

作品名稱：太陽方位公式化

國中組 地球科學科 第二名

縣市：彰化縣

作者： 劉金瑞、林奕廷

羅元隆、張景賀

校名：彰化縣立員林國民中學

指導教師： 李志宇、蕭文生

關鍵詞：太陽方位、公式化



題目：太陽方位公式化

一、研究動機：

太陽在天空中的方位，會隨觀察者所在位置的不同和觀察時間的不同而有所不同，我們對預測太陽的方位感到興趣。在學習理化的過程中，發現課本常將許多現象的規律性以數學公式表示，那麼太陽的方位是否也可以數學公式表示？我們是否可以利用此公式很快的算出不同位置的觀察者在不同時間下觀察到的太陽的方位？爲了進一步探討，於是開始了以下的研究。

二、研究目的：

- (一)更了解太陽在天空中方位變化的情形。
- (二)把太陽在天空中方位變化的規則性以數學公式表示出來。

三、研究設備器材：

地球儀、鐵絲、紙、筆、電腦。

四、研究過程

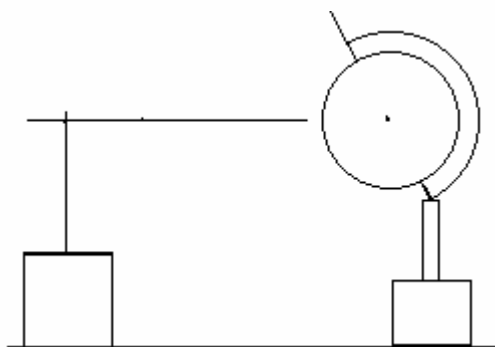
(一)利用簡易模型，找出太陽軌跡的規律性：

1.背景：

地球不停的繞著太陽公轉與自轉，因此太陽在地面上的位置時時在變，找出太陽位置變化的規律性，應該是探討太陽方位的第一步，經過討論，我們決定利用模型的幫助來探討，於是開始進行以下的研究。

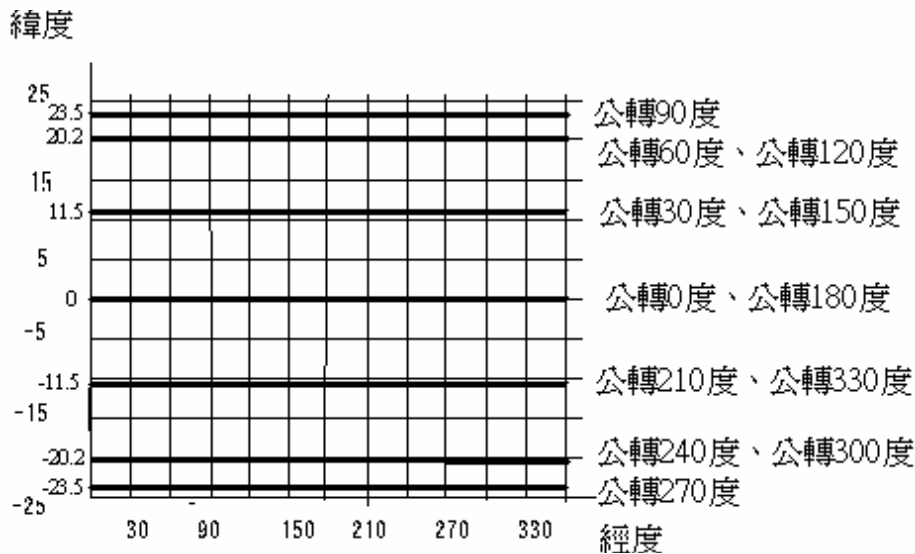
2.操作步驟：

- (1)在桌面上畫一個直徑約 50 公分的大圓，並 12 等分該圓。
- (2)在圓中心水平放置一鐵絲，鐵絲與地球儀的球心等高，且可以水平旋轉，如下圖所示



- (3)將地球儀放在圓周上，和鐵絲的相對位置如同春分日和太陽的相對位置，將鐵絲的前端對準地球儀的中心，旋轉地球儀，每旋轉 15 度，記錄鐵絲所指示的經度與緯度，旋轉一周後停止。
- (4)將地球儀沿著圓周逆時針移動 30 度(1/12 等分)，自轉軸的方向不變，重覆步驟(3)。
- (5)將地球儀每次移動 30 度，重覆步驟(3)，直到移動至 330 度操作後停止，如此可找出地球公轉至不同的位置時，一太陽日中太陽在地面上位置變化的軌跡。

