

作品名稱：數字謎面

高小組 數學科 第二名

縣市：台北市

作者：程大容、方廷方

王玉潔、林琮翰

校名：台北市立師範學院附設實驗國民小學

指導教師：蔡淑英、李偉清

關鍵詞：數字謎面、數謎



# 數字謎面

## 壹、研究動機

有一天，在數學資源教室的團體課中，老師提出了一個研究主題：「數字謎面」。老師問我們一個題目【 $1+1=()$ 】，這個算式中的（）應填入什麼數呢？當我們回答完後，老師請我們把它翻譯成英文，並寫成直式，如下圖：

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} \text{ONE} \\ + \text{ONE} \\ \hline \text{TWO} \end{array}$$

老師接著又說：「請看著你寫成的英文算式，讓每一個英文字母分別代表0、1、2……9中的一個數字，使上面的英文算式成爲一個新的『數字謎面』的問題。在這個問題中，不同的英文字母不可使用同一個數字，同時0不可以在最高位。也就是說，對這個問題而言，因爲英文字母T或O都在最高位，所以T、O所代表的數字都不可以是0；但是N、E或W只要分別代表0、1、2……9中的一個數字就可以了。」

當我們決定好了T、O、N、E和W分別各代表0、1、2……9中的一個數字後，最後還需要再檢查一下這個【三位數】加【三位數】等於【三位數】的問題是否合理？如果合理，我們才可以算是解題成功。

我們小組討論了很久以後，發現這個『數字謎面』的問題一共有16種不同的解法，我們覺得很有趣。我們是否也可以自行設計一些新的『數字謎面』問題，來進行研究呢？在老師的鼓勵與支持之下，我們進行了本研究。

## 貳、名詞釋義

數字謎面：以一個英文字母代表一個數字（0、1、2……9），在同一問題中，不同的英文字母不可使用同一個數字，且0不可以在最高位。

## 參、研究的問題

- 一、設計數字謎面的問題。
- 二、探討我們所設計出來的數字謎面問題是否有解？它們各有多少種不同的解法？

## 肆、設計數字謎面的問題

- 一、研究方法  
(一)把1,2,3,4……10的數字用英文表示

阿拉伯數字	英文	阿拉伯數字	英文
1	ONE	6	SIX
2	TWO	7	SEVEN
3	THREE	8	EIGHT
4	FOUR	9	NINE
5	FIVE	10	TEN

(二)若將被加數和加數分別設定為 1、2、3……10，因為  $1+2=2+1=3$ ，對於數字謎面的問題而言， $ONE+TWO=TWO+ONE=THREE$ ，所以在考慮算式時，我們先把被加數=1 時，加數=1、2、3……10 的 10 種情形全部列出來，接下來再考慮當被加數=2 時，加數=2、3、4、5……10 的 9 種情形全部列出來，依此類推，我們發現共有  $10+9+8+7+\dots+1=55$  種情形。

(三)將以上 55 種算式，它們的被加數、加數與和數分別翻譯成英文，將它們寫成數字謎面的問題，然後再逐一做初步篩選，去除所有不可能成立的問題。

## 二、研究結果

我們一共找到 13 種數字謎面的問題如下表：

編號	算式	數字謎面的問題	使用的英文字母數
一	$1+1=2$	$ONE+ONE=TWO$	5 個
二	$1+4=5$	$ONE+FOUR=FIVE$	8 個
三	$1+7=8$	$ONE+SEVEN=EIGHT$	9 個
四	$2+2=4$	$TWO+TWO=FOUR$	6 個
五	$2+5=7$	$TWO+FIVE=SEVEN$	9 個
六	$3+4=7$	$THREE+FOUR=SEVEN$	10 個
七	$3+5=8$	$THREE+FIVE=EIGHT$	10 個
八	$3+8=11$	$THREE+EIGHT=ELEVEN$	9 個
九	$3+9=12$	$THREE+NINE=TWELVE$	9 個
十	$4+4=8$	$FOUR+FOUR=EIGHT$	9 個
十一	$4+5=9$	$FOUR+FIVE=NINE$	8 個
十二	$4+7=11$	$FOUR+SEVEN=ELEVEN$	9 個
十三	$5+7=12$	$FIVE+SEVEN=TWELVE$	9 個

