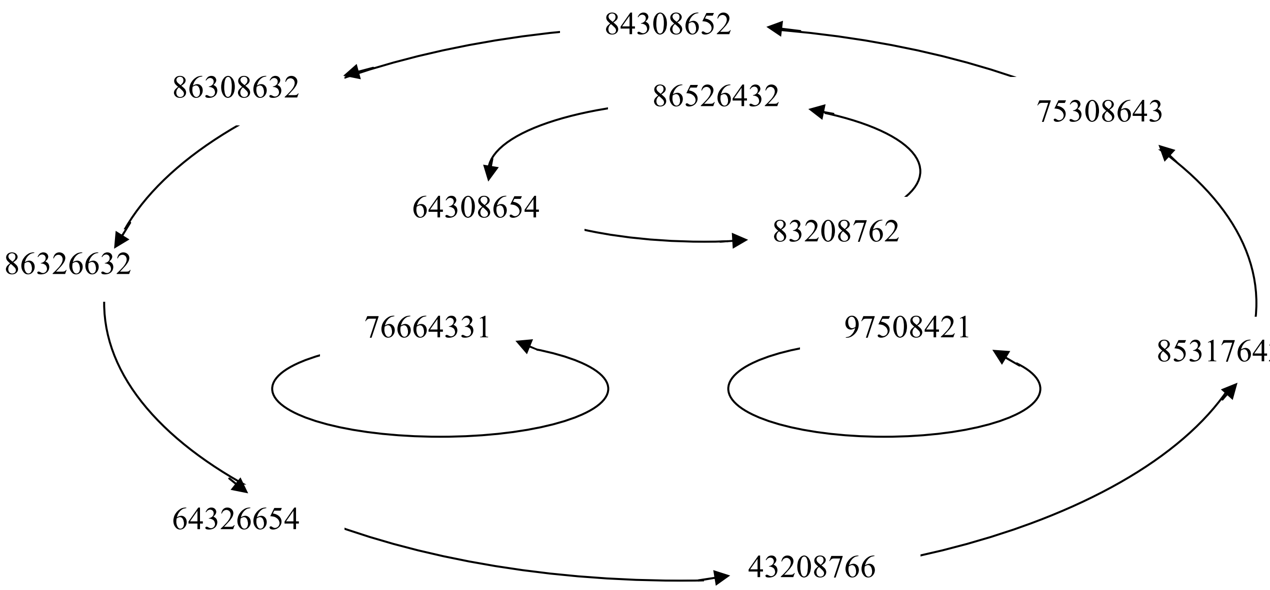
狀況三：第一位數字＋最後一位數字＝ 10，第二位數字＋倒數第二位數字＝ 8，中間四位都是 9

狀況二：第一位數字＋最後一位數字＝ 10，第二位數字＋倒數第二位數字＝ 9，第三位數字＋倒數第三位數字＝ 8， 其餘中間二位都爲 9

狀況一：第一位數字＋最後一位數字＝ 10，第二位數字＋倒數第二位數字＝ 9，第三位數字＋倒數第三位數字＝ 9，第四位數字＋倒數第四位數字＝ 8，

這樣有條件的選取族群可將 5000 多組刪減到 700 多組，而且不會影響結果，因爲不論是黑洞或是循環，它們都是被對應的數。

由八位數分析表(如附件三)，我們得到：八位數共有兩個「黑洞」和兩個循環(一個由 3 個數字組成，另一個由 7 個數組成)，它的路徑簡圖如下：



八位數分析後的結論：

比較三位數、四位數、六位數、八位數的狀況，有了以下重大發現：

三位數的黑洞：495

四位數的黑洞：6174

六位數的黑洞：631764、549945

八位數的黑洞：63317664、97508421≈98754210　　我發現

（1） 四位數的黑洞 6174 再加上相同數目的 3 和 6，仍然是黑洞(可推廣至 10、12、14、…….位數)

（2） 而三位數的黑洞 495 再加上相同數目的 495，也是黑洞(可推廣至 9、12、15、…位數)

（3） 我在八位數的黑洞 97508421 ≈ 98754210 中加入相同數目的 6 和 3，也是黑洞；(可推廣至 10、12、14…………..位數)

（4） 比較六位數七個數字成員的循環和八位數七個成員的循環：

六位數的循環(七個成員)

840852→ 860832→ 862632→ 642654 → 420876 → 851742→750843 →840852

八位數的循環(七個成員)

84308652→86308632→86326632→64326654→ 43208766 →85317642→75308643→ 84308652

我發現八位數的循環就是六位數的循環的推廣,也就是六位數的循環加入一組 6 和 3，我試著改變 6 和 3 的數目，發現只要 6 和 3 的數目一樣，必然是一個由七個成員組成的大循環，由此可看出，10、12、14…….位數，都至少有一個由七個成員組成的大循環。

