

作品名稱：聽音撲克牌探祕 ~~ 撲克牌循環圈特色的研究

初小組 數學科 第二名

縣市：台北市

作者：許哲維 金士翔

王怡文 黃柏嶽

校名：台北市士東國小

指導老師：賴淑真

關鍵詞：聽音撲克牌、最大公因數、循環圈



一、研究動機：

有一天，老師表演了一種聽音撲克牌魔術，只見老師拿了一副撲克牌，洗牌後請同學抽出一張，並隱藏起來，然後老師把剩下的撲克牌在耳邊聽了一下，居然能夠立即說出被抽走那一張牌的花色和點數，試了好幾次，百發百中，非常神奇！在我們百般的要求下，老師終於傳授給我們秘訣，知道秘訣後，玩了一陣子，我們還將玩法做了變化，而我們更想知道這個變化能不能無限延伸，於是我們決定以聽音撲克牌為主題，做一些探討。

二、研究目的：

- (一)聽音撲克牌的間隔狀態，哪些可以排成功？有沒有規律性？
- (二)撲克牌張數減少或增加時，能不能排成功？有沒有規律性？
- (三)撲克牌花色減少或增加時，能不能排成功？有沒有規律性？
- (四)撲克牌缺某一張時，能不能排成功？有沒有規律性？
- (五)撲克牌每花色各缺一張時，能不能排成功？有沒有規律性？

三、文獻探討：

- (一) 中華民國三十八屆中小學科學展覽高小組全國第一名作品～撲克圈圈尋極限，作者是台北市天母國小吳孟軒，曾討論過 12 張撲克牌繞圈遊戲，其主要目的在探討兩張撲克牌間限定差數問題，並擴大到一般形式，和本作品探討一套撲克牌形成循環圈的目的不同。
- (二) 數學遊戲大觀第四集 王登傳先生著 前程出版社出版 作品中提及一個 18 個數字大圓圈中，兩個相鄰 3 個數學等值問題，和本研究不同。

四、研究設備：

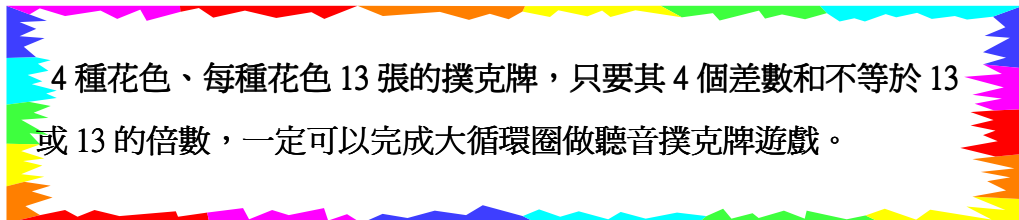
撲克牌、紙卡

五、研究過程：

- (一) 聽音撲克牌的間隔狀態，哪些可以排成功？有沒有規律性？
 - 1、有關聽音撲克牌遊戲的秘訣是把一套完整的撲克牌(4 種花色共 52 張)，先按照一定的間隔順序排列，例如第一張和第二張之間差 1，第 2、3 張之間差 2，第 3、4 張之間差 3，第 4、5 張之間差 4，底下依序排列(本例的形式稱為 1234 型，即間隔為 1,2,3,4……)，要點是第 52 張和第 1 張之間也要符合這個規律；而花色也依序循環，聽音

其實只是個障眼法，能夠聽對被抽走的牌，完全是由牌的前後張序列推導出來的，不知其奧秘時，看來非常神奇。首先，我們想研究的是有哪些間隔形式可行，而且看起來變化神奇。

2、本階段我們得到下面結果：



(二) 撲克牌張數減少或增加時，能不能排成功？有沒有規律性？

- 1、我們試著把撲克牌4種花色的13(k)都抽掉，使牌數成爲48張，再試驗看看。
- 2、由表中我們發現，能夠形成循環圈的解答很少，和4種花色，每種13張時有很大不同，我們把不能形成循環圈的解答試著排出分布圖形，由圖中我們發現：4種花色，每種花色12張的撲克牌，除了可以形成循環圈以外，其他的可以分成2小圈、3小圈、4小圈、6小圈、12小圈等類如下表一：