## 伍、解決數字謎面的問題

探討我們所設計出來的數字謎面問題是否有解，它們各有多少種不同的解法？

### 一、研究方法

(一)針對我們所設計出來的 13 個有關數字謎面的問題，逐一去分析與討論，這些數字謎面的問題是否真的有解？它們的解法各有多少種？

(二)我們將以上 13 個數字謎面的問題，分成有解和無解兩個類型。無解的數字謎面問題提出我們的想法；有解的數字謎面問題設法找出所有可能的解法，並寫出我們的想法。

### 二、研究結果

在我們所設計的 13 個數字謎面問題中，有解的數字謎面問題只有 6 個，無解的數字謎面問題卻有 7 個。如下表：

編號	數字謎面的問題	無解	有解	解法
(一)	ONE+ONE=TWO		●	16 種
(二)	ONE+FOUR=FIVE		●	1200 種
(三)	ONE+SEVEN=EIGHT	●		
(四)	TWO+TWO=FOUR		●	7 種
(五)	TWO+FIVE=SEVEN	●		
(六)	THREE+FOUR=SEVEN		●	36 種
(七)	THREE+FIVE=EIGHT	●		
(八)	THREE+EIGHT=ELEVEN	●		
(九)	THREE+NINE=TWELVE	●		
(十)	FOUR+FOUR=EIGHT		●	32 種
(十一)	FOUR+FIVE=NINE		●	72 種
(十二)	FOUR+SEVEN=ELEVEN	●		
(十三)	FIVE+SEVEN=TWELVE	●		

## 陸、研討六個有解的數字謎面問題

有解的 6 個數字謎面問題，我們針對每一個問題加以分析後，將它們的全部解法記錄下來：

### 一、數字謎面(一)的問題

ONE+ONE=TWO 將它寫成直式如下：

$$\begin{array}{r} \text{O N E} \\ + \text{O N E} \\ \hline \text{T W O} \end{array}$$

#### 【分析】

- (一)因為  $E+E=2E=10+0$  或  $0$ ，所以  $0$  等於偶數。
- (二)因為  $O$  和  $T$  在百位(最高位)，所以  $O \neq 0$  且  $T \neq 0$ 。
- (三)因為  $O \neq E$  且  $O \neq 0$ ，所以  $E \neq 0$  或  $5$ 。
- (四)因為百位數字  $O+O=T$  或  $O+O+1=T$  一位數；且由分析(一)得知  $0$  等於偶數，所以  $O=2$  或  $4$ 。

#### 【解法一至解法八】

當  $O=2$  時，個位數字  $E$  只可能是  $1$  或  $6$ ；百位數字  $T$  只可能是  $4$  或  $5$ 。

【情況一】  $O=2$ 、 $E=1$

【情況二】  $O=2$ 、 $E=6$

$$\begin{array}{r} \text{O}_2\text{N E}_1 \\ + \text{O}_2\text{N E}_1 \\ \hline \text{T W O}_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} \text{O}_2\text{N E}_6 \\ + \text{O}_2\text{N E}_6 \\ \hline \text{T W O}_2 \end{array}$$

情況一	0	E	T	N	W	解法
	2	1	4	3	6	一
			5	7	4	二
				8	6	三
9				8	四	

情況二	2	6	4	0	1	五
				1	3	六
				3	7	七
			5	8	7	八

【解法九至解法十六】

當  $O=4$  時，個位數字  $E$  只可能是 2 或 7；百位數字  $T$  只可能是 8 或 9。

【情況三】  $O=4, E=2$

【情況四】  $O=4, E=7$

$$\begin{array}{r}
 O_4 N E_2 \\
 + O_4 N E_2 \\
 \hline
 T W O_4
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 O_4 N E_7 \\
 + O_4 N E_7 \\
 \hline
 T W O_4
 \end{array}$$

	O	E	T	N	W	解法
情況三	4	2	8	3	6	九
			9	5	0	十
				8	6	十一
情況四	4	7	8	0	1	十二
				1	3	十三
				2	5	十四
			9	5	1	十五
				6	3	十六

綜合上述  $ONE+ONE=TWO$  共有 16 種解法。

## 二、數字謎面(二)的問題

$ONE+FOUR=FIVE$  將它寫成直式如下：

$$\begin{array}{r}
 ONE \\
 + FOUR \\
 \hline
 FIVE
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 ONE \\
 + FOUR_0 \\
 \hline
 FIVE
 \end{array}$$

【分析】

(一)因為個位數字  $E+R=E$ ，所以  $R=0$ ， $E=1、2、3、\dots$  或 9。

(二)因為加數和和數的千位數字都是  $F$ ，所以百位數字的總和  $O+O < 10$ ， $O+O=I$  或  $O+O+1=I$  是一位數，由此可知  $O=1、2、3$  或 4。  $I=2、3、4、5、6、7、8$  或 9。

(三)十位數字的總和，有以下兩種可能：

1.  $N+U=V$ 。 2.  $N+U=10+V$ 。

(四) $F$  和  $E$  最自由，不受其他數字的牽制，只要不用其他字母所代表的數字即可。

(五)由分析(一)~(四)得知，考慮本謎題的解法順序為  $R=0 \rightarrow O=1 \sim 4 \rightarrow I=2 \sim 9 \rightarrow V \rightarrow N+U=V$  或  $N+U=10+V \rightarrow$  最後再考慮  $F$  和  $E$  各有幾個數字可以選擇，即可找到全部的答案。

