

作品名稱：個人移位跳棋遊戲的探討

國中組 數學科 第二名

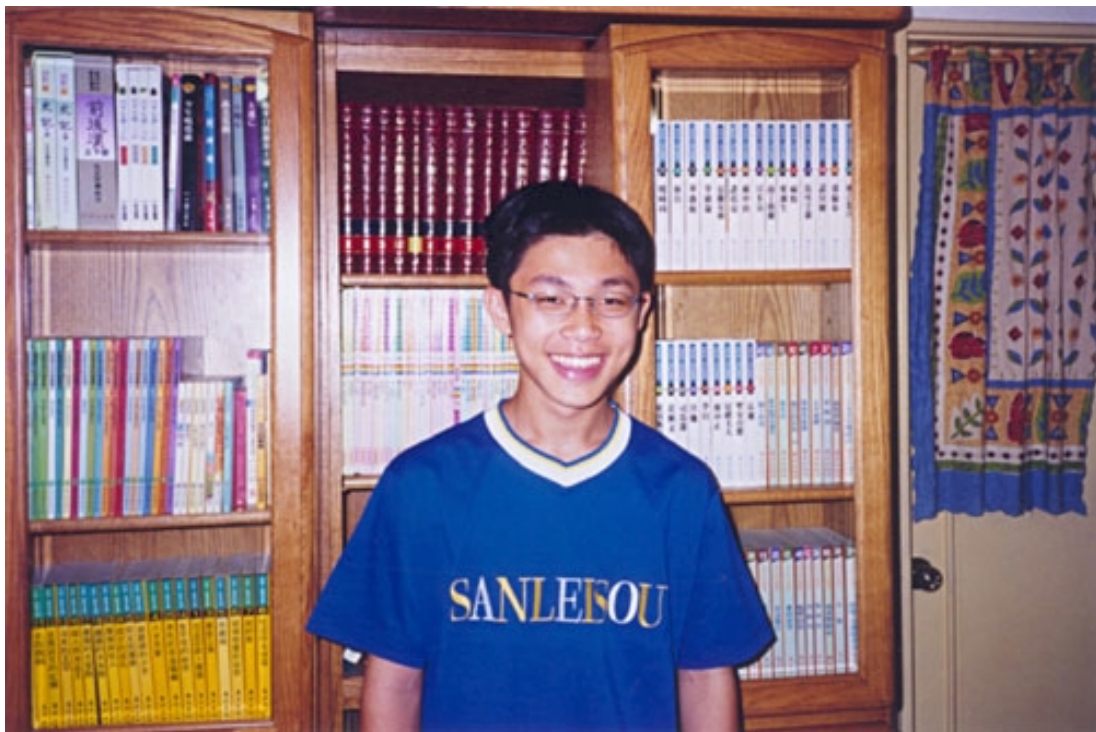
縣市：台北市

作者： 郭哲維

校名：私立薇閣中學

指導教師： 戴紹一、趙盛義

關鍵詞：變化型移位遊戲、最少步數、自我跳移



解開難題的奧秘—一個人移位跳棋遊戲的探討

壹、研究動機

課餘時間，老師會鼓勵我們玩一些益智遊戲。同學常輪流提供，尋找許多題材。我看上的是在 Boris A.Kordemskyrd，張能杰譯的「趣味數學問題集」中的跳棋問題。茲將書中的問題摘錄如下：

☆移位跳棋

將三個白棋置於如下圖中之 1、2、3 之方格內，同時在 5、6、7 三個方格內放入黑棋。

1	2	3	4	5	6	7
○	○	○	X	●	●	●

如何將三個白棋子移到黑棋子所佔的位置內。移動的規則如下：可以將棋子移入鄰近的空格，或者取出一棋子跳過鄰近的棋子置於空格內。本題需要移動 15 次。

基本上這個遊戲是直線上「移位遊戲」，完成原題 3-3 的對稱並不難，但 $m-n$ 或其他變化的解題，還真的很傷腦筋。因此我到圖書室想從相關文獻中去找解題的資料，我找到獲選我國參加加拿大 1996 年科學展覽會的高中組作品。「走走跳跳」：

另外在中華民國第三十九屆中小學科學展覽優勝作品專輯(高中組)中，第二名的優勝作品「乾坤大挪移」也是針對直線型移位遊戲加以探討。我覺得這個問題在移動過程中有特別的數學規律，又可以很有變化，於是想進一步研究它。

貳、研究目的

- 一、等長直線型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 二、不等長直線型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 三、迴路型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 四、十字型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 五、雙迴路型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 六、A 字型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 七、日字型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 八、分道盤型「移位跳棋」遊戲的規則探討。
- 九、時鐘型「移位跳棋」遊戲的規則探討。

