

作品名稱：792 魔術卡

初小組 數學科 第一名

縣市：高雄市

作者：張雅晴、李仁豪

戴馥安、黃立偉

校名：博愛國小

指導老師：潘麗惠、王美惠

關鍵詞：魔術卡、最佳方塊、最佳折法



792魔術卡

一、研究動機:

上一次，我和媽媽一起參觀科學園遊會看到了一張魔術卡，這張魔術卡和我們以前玩的魔術卡不同，但是仔細一看，發現它只是把1、2、3、4和5、6、7、8互換而已。我想，難道魔術卡只能依照舊的魔術卡稍做改變，而沒有其他的變化嗎？所以我就約了一些同學，一起來研究這個問題。

二、研究目的:

1. 探討魔術卡的秘密
2. 徹底算出魔術卡究竟能折出幾個 $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ 方塊
3. 分析魔術卡的折法
4. 做出一些更炫更棒的魔術卡

三、研究器材:

紙、筆、剪刀、電腦、膠帶、豆豆貼紙、大腦6顆。

四、符號定義:

- (一) 魔術卡的位置: 「一2」: 代表正面從上面數來第一橫排，從左邊數來第二個位置。
- (二) 折法的代號:
- | | | |
|------------|------------|-------------|
| 「0」: 原始型 | 「1」: 上邊往前折 | 「2」: 上邊往後折 |
| 「3」: 下邊往前折 | 「4」: 下邊往後折 | 「5」: 左邊往前折 |
| 「6」: 左邊往後折 | 「7」: 右邊往前折 | 「8」: 右邊往後折 |
| 「A」: 上拉 | 「B」: 下拉 | |
| 「C」: 內凹 | 「D」: 往內對折 | 「E」: 往外對折 |
| | | 「*」: 該格數字顛倒 |

五、研究過程及發現:

活動(一) 好奇寶寶家族的疑問:

1、製作原魔術卡 (——表示剪開)

1	1	3	5
2	2	3	4
3	3	2	2
1	1	4	5

6	7	8	6
6	7	8	6
7	8	5	4
7	8	5	4

將原魔術卡相同的4個數字折成 $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ 方塊，結果如下:

1	1
1	1

*2	2
2	*2

3	3
*3	3

4	*4
4	4

5	5
5	5

6	6
6	6

7	7
7	7

8	8
8	8

發現: 有的數字必需要顛倒才能排出" $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ "方塊。

2、園遊會的魔術卡與原魔術卡的關係:

(1) 將原魔術卡橫擺、數字橫寫如下:

1	3	2	1
1	3	2	1
4	2	3	3
5	2	4	5

6	6	4	4
8	8	5	5
7	7	8	8
6	6	7	7

(2) 將1、2、3、4和5、6、7、8互換，就變成園遊會上的魔術卡了!

5	7	6	5
5	7	6	5
8	6	7	7
1	6	8	1

2	2	8	8
4	4	1	1
3	3	4	4
2	2	3	3

3、如果原魔術卡的組合不變，只是直剪改成橫剪，可以折出4個1、4個2...4個8嗎？
我們實際折折看結果發現折法更多變化，但7折不出來。

1	1	3	5
2	2	3	4
3	3	2	2
1	1	4	5

6	7	8	6
6	7	8	6
7	8	5	4
7	8	5	4

4、原魔術卡還有別的玩法嗎？！

正當我們苦惱的時候，好奇妹妹突然高興的說：「姊姊！你看我可以排出和是4的、和是5的、和是6的………？」我們一聽差點昏倒，難道這個魔術卡可以排出和是4~32的方塊嗎？(1X4=4……8X4=32)

活動(二)探討魔術卡的秘密:

1. 原魔術卡可以排出和是4到32的方塊嗎?

答案是可以的，折法如下:

1	1
1	1

(4)

1	1
1	2

(5)

1	1
*3	1

(6)

*2	2
1	*2

(7)

3	3
1	1

(8)

1	4
1	3

(9)

2	3
3	2

(10)

3	2
1	5

(11)

1	5
2	4

(12)

1	5
2	5

(13)

4	2
4	4

(14)

3	5
3	4

(15)

3	5
4	4

(16)

3	5
4	5

(17)

6	3
6	3

(18)

5	5
4	5

(19)

5	5
5	5

(20)

2	*6
5	8

(21)

4	7
4	7

(22)

8	6
5	4

(23)

6	6
6	6

(24)

8	6
5	6

(25)

8	5
8	5

(26)

*6	*6
7	8

(27)

6	7
7	8

(28)

7	7
7	8

(29)

7	8
7	8


(30)


8	8
*7	8

(31)

8	8
8	8

(32)

發現：除了和是4、5、31、32有唯一解以外，其他的和都有許多種組合，可見魔術卡中隱藏著很多””的方塊。

2. 到底魔術卡內隱藏著多少種””的方塊呢?