【解法】

這個數字謎面問題經過我們的研究後發現一共有 1200 種解法，它分布的情形：

(一) $R=0, O=1$  的解法有 288 種。 (二) $R=0, O=2$  的解法有 312 種。

(三) $R=0, O=3$  的解法有 288 種。 (四) $R=0, O=4$  的解法有 312 種。

### 三、數字謎面(四)的問題

TWO+TWO=FOUR 的問題共有 7 種解法，如下表：

情況	F	T	O	R	W	U	解法
一	1	7	4	8	3	6	一
二	1	7	5	0	6	3	二
三	1	8	6	2	3	7	三
					4	9	四
四	1	8	7	4	6	3	五
五	1	9	8	6	2	5	六
					3	7	七

### 四、數字謎面(六)的問題

THREE+FOUR=SEVEN 的問題若要成立，一定要在  $T+1=S$ ，且  $U$  等於 0 或 9 的情況下才有解，本問題一共用了 10 個不同的英文字母，而且數字重複使用的機會特別少，因此它所提供的資訊，在解題的過程中無法發揮太大的功效，故解此題時特別辛苦，必須逐一計算，經過研究後，我們發現它共有 36 種解法，列舉解法(一)至解法(八)如下：

T	S	U	E	R	N	O	V	H	F	解法
1	2	0	3	5	8	4	9	6	7	一
				6	9	8	4	5	7	二
				6	9	8	4	7	5	三
				7	5	8	3	6	7	四
			4	5	9	8	3	6	7	五
			4	5	9	8	3	7	6	六
			5	3	8	4	7	6	9	七
			5	3	8	4	7	9	6	八

### 五、數字謎面(十)的問題

FOUR+FOUR=EIGHT 的問題若要成立，一定要在  $E=1$ ，且  $F$  等於 5、6、7、8 或 9 的情況下才有解，當  $F=5$  時， $I$  一定等於 0，當  $F=9$  時， $I$  一定等於 8，經過研究後，我們發現這個問題共有 32 種解法，列舉解法(一)至解法(七)如下：

E	F	I	O	G	U	H	R	T	解法
1	5	0	2	4	3	7	8	6	一
							9	8	二
			3	7	6	2	4	8	三
					8	6	2	4	四
					9	8	2	4	五
			4	8	3	7	6	2	六
							9	8	7

### 六、數字謎面(十一)的問題

FOUR+FIVE=NINE 的問題若要成立，一定要在  $R=0$ 、 $O=9$  且  $F=1$  或 2 的情況下才有解，當英文字母  $R$ 、 $O$  和  $F$  所代表的數字被固定後，接下來要考

慮的是 N 所代表的數，因為  $U+V=10+N$ ，所以它的解法共可分成以下六種情況來討論，每一種情況各有 12 種解法，所以本問題共有 72 種解法，它的分布情形如下：

情況	R	O	F	N	U	V	E (?種選擇)	I (?種選擇)	解法
一	0	9	1	3	7	6	4 種	3 種	12 種
二					6	7	4 種	3 種	12 種
三					5	8	4 種	3 種	12 種
四					8	5	4 種	3 種	12 種
五			2	5	7	8	4 種	3 種	12 種
六					8	7	4 種	3 種	12 種

## 柒、研討七個無解的數字謎面問題

無解的七個數字謎面問題，我們針對每一個問題加以分析後，將它記錄如下：

一、數字謎面(三)的問題，這個問題無解，我們的想法如下：

ONE+SEVEN=EIGHT 將它寫成直式如下：

$$\begin{array}{r}
 \text{O N E}_9 \\
 + \text{S}_8\text{E}_9\text{V}_9\text{E}_9\text{N} \\
 \hline
 \text{E}_9\text{I}_0\text{G H T}
 \end{array}$$

【分析】

(一)本問題中加數的千位數字一定要進位，所以  $E=9$ ，和數的千位數字  $I=0$ ，加數的萬位數字  $S=8$ 。

(二)考慮被加數和加數末兩位的 N，我們發現當  $N=1\sim 7$  時，則  $N=H$ ，所以本問題無解。

二、數字謎面(五)的問題，這個問題無解，我們的想法如下：

TWO+FIVE=SEVEN 將它寫成直式如下：

$$\begin{array}{r}
 \text{T W O} \\
 + \text{F}_9\text{I V E}_0 \\
 \hline
 \text{S}_1\text{E}_0\text{V E}_0\text{N}
 \end{array}$$