3.結果：



4. 結論與討論：

(1) 地球自轉一周，太陽的軌跡為在同一緯度上繞行一周，但隨著公轉角度的不同，太陽所繞行的緯度也隨之改變。

(2) 為方便太陽位置的表示，本研究我們以太陽中心和地球中心的連線與地球表面交點位置來表示太陽的位置，而太陽的軌跡則是指地球轉動時太陽位置所連成的曲線。

(二). 地球公轉的角度和太陽繞行的緯度二者間關係的推導：

1. 背景：

由上知，隨著地球公轉角度的不同，太陽所繞行的緯度也隨之改變，例如，地球公轉角度 30 度，太陽繞行緯度為北緯 11.5 度，地球公轉 90 度，太陽繞行緯度為北緯 23.5 度，我們想要更進一步知道，地球公轉至任意角度時，太陽繞行緯度為何？於是開始了以下的推導。

2. 名詞解釋：

以下名詞是為方便推導和方便說明推導的過程所建立的專有名詞：

標準坐標：以地球中心為原點，XY 平面和黃道面重疊，Z 軸垂直黃道面，X 軸正方向為春分正午時太陽中心指向地球中心的方向的直角坐標系統，以 XYZ 表示。

地球坐標：以地球中心為原點，固定標準坐標 X 軸，將標準坐標沿 Y 軸負方向旋轉 23.5 度，使 Z 軸和地球自轉軸重疊的直角坐標系統，以 X'Y'Z' 表示。

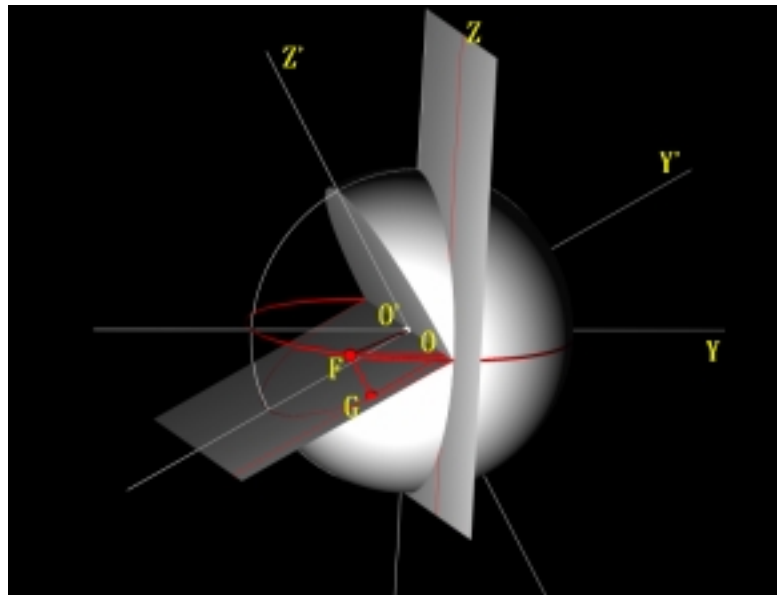
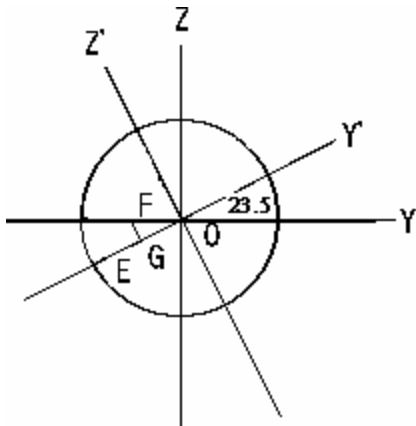
標準坐標經緯度：假想標準坐標的 Z 軸為自轉軸，仿照地球經緯度的製作法製作出來的經緯度(註：標準坐標經度 0 度和地球經度 0 度相交於赤道上一點)。