類 別	差的數值例	每 圈 牌 張 數
一大圈 (正式解答)	1、1、2、3	48
	1、2、4、4	
	1、4、4、4	
	1、3、4、5	
二小圈	1、1、5、7	24
	1、1、6、6	
	1、1、2、6	
	1、1、3、5	
三小圈	1、2、1、11	16
	1、2、2、5	
	1、4、4、6	
	2、3、4、6	
四小圈	1、2、2、11	12
	1、2、2、3	
	1、3、5、7	
	3、3、4、6	
六小圈	3、3、6、6	8
	1、2、2、1	
	1、2、9、6	
	4、5、4、5	

十二小圈	1、1、1、9	4
	1、1、1、8	
	4、8、4、8	
	1、3、5、4	

3、由表中我們發現：

(1) 4種花色，每種花色 12 張的撲克牌，要組成一大圈的聽音撲克牌正式解答時，必須是 4 個差數的總和為質數。

(2) 對於不能形成一大圈解答的其他類型，我們再深入觀察後，也發現到形成小圈數的規律性，分為下列三種狀態：

(ㄅ) 4 數總和在 12 以上，不是質數。

我們發現：可以以下面步驟來判別形成小圈數，表二

說明	例子
(ㄅ) 將 4 個數值總和減 12。	例差數 1、2、3、10 4 個差數總和為 $1+2+3+10=16$ $16-12=4$
(ㄆ) 12 除以 (ㄅ) 中得到的差。	$12 \div 4 = 3$
(ㄇ) 如果能除得盡，則除數為其圈數。	$12 \div 4 = 3$ 剛好除盡 則 1、2、3、10 將分成 4 個小圈，

(ㄆ) 4 個差數總和在 12 以上，且總和不是質數，而且又不能被它的差數整除的數，原來我們以為應該有不同圖形出現，但我們試了一些例子後，又發現了規則如下表三：

ㄅ、將 4 個數總和減去 12。	例：差 5、5、5、5，則 4 數總和為 $5+5+5+5=20$ $20-12=8$
ㄆ、12 除以 ㄅ 中得到的差，且不能整除。	$12 \div 8 = \text{不能整除}$
ㄇ、8 把 ㄆ 中的除數做平分當除數。	整除，則分群數為除數，本例得到 4 群。 $(12 \div 4 = 3)$

到目前為止，我們的驗證結果都是正確的。

4、由以上結果，我們發現，解答數的多少和每一個花色牌的數量可能有關係，每一花色牌的數量是質數（如 13）時，解答就非常少，而每一個花色牌的數量是合數（如 12）時，解答數量就非常少，它只能在 4 個差數值為質數時，才能產生解答，這個結果應該可以應用在其他的狀態。因此我們決定：再以 4 個花色，每個花色分別為 7~11 張範圍試驗看看，結果發現，前面的判斷法則完全符合。

（三）撲克牌花色減少或增加時，能不能排成功？有沒有規律性？

- 1、我們試著將撲克牌花色由 4 色減為 3 色，每種花色 13 張研究看看。我們發現，不能完成循環圖的佔很小一部分，這個結果和研究一中得到的結果相似，不同的是 3 個花色，每種花色 13 張時，不能形成解答的狀態變為三個差數之和為 13，其餘都和四個花色相同。
- 2、3 個花色，每種花色 12 張的情形我們做了研究，發現和研究二中 4 個花色，每種花色 12 張的情形類似，能夠形成解答的數量很少，而且能夠形成解答的條件的、不能形成解答時產生的小圈數、形成小圈的判斷法則都和四個花色時相同。
- 3、我們再以 2 個花色和 5 個花色做了一些試驗，發現花色數量不會影響解答型態的改變，原來能形成解答的，增加花色或減少花色後同樣能有解答，原來不能形成解答的，形成的圈數也不會因為花色的增加或減少而改變，差別祇在每一小圈內牌數不同而已。以每個花色 12 張，2~5 個花色，差數總和分別為 12，13，14，15，16 為例，花色數量不同時形成小圈或形成解答個圈撲克牌張數如下表四。

類別	差數例	差數總和	花色數	每圈張數
一大圈 (正式解答)	6, 7	13	2	24
	4, 4, 5		3	36
	3, 3, 3, 4		4	48
	2, 2, 3, 4, 2		5	60
二小圈	6, 8	14	2	12
	4, 5, 5		3	18
	3, 3, 4, 4		4	24
	2, 2, 3, 4, 3		5	30
三小圈	7, 8	15	2	8
	4, 5, 6		3	12
	3, 3, 4, 5		4	16
	2, 2, 3, 4, 4		5	20