我們發現原魔術卡不好做紀錄，所以我們決定將魔術卡的位置編號如下:

以二3為例，二3代表著正面從上面數來第二橫排，從左邊數來第三個位置。

一1	一2	一3	一4
二1	二2	二3	二4
三1	三2	三3	三4
四1	四2	四3	四4

(正面)

五1	五2	五3	五4
六1	六2	六3	六4
七1	七2	七3	七4
八1	八2	八3	八4

(背面)

我們排了許多方塊，如下：(附件一)

一 1	一 2
四 1	四 2

*	三 3
二 1	
二 2	*
	三 4

三 2	一 3
*	二 3
三 1	

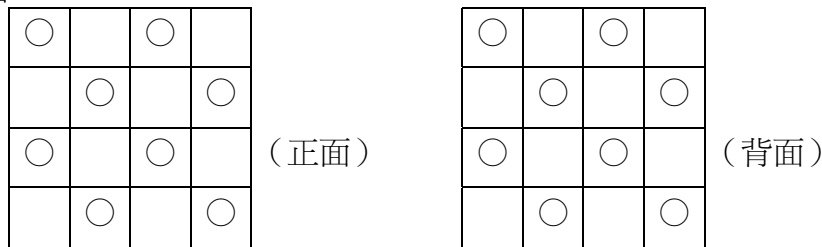
七 4	*
	二 4
八 4	四 3

一 4	七 3
四 4	八 3

五 1	五 4
六 1	六 4

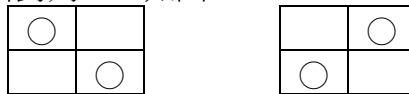
- 發現：**
- (1) 如果上面的國字方塊是國字的奇數，下面的方塊就是國字的偶數。
 - (2) 如果左邊的方塊是阿拉伯數字的奇數，右邊的方塊就是阿拉伯數字的偶數。
 - (3) 奇數與偶數好像是磁鐵的正負極，同極相斥，異極相吸。
 - (4) 更有趣的是，如果數字是倒置的，它的奇偶性就相反了。

3. 魔術卡的奇偶性讓我們聯想到老師給我們玩的黑白串珠，如果在魔術卡上面貼上豆豆貼紙，如下圖：

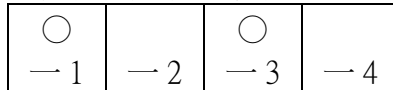


發現：

(1) 豆豆的位置都在方塊的斜對角上。如圖：



(2) 有兩個豆豆的組合，不一定能排出方塊。例如：



但是沒有兩個豆豆的組合一定不能排出方塊，因為有豆豆的位置只能代替有豆豆的位置，沒有豆豆的位置只能代替沒有豆豆的位置。

(3) 這個發現可以幫助我們折的時候，可以很快的判斷不能排出方塊的組合，使我們減少很多嘗試錯誤的時間。

活動(三) 魔術卡究竟能折出幾個“田”的方塊呢？

1. 迷惑期：

我們發現只要一 1 可以折出來的方塊，一 4 用左右相反的折法，也可以折出方塊來，同樣的四 1、四 4、五 1、五 4、八 1、八 4，用類似的折法也可以折出方塊來，我們四個人同時分別折一 1、一 4、四 1、四 4，發現它們像鏡子一樣，有類似的折法，所以它們能折出來的“田”方塊個數應該一樣。

我們進一步的實驗，發現魔術卡的 32 個數可以分成四國：

- (1) 一 1、一 4、四 1、四 4、五 1、五 4、八 1、八 4 是同一國
- (2) 一 2、一 3、四 2、四 3、五 2、五 3、八 2、八 3 是同一國
- (3) 二 1、二 4、三 1、三 4、六 1、六 4、七 1、七 4 是同一國
- (4) 二 2、二 3、三 2、三 3、六 2、六 3、七 2、七 3 是同一國