參、文獻探討

有關直線移位遊戲資料如下：

- 一、高中組二件科學展覽優勝作品。係針對直線型且空格位置不固定的方式進行解題。
- 二、凡異出版社「數學遊戲」一書提到直線型移位遊戲(即一開始研究動機的資料)，並附有 3-3 型的解答。
- 三、故鄉出版社「益智遊戲」一書中提到直線型移位遊戲。
- 四、九章出版社「使人聰明的智力遊戲」一書中則提到等長直線型移位遊戲，4-4 型的題目。並附上完成 4-4 型所需最少步數的解答。

肆、研究過程

研究一、等長直線型「移位跳棋」遊戲的規則探討

遊戲規則

移動前的棋盤圖：

1	2	3	4	5	6	7
○	○	○	X	●	●	●

完成後的棋盤圖：

1	2	3	4	5	6	7
●	●	●	X	○	○	○

- (一) 每次只能移動一顆棋子。
- (二) 每一顆被移動的棋子，可以選擇以下兩種方式前進。
 1. 這一顆棋子旁邊有空格時，可以移動一格到空格中。例如把格子 5 的棋子或是格子 3 的棋子，移入格子 4。
 2. 這一顆棋子旁邊有空跳躍緊鄰的棋子。例如格子 2 的棋子跳到格子 4，或格子 6 跳到格子 4。
 3. 記錄完成步數。

方法

依次從每邊的棋子數是 1 個、2 個、3 個、4 個、5 個、6 個、7 個，實際操作，每種重複做五次，並詳細將移動過程加以記錄。(1 個則只能用到編號 1 的格子，2 個只能到編號 2，以此類推)。

結果記錄

操作情形 每邊 棋子數	實際 操作 次別						最少 步 數
	一	二	三	四	五		
1	3	3	3	3	3	3	3
2	10	8	8	8	8	8	8
3	21	17	15	15	15	15	15
4	32	32	26	24	24	24	24
5	35	35	35	35	35	35	35
6	48	48	48	48	48	48	48
7	63	63	63	63	63	63	63

發 現

從操作過程中發現等長直線型的移位跳棋，要走最少步數有兩種現象：

1. 兩邊的棋子都呈現只有前進沒有後退的情形。
2. 在跳棋的過程中，會有雙色一對一交錯的圖形。

整 理

完成遊戲的最少步數是：

每邊棋子數	1	2	3	4	5	6	7
移動最少步數	3	8	15	24	35	48	63

發現 1-1 型、2-2 型、3-3 型，以 5 為基數呈連續等加奇數遞增，但每邊棋子數到 n 個棋子時，將很不好推算。

尋找規則

從走出的最少步數當中發現：

每邊棋子數 (n)	完成最少步數 (B)
1	3 → 1× 3 → 1× (1+2)
2	8 → 2× 4 → 2× (2+2)
3	15 → 3× 5 → 3× (3+2)
4	24 → 4× 6 → 4× (4+2)
5	35 → 5× 7 → 5× (5+2)
6	48 → 6× 8 → 6× (6+2)
7	63 → 7× 9 → 7× (7+2)

我找到了這一型走最少步的規則。

猜測

等長直線型的移位跳棋，走最少步數的規則是：

$$B=n \times (n+2)$$

(B：完成的最少步數； n：每邊的棋子數)

舉例與檢驗

1. 根據前述猜測的規則來預測，當棋子數增加為每邊 8 個、9 個甚至 10 個時完成的最少步數為：

每邊棋子數	預測完成最少步數
8	8× (8+2) = 80
9	9× (9+2) = 99
10	10× (10+2) = 120

2. 實際在棋盤上操作得到以下結果：

每邊棋子數	實際完成最少步數
8	80
9	99
10	120

伍、討論

一、我們應用分析歸納的數學方法來研究不同種類的「移位遊戲」，從檢驗許多特例，再從特例中觀察猜測的結果，再將這些結果加以驗證及推論。

二、目前所探討到的各種變化型，可以活用直線及迴路型的方式，預測到能走的最少步數。事實上，改變跳躍方式和多顏色多路徑的整體探討暫無結果。說不定透過目前研究結果的再發展，能很快的處理這些問題。

三、傳統遊戲新變化，將「移位跳棋」遊戲的圖形及兩邊的顆數做一些改變，難度雖然增加很多，但也更有挑戰性和趣味性。

陸、結論

本研究透過實做和有意義的歸納，開發傳統遊戲的新世界，到目前的研究，得到以下的結論：

一、直線等長型的移位跳棋遊戲中，透過棋步歸納、「棋子顏色」交換和「鄰移、跳移」互動方式共三種方法，可以找出以下的公式：

直線等長型交換的最少步數(B) = $n \times (n+2)$ ……………公式一

(B：完成的最少步數； n：每邊的棋子數)