3. 推導過程：

(1) 由上面模型的操作可知，地球自轉一周，太陽的軌跡為在同一緯度上繞行一周，∴ 只要求得某一時刻太陽在地面的緯度，即求得太陽當日所繞行的緯度。當地球公轉 ω 度時(以春分正午算起)，太陽繞行的緯度為何？我們以該太陽日地球自轉到標準坐標經度 0 度與標準坐標 X 軸正方向同一方向的時刻做為觀察時刻，在此時刻，太陽位置其標準坐標經度為 $\theta = \omega - 180$ ($\omega - 180$ 小於 0 代表西經，大於 0 代表東經)，而標準坐標緯度 $\phi = 0$ 。

(2) 當太陽的位置其標準坐標經緯度為 $(\theta, 0)$ ， $\theta = \omega - 180$ ，此時地球坐標的緯度 ϕ' 為何？

若能求出，即可知道太陽繞行的緯度。為完成此工作，做圖如左下圖(X 和 X' 軸同一條，垂直紙面，穿過 O 點)，右下圖為其立體圖



若太陽的位置在 F 點，其標準坐標經緯度為 $(\theta、0)$ 。

則 F 點與標準坐標 XZ 面的距離 $FO = R \sin \theta$ (R 為地球半徑) (2-1)

則 F 點與地球坐標 X'Y'面的距離 $FG = R \sin \theta \sin 23.5$ (2-2)

若 F 點地球坐標緯度為 ϕ' ，則 $R \sin \phi' = FG = -R \sin \theta \sin 23.5$ (2-3)

($\sin \phi'$ 和 $\sin \theta$ 二者的符號永遠相反，所以在 $R \sin \theta \sin 23.5$ 前加負號)

所以 $\phi' = -\sin^{-1} \sin \theta \sin 23.5 = -\sin^{-1} \sin(\omega - 180) \sin 23.5$ (2-4)

4.公式驗證：

此公式是否合理，可將不同的公轉角度代入公式，求出太陽繞行緯度，與實驗結果比較，驗證是否正確。

公轉角度	地球坐標緯度	太陽繞行緯度
60	20.20175	北緯20.2度
90	23.5	北緯23.5度
120	20.20175	北緯20.2度
180	0	緯度0度
270	-23.5	南緯23.5度
240	-20.2017	南緯20.2度
300	-20.2017	南緯20.2度
360	-2.8E-15	緯度0度

結果：公式求得的結果與實驗結果相符，此公式合理，可以接受。

5.結論與討論：

(1)經由推導得到，地球公轉至任一角度 ω 時，太陽所在的緯度 ϕ' 可以下列公式求得

$$\phi' = -\sin^{-1} \sin(\omega - 180) \sin 23.5$$

(2)若地球公轉至 ω 時不再公轉只有自轉的情況下，太陽會在同一緯度繞行，上述公式是在這種情況下所導出的，但若繼續公轉，太陽所在的緯度會略有改變，所以一太陽日內，因

為地球的公轉，太陽位置並不在同一緯度上，各時間稍有不同，但為方便探討，本研究仍視一太陽日內太陽位置在同一緯度，以該太陽日正午時太陽所在的緯度來表示該日太陽的緯度，以此理想的觀點來探討太陽的方位。

(3)以下當我們提到”地球公轉至 ω 時，該太陽日、”指得是地球由 $\omega-(0.986301/2)$ 公轉至 $\omega+(0.986301/2)$ 的這一段時間(註：0.986301 為地球每太陽日的平均公轉角度)，並且在此太陽日的正午地球公轉的角度為 ω 。