換句話說，我們只要找出一 1、一 2、二 1、二 2 的所有組合，就可以算出魔術卡中到底隱藏了多少的“田”方塊。

2.各顯神通期：

我們有秩序的用，折、拉、凹的方式去找答案

發現：還是不確定有沒有把一 1 的所有組合找出來。

3.尋找規律期：

我們從一 1 開始，發現到第一個數選一 1，那麼第二數就可以選一 2 到八 4 共有 31 種選擇，第二數確定後，第三數就有 30 種選擇，第三數確定後，第四數又有 29 種選擇，好奇弟弟拿出計算機按一按後，大聲的告訴我們，一共有 863040 種選擇，大家聽完差點休克，如果每天不眠不休的驗證 1000 種也需要 863 天。

正當大家煩惱的時候，聰明的好奇姊姊說：「一 1 一 2 二 1 二 2 這個方塊和一 2 一 1 二 2 二 1 這個方塊和……都是同一個方塊，所以組合應該沒有那麼多。而且一 1 的背面是五 4，只要有一 1 就不會出現五 4，所以我們用淘汰法，或許可以減少很多組合。」

我們覺得很有道理，所以第一回合先找第二個數，以一 1 為例，先找一 1 可以和哪些數搭配在一起，不能和一 1 出現在同一方塊的數就先淘汰掉，第二回合再從可搭配的兩個數中，依序去搭配第三個數，不能組合的選擇就淘汰掉。第三回合再從可搭配的三個數中，依序去搭配第四個數。(如附件二)

我們就這樣每天排序、折、驗證；排序、折、驗證……最後我們統計一 1 有 47 種組合方塊、一 2 有 41 種組合方塊，二 1 有 59 種、二 2 有 55 種，比我們以前找到的方塊多很多。由這些資料我們可以算出這個魔術卡內一共藏了 $(47 \times 8 + 41 \times 8 + 59 \times 8 + 55 \times 8) \div 4 = 498$ 種方塊組合

活動(四)分析魔術卡的折法:

1.異想天開期:

我們在折的過程中，發現不同的方塊組合有相同的折法。我們將它們分類成：

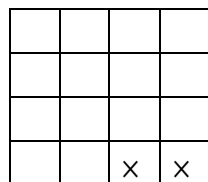
(1) 原始形



(2) 折後原始形



(正面)

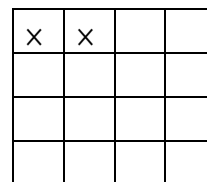


(背面)

(3) 捲後原始形



(正面)

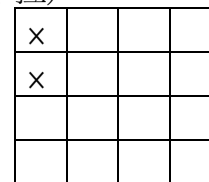


(背面)

(4) 捲後折拉型(單拉)

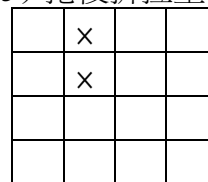


(正面)

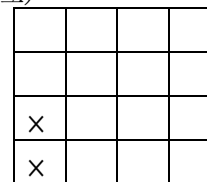


(背面)

(5) 捲後折拉型(雙拉)

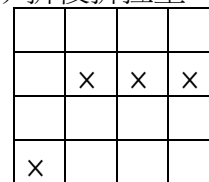


(正面)

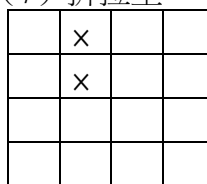


(背面)

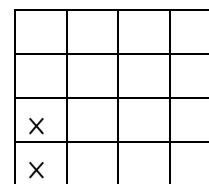
(6) 折後折拉型



(7) 折拉型

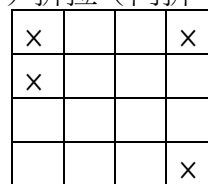


(正面)



(背面)

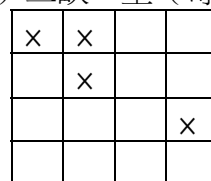
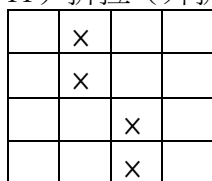
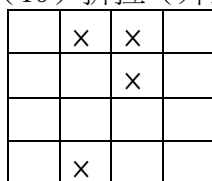
(8) 折拉(內折—單拉)



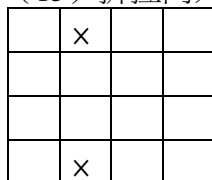
(9) 折拉(內折—雙拉)