二、直線不等長型的移位跳棋遊戲中，透過棋步歸納、「棋子顏色」和「鄰移、跳移」的互動方式共三種方法，可歸納出以下的公式：

1.(1)依照 n、d 找到：

$$\begin{aligned} \text{差}(2a)\text{型的最少步數}(B) &= n \times (n-d+2) + d \times (d/2-1) \\ &= n \times (n-d+2) + 1/2 \times (d \times d - 2d) \cdots \cdots \text{公式二} \end{aligned}$$

(2)依照 m、n 找到：

$$\text{差}(2a)\text{型的最少步數}(B) = (m+1) \times (n+1) + (m-n)^2/2 - 1 \cdots \text{公式三}$$

(3)公式二與公式三是等值的。

2. (1)依照 n、d 找到：

$$\begin{aligned} \text{差}(2a+1)\text{型的最少步數}(B) &= n \times (n-d+2) + (d+1) \times (d+1)/2 - (2d+1) \\ &= n \times (n-d+2) + 1/2 \times (d \times d - 2d - 1) \cdots \cdots \text{公式四} \end{aligned}$$

(2) 依照 m、n 找到：

$$\text{差}(2a+1)\text{型的最少步數}(B) = (m+1)(n+1) + [(m-n)^2 - 1]/2 - 1 \cdots \text{公式五}$$

(3)公式四與公式五是等值的。

三、迴路型的移位跳棋遊戲中，可以歸納出以下的公式：

(一)由於兩邊均可通行，所以可以降低交換所需的最少步數，也因此變複雜。

(二)依照移位方式和棋步歸納，找到迴路型的三種答案類型：

$$1.\text{迴路等長型交換的最少步數}(B) = n \times (n-1) + 2 \cdots \cdots \text{公式六}$$

(B：完成的最少步數； n：每邊的棋子數； n>2)

$$2.\text{迴路差偶數型交換的最少步數}(B) = m(m+2) + d^2/2 \cdots \cdots \text{公式七}$$

(即：直線等長型+尾部「自我移跳」數)

$$3.\text{迴路差奇數型交換的最少步數}(B) = (m+1)(m+2) - 1 + d^2/2 \cdots \cdots$$

.....公式八

四、十字型的移位跳棋遊戲中，可以歸納出以下的解題原則：

1.應用直線型方式，一組一組處理，即可找到最少步。

2.偶數邊交會於一個路口的圖形，均適用此原則。

五、雙迴路等長型的移位跳棋遊戲中，可以歸納出以下的公式：

(一)雙迴路等長型只有一個交換位置，唯交換位置有四個通路，減少的步數介於直線型與迴路型的中間。

(二)雙迴路等長型交換的最少步數(B) = $n \times (n/2 + 2)$ ……公式九

六、A 字等長型的移位跳棋遊戲中，可以歸納出以下的公式：

1.A 字型是迴路加上直線等長型的組合。

2.A 字型最少步數

= 迴路 $n \sim n$ 型最少步數 + 直線 $2 \sim 2$ 型最少步數 - 直線 $1 \sim 1$ 型……公式十

七、日字等長型的移位跳棋遊戲中，可以歸納出以下的解題原則：

1.日字型是兩個迴路型與直線 $1 \sim 1$ 型的組合。

2.日字型最少步數

= 甲迴路最少步數 + 乙迴路最少步數 - 直線 $1 \sim 1$ 型……公式十一

柒、展望

本研究可持續發展其他變化型、棋子移動形式或甚至於多顏色互換的序列拓展，很值得開發與努力。

捌、參考資料

- 數學遊戲 凡異出版社
- 益智遊戲 故鄉出版社
- 中華民國第三十九屆科學展覽優勝作品專輯(高中組)
- 數學思考 九章出版社

評語：

本作品討論的是一個流傳很廣的遊戲，難得的是作者從不一樣的角度來考慮問題，在推廣此問題到一些變形的狀況，作者討論了所需的最短時間，給出了完整的解答。其所討論的各種變形問題都十分有趣，所使用的方法也十分有系統，而且一些基本的方法可以再推廣至其他更複雜的情況，是一件難得且傑出的好作品。

作者簡介

我叫郭哲維目前是薇閣中學一年級的學生，我從小學四年級開始參加科展比賽，四年以來，我一值研究的都是數學，這是我第一次單槍匹馬披褂上陣，感謝老師的指導，除了得到很優秀的成績以外，更學到了許多寶貴的經驗，今後我會在數學研究這條路上繼續努力。