6.問題與說明：

問題：

地球公轉至任一角度 ω 時，該太陽日太陽繞行的緯度可由公式求得其值，我們可視一太陽日中太陽都在同一緯度，但1 太陽日中，由於地球的自轉，太陽所在的經度卻時時在變，能否找出一太陽日中不同的時刻太陽所在的經度？

說明：

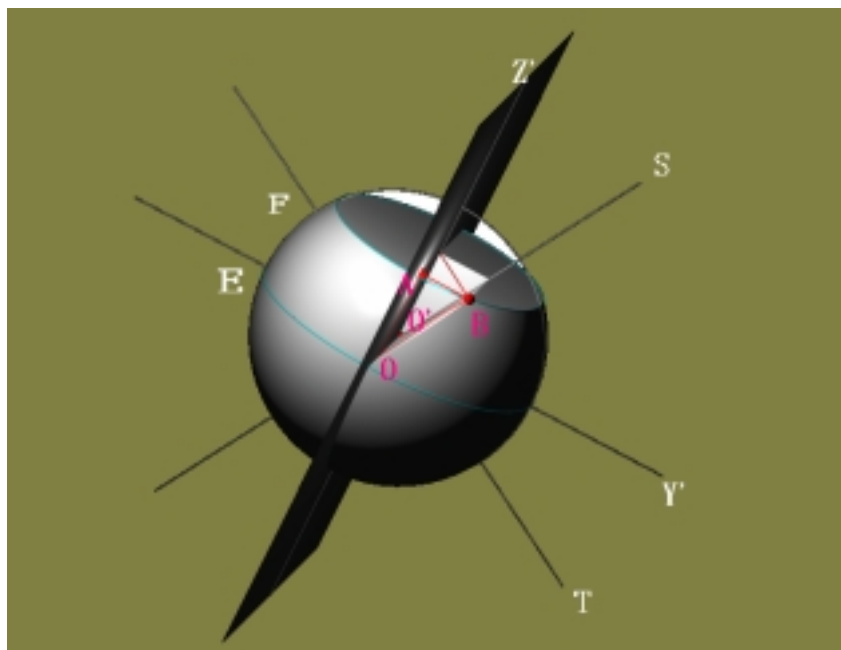
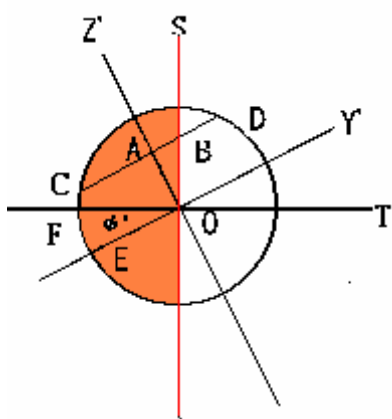
太陽每小時在同一緯度繞行的經度約為 15 度，我們可定觀察者所在的位置其經度為 0 度，則當太陽位置經度為 0 度時，時刻為正午，太陽位置經度為 15 度時，時刻為正午前 1 小時，太陽位置經度為 30 度時，時刻為正午前 2 小時，依此類推。若以 t 代表午前或午後的時刻，午前為負值，午後為正值，我們可以公式 $\theta' = -15t$ 表示不同時刻太陽的經度。如此，我們可得該太陽日正午前任何時刻太陽位置的經緯度。

(三).太陽繞行緯度和各緯度日出、日落時太陽所在的經度間關係的推導

1.背景：

由上我們知道，當地球公轉至 ω 角度時，該太陽日正午前任何時刻太陽所在的經緯度都可推知。對不同緯度的觀察者，該太陽日日出、日落時刻，太陽所在的經度並不相同，我們希望知道此太陽日各緯度日出、日落時太陽所在的經度？如此才能完整描述日出至日落每一時刻太陽的方位，於是開始了以下的推導。