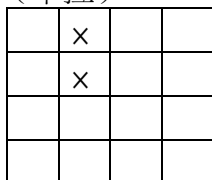
(10) 折拉 (外折一單拉) (11) 折拉 (外折一雙拉) (12) 三缺一型 (奇數內折)



(13) 折拉內外折 (單拉)

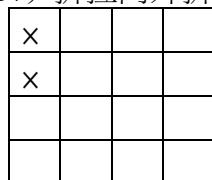


(正面)

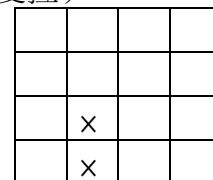


(背面)

(14) 折拉內外折 (雙拉)



(正面)



(背面)

..... (如附件三)

這些折法都有它獨特的規律，我們一看到它分布的位置就知道怎麼折，而且還可以預知同一種折法有多少種組合。

2. 石破天驚期：

我們分析折法的架構圖，最後我們決定回到最原始的方法，編號排排坐。

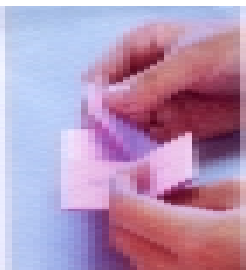
- 0：原始型 1：上邊往前折 2：上邊往後折 3：下邊往前折 4：下邊往後折
 5：左邊往前折 6：左邊往後折 7：右邊往前折 8：右邊往後折 A：上拉
 B：下拉 C：內凹 D：往內對折 E：往外對折



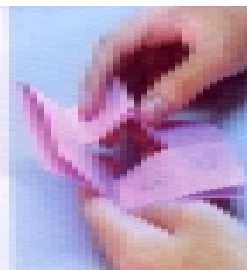
折法：5



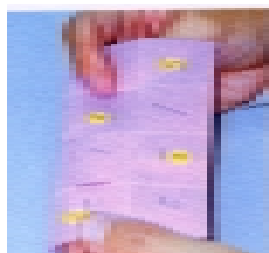
折法：3



折法：EBA



折法：ECA



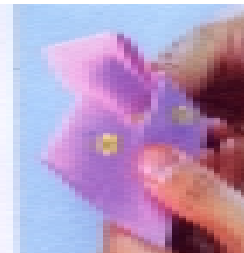
折法：D



折法：11



折法：15



折法：E882

我們的做法：

從原始型、一折、二折、三折、四折、五折、單拉、雙拉、對折、對折再對折、.....等變化。(如附件四)

每種折法從 1~8 依序排列，如果遇到拉與對折的情形，就按照 A、B、C、D、E 的秩序，依序排列，並將方塊由小到大排序，同一個方塊如果有不同的折法，我們只取最佳折法，也就是用最少的折數就可以折出來的方法。

3、海闊天空期：

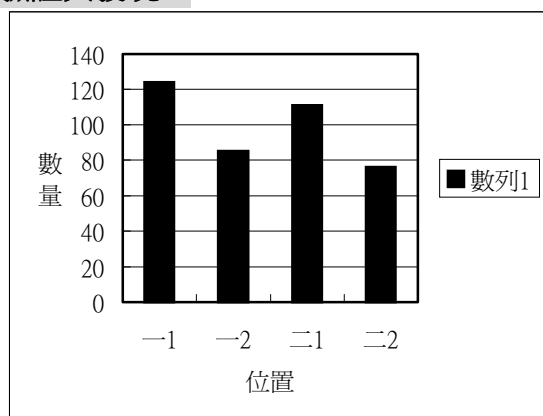
我們將一1、一2、一3……八4改寫成11、12、13……84，每一個方塊變成可以排大小的八位數字，我們按方塊排序，每個方塊只取最佳折法。從方塊排序的表格中，我們可以輕易的查出，哪四個方格可以折出“田”方塊，而且可以照最佳折法，很快的折出方塊來！

方塊與最佳折法

方塊	折法	方塊	折法	方塊	折法
11122122	0	11124142	13	11128182	2D3
11122124	E7844	11124144	1563	11137381	451
11122133	E784	11124171	6351	11142122	E8744
11122142	BC	11124182	1663	11142124	57
11122171	6D62	11124282	7271	11142133	3537
11122234	EE4	11124474	5451	11142144	3745
11122241	CB	11127174	651	11142171	3635
11123334	EE44	11127374	1	11142182	3847
11123341	3551	11127433	8833	11142432	4645
11123374	551	11127482	3883	11142441	3547