（5）八位數中另外一個由三個成員組成的循環：

八位數的循環(三個成員)

83208762→ 86526432→64308654 → 83208762

我試著加入 6 和 3，發現也是循環

8332087662 → 8656263432 → 6433086654 → 8332087662

我還發現，加入更多的 6 和 3，只要 6 和 3 數目相同，它都是循環

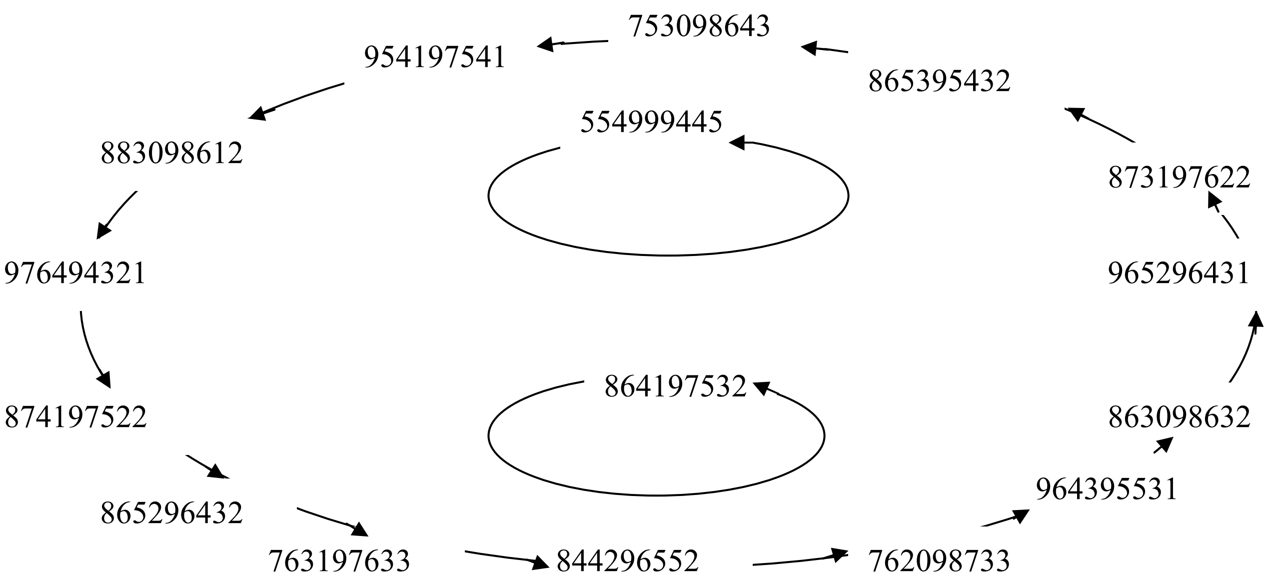
(可推廣至 10、12、14……..位數)

（6）根據(1)到(5)的分析，可以推論十位數以上的偶數位數，必有以下的性質：

1. 至少有兩個黑洞，若是 6 的倍數，至少有三個黑洞。
2. 至少有兩個循環，一個是有七個成員，一個有三個成員。

（九）九位數之分析

九位數的分析法，和八位數的分析法大同小異，第五位數字 v 並不需要考慮(因爲經過計算，結果都會被抵銷，並造成一個 9)。由九位數的分析表（如附件四），我們得到九位數中只有一個由十四個數組成的大循環和二個黑洞，循環和黑洞成員的簡圖如下：