2.推導過程：



在左上圖中， Z' 軸為地球自轉軸，而 S 軸的左側為日照亮區，右側為日照不到的暗區， S 、

T 二軸互相垂直，太陽直射 F 點，B 點為 CD 緯線晝夜分界點，右上圖為其立體圖。
 (找出 B 點和 C 點的經度差，即可知太陽在日出、日落和正午的經度差，定觀察位置經度 0 度，則正午時太陽所在的經度 0 度，如此可推知日出、日落太陽的經度)

對任一緯度 ϕ' (圖中 CD)而言，與赤道面的距離(即與 X'Y' 面的距離)

$$OA = R \sin \phi' \quad (R \text{ 為地球半徑}) \quad \dots \dots (3-1)$$

若太陽所在(直射)緯度為 ϕ' ，則 $\angle AOB = \angle FOE = \phi'$

$$\therefore \tan \phi' = AB/OA, \therefore AB = OA \tan \phi' = R \sin \phi' \tan \phi' \quad \dots \dots (3-2)$$

$$\text{若 } \theta'_B \text{ 表 B 點相對於 A 點的經度，則 } AB = R \cos \phi' \sin \theta'_B \quad \dots \dots (3-3)$$

由(3-2)、(3-3)得 $R \cos \phi' \sin \theta'_B = R \sin \phi' \tan \phi'$

$$R \sin \theta'_B = R \tan \phi' \tan \phi'$$

$$\therefore \theta'_B = \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi' \quad \dots \dots (3-4)$$

當太陽所在緯度和觀察者所在緯度在同半球時， $\tan \phi'$ 和 $\tan \phi'$ 的乘積為正，其 \sin^{-1} 值為正，
 \therefore 由(3-4)可知 θ'_B 為正，此時由圖中可看出，日出經度與正午經度差 > 90 度，其值為 $90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi'$ ；
 當太陽所在緯度和觀察者所在緯度在不同半球時，由(3-4)可知 θ'_B 為負，此時由圖中可看出，日出經度與正午經度差 < 90 度，其值也為 $90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi'$ ，所以日出經度與正午的經度差可寫成 $\Delta \theta'_r = 90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi' \quad \dots \dots (3-5)$

同理

$$\text{日落經度與正午的經度差也可寫成 } \Delta \theta'_s = 90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi' \quad \dots \dots (3-6)$$

若定觀察者所在位置的經度為 0 度，則正午時太陽經度為 0 度，所以

$$\text{日出經度為 } \theta'_r = 90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi' \quad \dots \dots (3-7)$$

$$\text{日落經度為 } \theta'_s = -(90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi') \quad \dots \dots (3-8)$$

3.公式驗證：

此公式是否合理，可將數個常討論的情況代入公式，求出日出、日落的經度，與實際情況比較，驗證是否正確。

太陽緯度	觀察緯度	日出經度
23.5	23.5	100.898(夏至)
0	23.5	90(春分、秋分)
-23.5	23.5	79.10196(冬至)
23.5	0	90(夏至)
0	0	90(春分、秋分)
-23.5	0	90(冬至)
23.5	-23.5	79.10196(夏至)
0	-23.5	90(春分、秋分)
-23.5	-23.5	100.898(冬至)

結果：以上為不同緯度的觀察者在夏至、春分、秋分、冬至時的日出經度，公式求得的結果與實際情況相符，表示此公式合理，可以接受(日落的情形類似)。

4.結論與討論：

(1)地球公轉至 ω 角度時，太陽繞行緯度為 ϕ' ，對任一緯度 ϕ' 的觀察者，該太陽日中其日出、日落時太陽的經度為

$$\theta' = \pm(90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi') \quad \dots \dots (3-9)$$

(四)不同緯度的觀察者，觀察不同經緯度的太陽時，其仰角和方向的推導

1.背景：

一路推導下來可知，只要知道地球公轉的角度，各緯度觀察者在該太陽日從日出到日落任何時刻太陽所在的經緯度都可推知，我們想進一步知道太陽在這些位置時，觀察者所觀察到的太陽其仰角、方向各是多少？所以開始了以下的推導。