如附件五：按方塊排序，共可排出 792 個方塊！

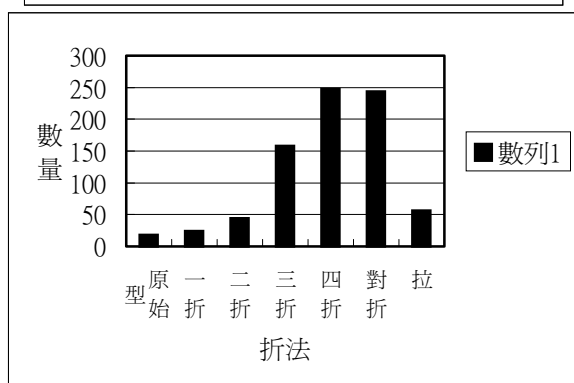
驗證與發現：



我們數一數這些表格，發現：

- 一1 的組合有 124 個
- 一2 的組合有 85 個
- 二1 的組合有 111 個
- 二2 的組合有 76 個

可見魔術卡中，角落的位置最活潑，可以和其他位置組合出最多“田”的方塊；雖然魔術卡中間剪了三條線，但是中間位置仍然不容易和其他位置組合成“田”的方塊。



我們將這份資料按折法排序（如附件六），發現：一看就以看出方塊的原始形有 18 個。

- 需要一折的有 24 個；二折的有 44 個；
- 三折的有 158 個；四折的有 248 個；
- 需要用到對折的有 244 個；
- 需要用到拉的有 56 個。

驗證：

- 我們和活動（三）之 3 的方塊組合相對照，發現活動（三）之 3 的方塊組合比較少，而且所有的組合都在這些方塊組合中，可見這次的方法更精確了！
- 接下來，我們計算總數發現： $(124 \times 8 + 85 \times 8 + 111 \times 8 + 76 \times 8) \div 4 = 792$ ，我們數一數方塊的組合，也恰好是 792 個，所以這一次我們可以大聲的說：「我們完成了！魔術卡的方塊組合一共有 792 種。」