九位數分析後的結論：

1. 九位數的分析中，黑洞 554999445 ≈ 999555444 與我們的預期相符，另一

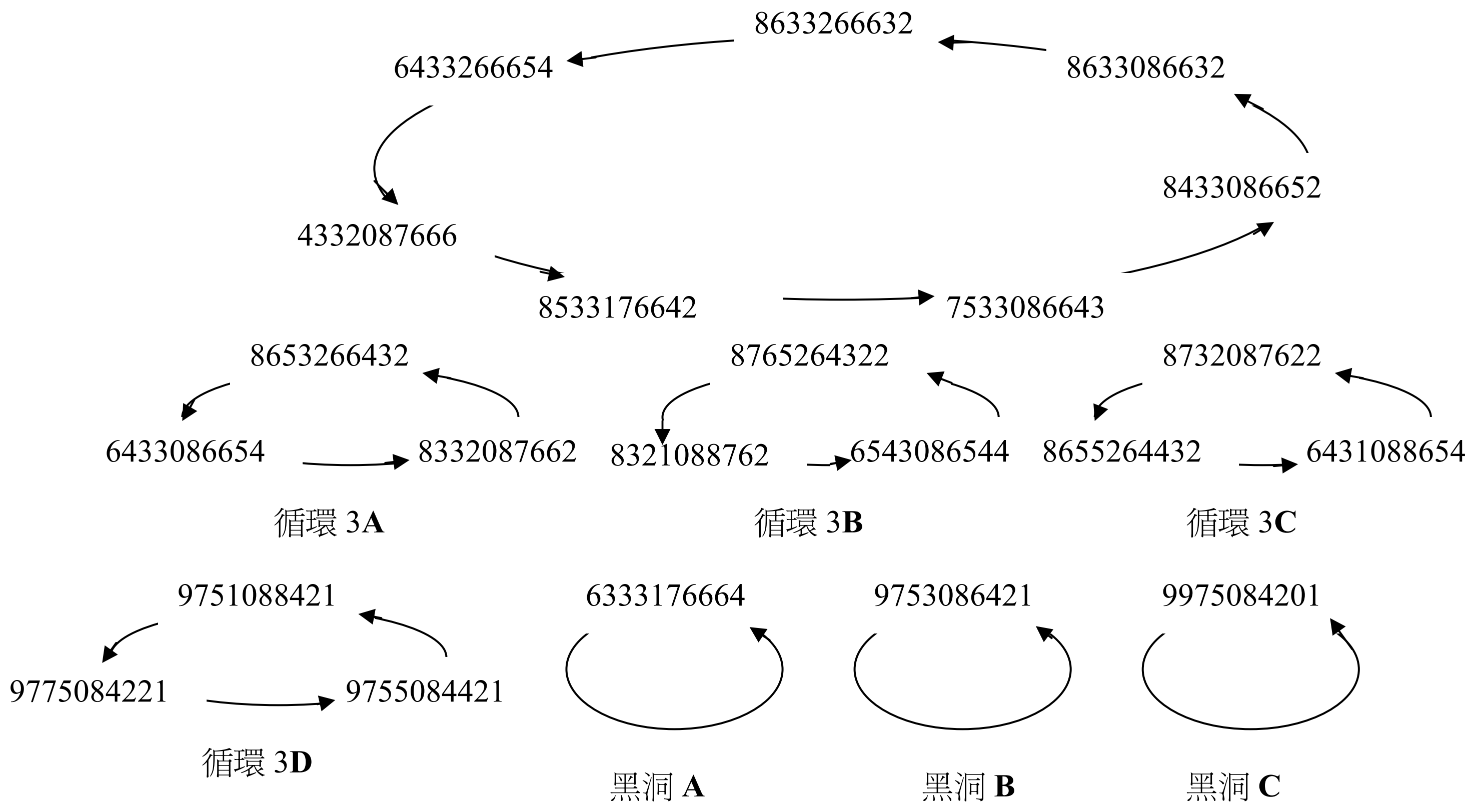
個黑洞 864197532≈987654321 （這是一個新發現的黑洞）。而這 14 個成員的循環與前面低於九位數的循環比較，目前還看不出規則。

2. 九位數的黑洞 864197532，我試著加入一組 6 和 3，發現是黑洞，加入更多相同數目的 6 和 3 也是黑洞（可推廣至 11、13、15……位數）

（十）十位數之分析

在八位數的分析中，我們預測十位數中至少有兩個循環和兩個黑洞，當然，可能還有其他的循環和黑洞等待著我們去發掘，而且分析的位數愈高，愈能找到循環和黑洞的規則，但是十位數的個數實在太多了，即使使用八位數中的改良分類法來分類都要近四千組，而且我發現改良分類法其實還是可以再改進（因為它重複太多了），於是想出了更精細的方法來分類十位數。（分析表如附件）

這樣精細的分組可避免重複並可將十位數（約一百億個不同的數）分成 5＋25＋125＋125＋250＋125＋500＋250＝1405 個減少重複而且關鍵的被對應十位數字。由十位數分析表，我們得到十位數中至少有一個七個成員和一個三個成員的循環（在八位數的分析中已有預測），但經過我實際的計算後，又發現了三個循環和一個不同的黑洞，黑洞 A 是 6174 的推廣（八位數結論 1），黑洞 B 是 97508421 的推廣（八位數結論 3），由而黑洞 C 的組合更加有趣，我將在結論中詳細討論。