四小圈	7, 9	16	2	6
	3, 5, 8		3	9
	3, 3, 4, 6		4	12
	2, 2, 3, 4, 5		5	15
六小圈	9, 9	18	2	4
	5, 5, 8		3	6
	4, 3, 4, 5, 6		4	8
	2, 3, 4, 5, 4		5	10
十二小圈	4, 8	12	2	2
	3, 4, 5		3	3
	1, 2, 3, 6		4	4
	1, 2, 3, 3, 3		5	5

(四) 撲克牌缺某一張時，能不能排成功？有沒有規律性？

- 1、經過上面的研究，聽音撲克牌不缺牌的正常狀態下，經由判斷法則可以確定能否排成循環圖，也能預測解答形式，當不能形成解答時，也能預測排列狀態，接著，我們將探討撲克牌有缺張時，能不能形成循環圖？解答形式為何？
- 2、我們經過討論後，發現為了方便研究，只要設定分別缺少某一個花色的 1, 2, …… 13 來討論即可，因此，我們先設定 ♣ 缺 1~13 分別試驗。
- 3、經過一段時間研究的資料分析後，我們確定缺一張牌時一定無法形成循環圖，因為少一張牌時，一定造成一個缺口，而造成缺口就無法循環。
- 4、造成缺口就無法循環時，缺口尾端原應接 ♠1，但是原來牌就缺 ♣1 因此，我們令它連接回 ♠1，這算是硬接回循環圈，表演聽音撲克牌時，只要記住這個缺口，即可形成循環圈，猜出被抓走的牌，類似解答的形成依附在原來解答的下面，也就是原來能形成一大圈的解答，缺一張後才能形成類似解答。

(五) 撲克牌每花色各缺一張時，能不能排成功？有沒有規律性？

- 1、我們試著研究四個花色各缺一張牌時的情形，我們先以四個花色，每個花色 13 張，同時缺同一張數值牌（同缺 1~13），共 13 種情形做研究。
- 2、觀察成功的例子，我們發現它的特色為：
 - (1) 每個花色 13 張牌、每個花色各缺一張時，解答的情形如同前面研究中每種花色 12 張牌的情形，大部份都會形成解答，形成解答的情形，也如同前面必須差數總和

為質數時才有可能。

(2) 不能形成解答時，會產生幾個小循環圈的分群現象，分群數量也和前面研究結果相符合。

六、局部完整解答的探討與應用：

- 1、做完上面研究後，我們已確定聽音撲克牌能不能牌成功的法則，我們利用這個法則試驗了很多不同花色，每花色不同張數，差數總和不同時的狀態，結果發現我們的法則都能適用，但我們卻仍無法確定是不是偶然會突然冒出一個例外情形，經過討論，我們決定以較少的牌數量，做完整的探討。
- 2、我們以 3 種花色和 4 種花色為研究對象，對所有不同差數做完整的探討如下：

	每花色張數	總牌數	不同差數總題數
3 種花色	1	3	1
	2	6	8
	3	9	27
	4	12	64
4 種花色	1	4	1
	2	8	16
	3	12	81

我們發現：

- (1) 完整探討後發現沒有任何例外情形發生，完全符合原先的預測。
- (2) 我們整理資料後發現了更容易判斷撲克牌循環圖能否排成功的法則，這個法則和每花色牌數差數之和間的**共同因數有關**，以 3 種花色，每花色 1~4 張完整表為例：

花色數	成功解答的差數和	不能成功解答的差數和	花色數的因數	差數總和的因數
1	0		1	
2		0		
	1 (一大圈)		①、2	①
		2 (二小圈)	1、②	1、②
	3 (一大圈)		①、2	①、3
		0		

3	1 (一大圈)		①、3	①
	2 (一大圈)		①、3	①、2
		3 (三小圈)	1、③	1、③
	4 (一大圈)		①、3	①、3
	5 (一大圈)		①、3	①、2、4
		6 (六小圈)	1、③	1、2、③
	7 (一大圈)		①、3	①、7
	8 (一大圈)		①、3	①、2、4、8
4	0			
	1 (一大圈)		①、2、4	①
		2 (二小圈)	1、②、4	1、②
	3 (一大圈)		①、2、4	①、3
		4 (四小圈)	1、2、④	1、2、④
	5 (一大圈)		①、2、4	①、5
		6 (二小圈)	1、②、4	1、②、3
	7 (一大圈)		①、2、4	①、7
		8 (四小圈)	1、2、④	1、2、④、8
	9 (一大圈)		①、2、4	①、3、9