活動五：做出一個更炫更棒的魔術卡

我們每一個人都絞盡腦汁的做出很多不同種類、不同功用的魔術卡，現在就讓我們秀出自己最得意的魔術卡與大家分享。

好奇弟弟魔術卡說明書（英文單字魔術卡）

1、玩法：將 4 個英文字母折出一個單字，把所有單字找出就成功了。

C	O	O	I
Z	R	N	O
O	M	E	O
P	Y	K	E

P	U	I	O
R	P	H	K
J	F	L	C
M	S	K	O

- ①COPY ②ZERO ③MOON ④COOK ⑤LIKE ⑥PORK
⑦JUMP ⑧FISH ⑨OPEN ⑩POOR

2、與原魔術卡不同之處：

較原魔術卡有趣可以順便背單字，考單字。

3、設計與想法：

在拼湊單字時有些字母會顛倒，感覺到有些不完美，所以建議英文魔術卡顛倒的字母可以用 O 或 Z、H、I……等字母。


4、限制：只能設計 4 個字的單字。

好奇妹妹魔術卡說明書（魔術卡任我行）

1、玩法：

2	2	3	3
1	2	1	1
4	4	4	4
2	1	3	3

6	7	8	6
5	7	8	5
5	8	7	5
6	8	7	6

把四個 1、四個 2、到四個 8，依序拼成這樣”  “的方格。

2、與原魔術卡不同之處：

(1) 我做的魔術卡折法變化較多。(2) 折法沒有重覆。(3) 位置不同。

3、設計的想法：

把所有的折法寫在一張紙上，再選其中八種折法把 1~8 折出來，然後再填上去。

好奇哥哥魔術卡說明（人物魔術卡）

1、玩法：把形容人物的最佳形容詞拼出

漂	亮	強	壯
聰	爸	爸	明
弟	可	愛	弟
媽	媽	哥	哥

敏	捷	馬	尾
新	恭	喜	年
快	發	財	樂
姐	姐	妹	妹

- ①漂亮媽媽 ②強壯哥哥 ③聰明爸爸 ④可愛弟弟
⑤敏捷姐姐 ⑥馬尾妹妹 ⑦新年快樂 ⑧恭喜發財

2、與原魔術卡不同之處：

比原魔術卡好玩，想像力多。而且我可以四個字、四個字按次序的將想說的話寫進去！


3、有趣的地方：不同的折法會有不同的形容詞。

好奇姊姊魔術卡說明書（百變魔術卡）

1、玩法：

1	2	2	3
4	3	3	3
2	1	4	2
5	4	4	6

7	5	5	6
8	8	6	6
1	7	7	8
1	5	7	8

將四個 1 到四個 8，依序排成這樣”“的方格。



2、與原魔術卡不同之處：

(1) 我做的魔術卡折法變化較多。(2) 折法沒有重覆。

3、設計的想法：

先把自己發現的新折法全部想一下，再將一種折法用在 1 上面，就這樣一個一個填上去，如果這種折法沒辦法擺在這張魔術卡上，就換另一種折法擺擺看。而且，我想我一張魔術卡上最好不要有相同的折法，所以我總是想盡辦法去發現新的折法。

六、結論：

- (一) 原魔術卡可以排出和是 4 到 32 的方塊，如果您將任意 32 個不同的數字填入魔術卡中，就可以找出好幾百個不同和的方塊。
- (二) 如果將魔術卡編號，如活動（二）之 2，我們發現：
 - (1) 如果上面的國字方塊是國字的奇數，下面的方塊就是國字的偶數。
 - (2) 如果左邊的方塊是阿拉伯數字的奇數，右邊的方塊就是阿拉伯數字的偶數。
 - (3) 更有趣的是，如果數字是倒置的，它的奇偶性就相反了。
- (三) 如果在魔術卡上面貼上豆豆如活動（二）之 3，我們發現：
 - (1) 豆豆的位置都在方塊的斜對角上。
 - (2) 有兩個豆豆的組合，不一定能排出方塊。
但是沒有兩個豆豆的組合一定不能排出方塊。
 - (3) 這個發現可以幫助我們折的時候，很快的判斷不能排出方塊的組合。
- (四) 我們發現魔術卡中 32 個位置可以分成四國，只要找到一 1、一 2、二 1、二 2 的方塊組合乘以 8，除以 4 就是魔術卡的方塊總數。
- (五) 我們找出了 792 個方塊組合，而且每一個方塊組合都有它的最佳折法，照這些折法，可以很快的折出方塊來。
- (六) 魔術卡中，角落的位置最活潑，可以和其他位置組合出最多“”方塊；雖然魔術卡中間剪了三條線，但是中間位置仍然不容易和其他位置組合成“”方塊。
- (七) 我們發明了很多魔術卡，迷倒了很多大人，我們每一個人選出自己最得意的創作，邀請您一起來玩一玩！

七、心得：

今年很幸運的能參加魔術卡的研究，這與以往透過書本去學習東西有很大的不同，經由老師的指點及觀摩同學的做法，啟發我不不少的靈感，大家也發明了許多不同花樣的魔術卡，在不斷的操作中，也讓我們發現，原來魔術卡是如此的千變萬化，統計折法又是這麼辛苦，還好在大家通力的合作下都能順利的完成。

在這艱辛的過程中，不但讓我們體會合作的重要及友情的可貴，電腦也進步了不少。這次的寒假最充實，希望以後還能研究不同的東西，發明一些對人類有貢獻的作品。

評語：

作者從一現成魔術卡算出能分析出“田”方塊數並作分析，最難能可貴是他能再創造出新的魔術卡，並分析其算法，此作品相當具有創意，真是難能可貴，比一般只分析科學遊戲之作品要好的多。

作者簡介

好奇姊姊就是我，我叫張雅晴，今年 11 歲。喜歡彈鋼琴、亂塗鴉，也愛游泳、看長片、讀金庸武俠，更愛和妹妹搶著抱爸爸媽媽，因為玩數學遊戲的時候問了一堆為什麼？所以三年級做愛吃糖的小孩；四年級做 792 魔術卡！

我是好奇弟弟，我的名字是黃立偉，我是一個小男孩，我喜歡吃薯條、香蕉；喜歡喝果汁、綠茶；喜歡玩積木、電腦；不喜歡棍子、蟑螂。我是一個頑皮卻用功的好孩子，我將來粉想當一個科學家！

我是好奇哥哥，我叫李仁豪，仁豪、人好，爸爸媽媽希望我樣樣好：品性好！身體好！功課好！我最喜歡打棒球和電腦，我最喜歡看百科全書和汽車雜誌，我將來希望當一個建築師。

我是好奇妹妹，我的名字叫戴馥安，我最喜歡寫書法和打電腦，最得意的事情是今年參加科展得到全國初小組數學科第一名，希望有機會能夠再和大家一起做研究，我將來希望當一位小學老師。