十位數分析後的結論：

(1) 十位數的黑洞 C 加入相同數目的 6 和 3，仍然是黑洞（可推廣至 12、14、16…位數）

(2) 十位數的黑洞 C 加入相同數目的 9 和 0，仍然是黑洞，可與結論(1)合併，不會影響結果（可推廣至 12、14、16………位數）

(3) 任何黑洞只要最大的數字是 9，最小的數字是 0 的話，我們加入相同數目的 9 和 0，它仍然是黑洞，不會影響結果，例如十位數中的黑洞 B、黑洞 C 都合乎條件（可推廣至 12、14、16………位數）

(4) 根據結論（1）（2）（3）的分析，可以推論得到黑洞 B、黑洞 C 的綜合推廣：9……..9 9 8 7 6……6 5 4 3……3 210 0……..0 也是黑洞，只要 9 和 0 的數目一樣，6 和 3 的數目一樣，即使數目是 0 也不影響是黑洞的結果

結論（3）也可以適用在循環的規則，也就是：如果有一個循環它的每一個成員都有 9 和 0，則每一個成員加入相同數量的 9 和 0，仍然是循環，例如十位數中的循環 3D 就可以適用（可推廣至 12、14、16………位數）

(5) 在八位數的分析中，推論了十位數中至少有一個包含三個成員的循環（八位數循環的推廣），正是循環 A：

8332087662 → 8653266432 → 8653266432 → 6433086654

但是循環 B、循環 C、循環 D 有沒有相同的性質呢？答案是有的！循環 B、循環 C、循環 D 加入相同數目的 6 和 3，仍是循環（可推廣至 12、14、16…位數）

五、討論

(一)有趣的對稱數字「98754210」

八位數黑洞 98754210 加入相同數目的 6 和 3，相同數目的 9 和 0，仍然是黑洞，我們可以看出這些數字都是對稱的，它們的和都是 9，那我們加入相同數目的 8 和 1、7 和 2，或 5 和 4，還是黑洞嗎？經過多次計算和分析，得到下面結果：

1. 單純加入 5……5 4……4 或 8…8 1…1 或 7….7 2…..2 它不再是黑洞了，但會是一個由三個數組成的循環（…….. 和…….. 和 …….. 的數目不全相等），例如 988755442110 有二組 8 和 1，一組 7 和 2，二組 5 和 4，它的對應狀況：

   988755442110 → 977510884221 ≈ 988775422110

   988775422110 → 977550844221 ≈ 987755442210

   987755442210 → 975510884421 ≈ 988755442110

   註：它的對應過程很有趣，這三個循環就是 8 和 1， 7 和 2，5 和 4 這三組在輪流換次數

2. 加入的三組數目若都一樣，它必然是黑洞（證明於附錄）

(二) 黑洞和循環之間有什麼關係呢？

許多高位數的黑洞是由低位數的黑洞所推廣的，一樣的，黑洞也可以衍生循環，以下是我研究的結果：

四位數：黑洞 6174 加入「6」「3」爲六位數的黑洞，但無法衍生任何循環

六位數：黑洞 6174 加入「6」「3」「6」「3」爲八位數的黑洞，無法衍生任何循環

八位數：黑洞 6174 加入三組「6」「3」造成十位數的黑洞，也無法衍生任何循環，八位數中另一個黑洞 97508421 加入「6」「3」造成十位數的黑洞 9753086421，但若這個黑洞 97508421 加入「5」「4」則會衍生出十位數的循環

9755084421→ 9751088421 → 9775054221→9755084421

(5、4 ，1、8 ，7、2 三組輪流出現)

十位數：黑洞 9753086421 加入「6」「3」爲十二位數的黑洞，但若十位數中的黑洞 9753086421 加入「5」「4」則會衍生出十二位數的循環

975530864421 → 975310886421 → 977530864221→975530864421

(5、4 ，1、8 ，7、2 三組輪流出現)

是不是循環都是黑洞所衍生的呢？這個答案是否定的，有的循環是循環本身所衍生的，比如說十位數的循環 3B

8765264322 → 6543086544 → 8321088762 → 8765264322

若將 8765264322 加入「5」「4」會造成十二位數的循環

876552644322→ 654310886544 → 873210887622 → 876552644322

(5、4 ，1、8 ，7、2 三組輪流出現)

六、參考資料

（一）十萬個爲什麼 數學篇(II) 國際少年村

（二）在積空間 A^n之函數 $f(h) = h_M - h_m$的定點定理 張淙華

評語：
作者對數字黑洞的問題，做了一個非常深入並且有趣的探討。其創造能力極佳，態度認真，並表達出極大的熱忱。思考性極其完整，並且表達出對此一問題的深刻了解與對學術上的繼續探討方向的可行性。爲一件不可多得的優異作品。

作者簡介

李光宇

最喜歡研究的科目是數學和生物，專長是昆蟲，但是最喜歡數學。兩年前曾獲得台北市第三十二屆科展生物特優。