我們發現：(每花色張數)和(差數總和)之間的最大公因數，就是分成幾小圈的解答，當(每花色張數)和(差數總和)之間的最大公因數是1時，就形成聽音撲克牌的解答，如上表中○所標示部份。

- 3、應用：有了簡單又有效的判斷法則後，我們再玩聽音撲克牌的遊戲中，在設計的撲克牌的循環圈時，如果在編排差數和時偶然粗心排錯了都可以立即發現，也可以檢驗初學同學設計的循環圈差數和是否有效，既方便又有效率。

七、研究結果：

到目前為止，我們研究得到的結果如下：

- (一) 由4個花色，每個花色13張撲克牌組成的聽音撲克牌很容易找到成功的解答，不能完成循環圖的只佔很小的一部份；不能完成循環圖的都出現在四個差數總和為13和13的倍數的時候。
- (二) 由4個花色，每個花色12張撲克牌組成的聽音撲克牌只有很少成功的解答，不能完成循環圖的佔大部份；不能完成循環圖的都出現在四個差數總和為合數的時候，而且都會形成小循環圈。

- (三) 由 4 個花色，每個花色 12 張撲克牌組成的聽音撲克牌能夠由很方便的規則來判定是否為解答，不是解答時也能很容易判斷它的小圓圈數。
- (四) 花色減為 3 色，每種花色 13 張時很像 4 個花色，每種花色 13 張時的情形，很容易找到成功的解答，不能完成循環圖的只佔很小的一部份。
- (五) 花色減為 3 色，每種花色 12 張時很像 4 個花色，每種花色 12 張時的情形，成功的解答數很少。
- (六) 到目前結果發現聽音撲克牌的成功的解答，和每種花色的數量有關，每種花色的數量是質數時很容易找到解答，每種花色的數量是合數時不容易找到解答，它只有在差數總數是質數時才有解答。
- (七) 聽音撲克牌在缺一張牌的情形下無法找到解答，只能形成有一個缺口的類似解答。
- (八) 聽音撲克牌在各個花色各缺相同數值牌一張的情形下無法找到解答，只能找到類似解答，類似解答和各花色張數減一有關，目前發現當張數減一後是質數時比較容易找到解答。
- (九) 聽音撲克牌的（每花色張數）和（差數總和）之間的最大公因數，就是分成幾小圈的解答，當（每花色張數）和（差數總和）之間共同因數是 1，就形成聽音撲克牌的解答。
- (十) 用（每花色張數）和（差數總和）之間的最大公因數來判別聽音撲克牌的循環圈是否形成最方便又有效率。

九、參考資料：

- (一) 第三十七屆全國中小學科學展覽作品專輯 國立台灣科學教育館編
- (二) 第三十一屆台北市中小學科學展覽作品專輯 台北市教育局編

評語：

本作品甚為生動活潑，作者表達能力甚流暢，研究內容分類討論並透過試驗發現其中的規律，對小學生而言能有如此表現算是一件頗佳的作品。

作者簡介

許哲維

我是一個三年級的大男生，「大」是指人高馬大，手巴掌大，腳丫子大，連頭也大大的，和士翔差一個年級，但站在一起卻一樣高，我對數學遊戲很有興趣，也喜歡游泳、下圍棋、打桌球。我曾經養過楓葉鼠、文鳥、熱帶魚、蠶寶寶、蝦子等可愛的動物，將來想當動物園管理員或獸醫。(照片右後)

金士翔

這是我第二年參加科展比賽，卻是第一次參加全國科展而且得了名，這次研究的「聽音撲克牌」很有趣，回到家，爸爸也興致勃勃的跟我一起玩呢！我除了喜歡科展活動以外，還打桌球、彈鋼琴，我家在軍艦岩山腳下，歡迎有空來爬山。(照片左前)

王怡文

我是這次科展唯一的女生，但是跟他們卻合作愉快，我還是這個小團隊的小班長呢！我很喜歡數學遊戲，尤其這次研究的「聽音撲克牌」，更是好玩極了！平常我會彈彈鋼琴、打打桌球、寫寫書法等，生活既忙碌又充實。(照片左後)

黃柏嶽

我是三年級的小朋友，第一次參加科展就能得到全國第二名，真是高興！但是，真的做得好辛苦，也花了很多時間，總算辛苦有了代價。我的興趣很廣泛，但最喜歡打桌球和游泳，我還是學校的游泳和桌球校隊喔！（照片右前）