2.名詞解釋：

球面坐標：以地球球面上某點為原點，Z''軸為該點所在經線在該點的切線，Y''軸為該點所在緯線在該點的切線 (Z''Y''面和球面在該點相切)，X''軸正方向為球心指向該點的直角坐標，以 X''Y''Z''表示。

3.推導過程：

當太陽在地表上的位置其經緯度為(θ', φ')，其在地球坐標 X'Y'Z'三軸上的分量為

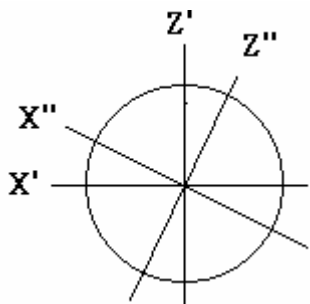
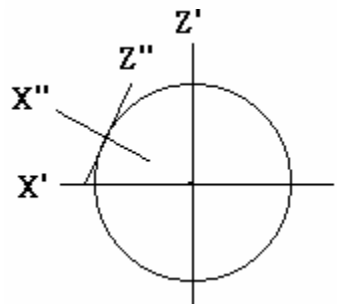
$$Z' = R \sin \phi' k' \quad \dots \dots (4-1)$$

$$X' = R \cos \phi' \cos \theta' i' \quad \dots \dots (4-2)$$

$$Y' = R \cos \phi' \sin \theta' j' \quad \dots \dots (4-3)$$

(註：此處地球坐標與前面所提的地球坐標略有不同，此處地球坐標其 X' 軸的正方向為由地球中心指向經緯度(0, 0)的方向，此方向隨地球的轉動而變，而前面所提的地球坐標其 X' 軸正方向為春分正午由太陽中心指向地球中心的固定方向，二者略有不同，在此說明。)

對北緯 23.5 度的觀察者而言(觀察者所在經緯度為(0, 23.5))，其球面坐標 X''Y''Z''與地球坐標 X'Y'Z'的相對位置如左下圖(Y'、Y'' 軸垂紙面)，由於 X'、Y'、Z'三向量在 X''、Y''、Z''三軸的分量不因球面坐標 X''Y''Z''的平移而改變，所以可將球面坐標平移至球心，如右下圖



$$Z' = R \sin \phi' \cos 23.5 k'' + R \sin \phi' \sin 23.5 i'' \quad \dots \dots (4-4)$$

$$X' = R \cos \phi' \cos \theta' \cos 23.5 i'' - R \cos \phi' \cos \theta' \sin 23.5 k'' \quad \dots \dots (4-5)$$

$$Y' = R \cos \phi' \sin \theta' j'' \quad \dots \dots (4-6)$$

(i'、j'、k'代表地球坐標的 X'、Y'、Z'三軸的單位向量)

(i''、j''、k''代表球面坐標的 X''、Y''、Z''三軸的單位向量)

所以太陽位置在該球面坐標 X''、Y''、Z''三軸上的分量為

$$X'' = R \cos \phi' \cos \theta' \cos 23.5 i'' + R \sin \phi' \sin 23.5 i'' \quad \dots \dots (4-7)$$

$$Y'' = R \cos \phi' \sin \theta' j'' \quad \dots \dots (4-8)$$

$$Z'' = R \sin \phi' \cos 23.5 k'' - R \cos \phi' \cos \theta' \sin 23.5 k'' \quad \dots \dots (4-9)$$

同理可知其他緯度 φ' 的觀察者的球面坐標 X''Y''Z''為(觀察者所在經緯度為(0, φ'))

$$X'' = R \cos \phi' \cos \theta' \cos \phi' i'' + R \sin \phi' \sin \phi' i'' \quad \dots \dots (4-10)$$

$$Y'' = R \cos \phi' \sin \theta' j'' \quad \dots \dots (4-11)$$

$$Z'' = R \sin \phi' \cos \phi' \cdot k'' - R \cos \phi' \cos \theta' \sin \phi' \cdot k'' \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (4-12)$$