【分析】

(一)因為(三位數)+(四位數)=(五位數)，所以和數的最高位數字  $S=1$ ，加數的千位數字  $F=9$ ，和數的千位數字  $E=0$ 。

(二)因為  $E=0$  且個位數字  $O+E=0+0=N$ ，所以  $O=N$ ，故本題無解。

三、數字謎面(七)的問題，這個問題無解，我們的想法如下：

THREE+FIVE=EIGHT 的問題只有在  $T=8$ ， $E=9$  的情況下，才有可能成立，但是當  $E=9$  時，十位數字的 V 和 H 會相等，因此，本題無解。

四、數字謎面(八)的問題，這個問題無解，我們的想法如下：

THREE+EIGHT=ELEVEN 分析如下：

**【分析】**

(一)因爲(五位數)+(五位數)=(六位數)，所以

1.和數的最高位  $E=1$ ；萬位數字  $L=0$ 。

2.萬位數字  $T+E \geq 10$  或  $T+E+1 \geq 10$ ；此即表示  $T=8$  或  $9$ 。

(二)當  $E=1$ ， $T=8$  時， $H$  一定是  $0$ ，所以  $T=8$  時，本問題無解。

(三)當  $E=1$ ， $T=9$  時， $H$  一定是  $9$ ，所以  $T=9$  時，本問題無解。

(四)綜合以上分析，可知本題無解。

五、數字謎面(九)的問題，這個問題無解，我們的想法如下： $THREE+NINE=TWELVE$

分析如下：

**【分析】**

(一)因爲(五位數)+(四位數)=(六位數)，所以

1.六位數最高位的  $T$  一定= $1$ 。

2.五位數最高位的  $T$  一定= $9$ ，故本題無解。

六、數字謎面(十二)的問題， $FOUR+SEVEN=ELEVEN$  這個問題無解，我們的想法如下：

下：

**【分析】**

(一)因爲(四位數)+(五位數)=(六位數)，所以

1.六位數的最高位  $E$  一定= $1$ 。

2.六位數的萬位數字  $L$  一定= $0$ 。

3.加數 (五位數) 的最高位  $S$  一定= $9$ 。

(二)因爲被加數的個位數字  $R$  和加數的個位數字  $N$  的總和= $N$ ，所以此時  $R=0$ 。

(三)由分析(一)中得知  $L=0$ ，故本題無解。

七、數字謎面(十三)的問題，這個問題無解，我們的想法如下：

$FIVE+SEVEN=TWELVE$  將它寫成直式如下：

$$\begin{array}{r} F_9 I V E \\ + S_9 E V E N \\ \hline T_1 W_0 E L V E \end{array}$$

**【分析】**

(一)因爲(四位數)+(五位數)=(六位數)，所以

1.六位數的最高位  $T$  一定= $1$ 。

2.五位數的最高位  $S$  一定= $9$ 。

3.和數的萬位數字  $W$  一定= $0$ 。

(二)因爲被加數的千位數字  $F$  和加數的千位數字  $E$  的總和等於  $E$ ，且千位數字 一定要進位，此時  $F$  只能等於  $9$ 。

(三)由分析(一)中得知  $S=9$ ；由分析(二)得知  $F=9$ ，故本題無解。



評語：

$\text{one} + \text{one} = \text{two}$ ，每個字母各自代表 0—9 的數字。到底可以創造多少個如此有趣的謎面呢？作者做了完整的搜索，並把所有的答案都用組合總數的方式做了計數。作品的邏輯性及陳述的流暢都是一時之選，是典型的國小六年級的優秀科展力作。

## 作者簡介

我的名字叫做程大容，從小就對數學有很大的興趣。我以前說話總是吞吞吐吐，沒辦法清楚的表達自己的意思，但是經過了這次的研究歷程，我可以在短時間內說清楚一件事，這就是我最大的收穫—越來越像名嘴了。

我的名字叫做方廷方，很喜歡養寵物，專長是彈鋼琴！從小我對數學不是很敏感，但是這次研究卻激起我很大的興趣，回想起這段歷程，覺得好有成就感！我也更相信一句話：「要怎麼收穫，就要怎麼栽！」

我的名字叫做王玉潔，有著一張大餅臉。五年級時，我發現數學其實很有趣，所以開始喜歡上數學。老師給我們這一次科展研究的主題，非常有意思，於是激發我開始研究這個主題。雖然過程辛苦，但我們卻得到相當滿意的結果。

我的名字叫林琮翰，特徵是戴眼鏡、個子小。幼稚園時就會讀故事書，從小就對數學有興趣，一年級學會加減乘除的運算，三年級學會分數四則，五年級時，因為我解決問題總是有個人的獨創風格，因此有了「半仙」這個稱號。