由球面坐標的定義中可知，Y''Z''平面為地面，Y''軸正方向為東方，Z''軸正方向為北方，若太陽和東西方的夾角為 α ，太陽和地面的夾角(仰角)為 β ，則

$$\sin \alpha = Z'' / (Y''^2 + Z''^2)^{1/2} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (4-13)$$

$$\sin \beta = X'' / (Y''^2 + Z''^2 + X''^2)^{1/2} = X'' / R \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (4-14)$$

$$\alpha = \sin^{-1} (Z'' / (Y''^2 + Z''^2)^{1/2}) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (4-15)$$

$$\beta = \sin^{-1} (X'' / R) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (4-16)$$

以公式求出和東西方的夾角後，若 $\alpha > 0$ ，太陽的方向偏北， $\alpha < 0$ ，太陽的方向偏南(由代入的經度可知在東方或西方)。

求出太陽的仰角後，若 $\beta > 0$ ，太陽在地平面上， $\beta < 0$ ，太陽在地平面下。

4.公式驗證：

此公式是否合理，可將數個常討論的情況代入公式，求出太陽的仰角及太陽與東西方的夾角，與實際情況比較，驗證是否正確。

太陽經度	太陽緯度	觀察者所在緯度	太陽方向與東西方夾角	太陽仰角	日期時間
0	23.5	23.5	90	90	夏至正午
0	0	23.5	-90	66.5	春分正午
0	-23.5	23.5	-90	43	冬至正午
-90	0	23.5	0	0	春分日落
90	0	23.5	0	0	春分日出
0	23.5	0	90	66.5	夏至正午
0	0	0	90	90	春分正午
0	-23.5	0	-90	66.5	冬至正午
90	0	0	0	0	春分日出
-90	0	0	0	0	春分日落

結果：由公式我們算出在北緯 23.5 度和赤道的觀察者在不同的節氣中所見太陽的仰角和太陽的方向(與東西方的夾角)，與實際情況相符，公式合理，可以接受。

5.結論與討論：

(1)任何經緯度(θ' ， ϕ')的太陽，在緯度 ϕ' 的觀察者所觀察到的太陽方位，可用下列公式求得

與東西方夾角 $\alpha = \sin^{-1} (Z'' / (Y''^2 + Z''^2)^{1/2})$

仰角 $\beta = \sin^{-1} (X'' / R)$

其中

$$X'' = R \cos \phi' \cos \theta' \cos \phi' \cdot + R \sin \phi' \sin \phi' \cdot$$

$$Y'' = R \cos \phi' \sin \theta' \cdot$$

$$Z'' = R \sin \phi' \cos \phi' \cdot - R \cos \phi' \cos \theta' \sin \phi' \cdot$$

若 $\alpha > 0$ ，太陽的方向偏北， $\alpha < 0$ ，太陽的方向偏南(由代入的經度可知在東方或西方)。

若 $\beta > 0$ ，太陽在地平面上， $\beta < 0$ ，太陽在地平面下。

五、研究總結與討論：

(一)本研究我們推導出尋找太陽方位的公式，只要找出地球公轉的角度 ω 和指出觀察緯度 ϕ_0' ，則在該太陽日(地球由 $\omega-(0.986301/2)$ 公轉至 $\omega+(0.986301/2)$ 這段時間)中從日出、正午到日落任何一刻的太陽方位都可利用公式求得。其步驟如下：

1. 求出太陽緯度 ϕ'

$$\phi' = -\sin^{-1} \sin(\omega-180) \sin 23.5$$

2. 求出太陽經度 θ' (觀察者所在位置經度 0 度)

$$\text{日出日落 } \theta' = \pm(90 + \sin^{-1} \tan \phi' \tan \phi_0')$$

$$\text{正午 } \theta' = 0$$

正午前後 t 時， $\theta' = -15t$ (午前 t 為負值，午後 t 為正值)

3. 求出太陽的仰角和方向

$$\text{太陽與東西方的夾角 } \alpha = \sin^{-1} (Z'' / (Y''^2 + Z''^2)^{1/2})$$

$$\text{太陽的仰角 } \beta = \sin^{-1} (X'' / R)$$

其中

$$X'' = R \cos \phi' \cos \theta' \cos \phi_0' + R \sin \phi' \sin \phi_0'$$

$$Y'' = R \cos \phi' \sin \theta'$$

$$Z'' = R \sin \phi' \cos \phi_0' - R \cos \phi' \cos \theta' \sin \phi_0'$$

若 $\alpha > 0$ ，太陽的方向偏北， $\alpha < 0$ ，太陽的方向偏南(由代入的經度可知在東方或西方)。

若 $\beta > 0$ ，太陽在地平面上， $\beta < 0$ ，太陽在地平面下。

(二)理論上地球上任何位置的觀察者只要能找出某一個太陽日正午時地球的公轉角度 ω ，配合觀察者所在的緯度 ϕ_0' ，就能利用本公式求出該太陽日中不同時刻太陽的方位，但如何尋找 ω ？實用上可配合日曆來使用。在本研究中，以春分正午做為公轉的起點，其 ω 值為 0 ，所以日曆上某月某日正午太陽公轉的角度為(該日與春分日的日數差) \times (太陽每日公轉的角度 0.986301)，再代入所導出公式，即得太陽日中不同時刻太陽的方位。

(三)地球在各地公轉的速度不同，所以各太陽日地球公轉的角度不完全相同，我們以(該日與春分日的日數差) \times (太陽每日公轉的角度 0.986301)做為該日正午時地球公轉的角度，會有誤差，又日曆上春分日正午，太陽所在緯度也和赤道略有差異，所以所求出的地球公轉角度也和理論上的公轉角度略有誤差，忽略這些小誤差，可利用導出的公式獲得各太陽日在不同時刻近似的太陽方位。

(四)本研究只以正午前後時刻來描述太陽方位，轉換成標準時間有其複雜性，留待日後再來研究或其他有心人可將此公式再發揚光大。

(五)本研究結果，我們曾利用 Excel 簡單設計後，確定能快速求出各種情況下太陽的方位，限於篇幅，無法詳述，讀者可自行設計應用。此外，本研究結果也可提供給程式設計者利用電腦製成動畫，對教學可以有所幫助。

陸、參考資料：

1. 國中地球科學課本下冊(86 學年)。
2. 大學物理學 李怡嚴編著。
3. 電磁學 張霽秋編著

評語：

- 一、創造能力平實。
- 二、符合科學精神，態度認真。
- 三、推理過程嚴謹，邏輯完整。
- 四、表達過程尚有條理，但機智稍嫌不足。
- 五、實用性尚可。
- 六、作者似乎太專研於數學公式之推導，而忽略了地球科學的本質在於觀測。。

作者簡介

劉金瑞

就讀於員林國中資優班三年級，目前已甄選上台中一中數理資優班。平日習慣於生活中發掘問題，對科學的研究非常有興趣。此次為第一次參加全國科展比賽，希望上高中以後能有機會再參加類似活動。

林奕廷

目前就讀於員林國中資優班三年級，個性活潑。由於爸爸是醫生，哥哥姐姐也喜愛科學，耳濡目染下也對科學充滿興趣。平日常閱讀科學書籍、雜誌，最愛從事科學活動。此次為第一次參加全國科展比賽。

羅元隆

目前就讀於員林國中資優班二年級，平日常閱讀各類科學書籍，對於有益思考的數學題目特別偏愛。多次參加縣內科展比賽，此次為第一次參加全國科展比賽。

張景賀

目前就讀於員林國中資優班二年級。平日喜歡與同學討論、研究問題。對數學、電腦特別有興趣。此次為第一次參加全國科展比賽。