

作品名稱：磁力懸浮法測量液體密度之研究

高中組 物理科 第一名

縣市：台北市

作者：鍾介文、林柏廷

林怡欣、林惠娟

校名：台北市立麗山高級中學

指導教師：陳聲台

關鍵詞：密度、磁力、懸浮



# 磁力懸浮法測量液體密度之研究

## 高中組物理科第一名

台北市立麗山高級中學

作者：鍾介文、林怡欣、林惠娟、林柏庭

指導老師：陳聲台

### 一、研究動機

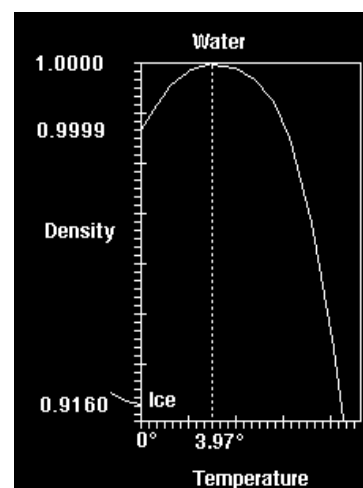
國中理化有水的體積對應溫度的圖形，若將其轉換成密度對應溫度的圖形，應該是如右圖所示。若要繪出正確的實驗結果，密度至少需測量至  $10^{-4}$  g/ml 的等級，而且要有恆溫的加熱冷卻系統。在不斷實驗改良下，我與同學們共同發展出一套磁力懸浮系統來測量液體密度，其實驗結果已初步達到預設的目標，以下是整個研究及測量的過程。

### 二、研究目的

- (一) 研究如何以磁力懸浮法測量液體密度
- (二) 測量線圈軸向磁場分佈情形
- (三) 研究磁力懸浮系統及其光電控制電路
- (四) 研究恆溫冷卻系統及微幫浦供水系統
- (五) 用上述各項研究測量純水密度相對於溫度變化之曲線

### 三、研究器材

- |             |                |
|-------------|----------------|
| 1.自繞線圈三十餘個  | 2.多功能線圈磁場測量座一組 |
| 3.恆溫加熱冷卻系統  | 4.光電控制磁力懸浮系統   |
| 5.微量幫浦供水系統  | 6.密度及溫度顯示電路    |
| 7.直流電源供應器二台 | 8.數位電錶二台       |
| 9.高斯計一台     | 10.數位溫度控制器二台   |
| 11.銀幕式顯微鏡一組 | 12.微型動力幫浦一台    |



### 四、文獻探討

#### (一).以已知密度固體測量液體密度

##### 1.構想：

古希臘先哲阿基米德曾以水(密度固定的液體)來分辨皇冠(密度可以改變)的真偽而傳為美談。我們現在可以反過來思考，是否能以密度不變的固體(浮子)來測量液體密度(會隨液體種類及溫度而改變)之變化呢？

##### 2.原理：

(1)均勻物質之密度  $\rho$  的定義為:

$$\rho = m/v \text{ (g/ml)}$$

(2)因爲  $v$  是溫度  $T$  及壓力  $P$  的函數，但在壓力變化範圍不大的狀況下，通常液體可視爲不具壓縮性，因此密度  $\rho$  也可視其僅爲溫度之函數

$$\rho = \rho(T)$$

整個實驗的主軸就是精密測量水的  $\rho$  與  $T$  之關係。

(3)一密度爲  $\rho_b$  體積爲  $v_b$  的固體置於密度爲  $\rho$  的液體中，若重力加速度爲  $g$ ，則固體所受到的浮力爲

$$F_B = \rho v_b g$$

固體的實重(地球對其引力)爲

$$F_g = \rho_b v_b g$$

因此固體在水中的視重可寫爲

$$\begin{aligned} F_c &= F_g - F_B = \rho_b v_b g - \rho v_b g \\ &= g v_b (\rho_b - \rho) \end{aligned}$$

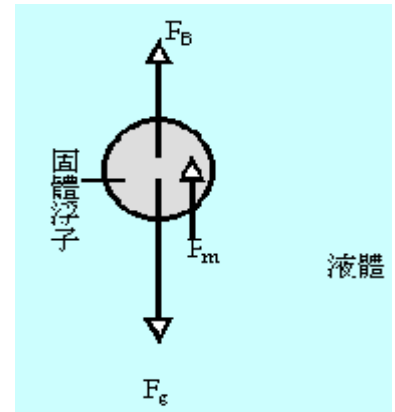
若能在液體中對此固體施一 向上的力  $F_m$  以平衡其視重，則固體即能懸浮於該液中不升也不降，此時

固體淨力爲

$$\Sigma F = F_m - F_c = F_m - g v_b (\rho_b - \rho) = 0$$

$$\therefore F_m = g v_b (\rho_b - \rho)$$

$$\therefore \rho = \rho_b - F_m / g v_b \dots\dots\dots(1)$$



(4).現在開始我們將上述的固體稱爲浮子，浮子密度  $\rho_b$  可寫爲固定的某常數  $A$ 。若外力  $F_m$  能比例於某一項物理量  $\chi$  ( $\chi$  可能是電場強度、磁場強度或電流值.....等)，即

$$F_m \propto \chi$$

所以  $F_m / g v_b$  也與該物理量  $\chi$  成比例，亦即

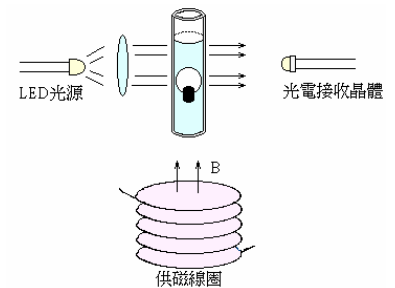
$$F_m / g v_b \propto \chi$$

我們於此引入一個新的常數  $B$ ，因此上式可寫成

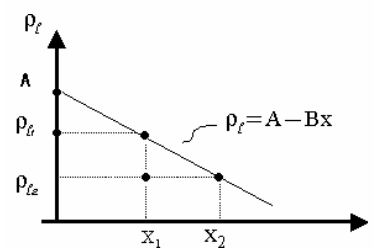
$$F_m / g v_b = B \chi$$

由此(1)式可重新寫爲

$$\rho = A - B \chi \dots\dots\dots(2)$$



(5).上式若以  $\rho_f$  爲縱軸，以  $\chi$  爲橫軸來繪圖可得到下左圖所示的直線方程式，其中縱軸截距  $A$  點代表固體浮子的密度，不過我們事先不需要知道它的值，只要找到兩種以上已知密度( $\rho_1$ 、 $\rho_2$ ..... $\rho_n$ )的液體，將浮子分別置入這些液體中調整物理量  $\chi$  至浮子能靜止平衡，紀錄  $\chi$  的測量值，如此便有了 ( $\chi_1, \rho_1$ )、( $\chi_2, \rho_2$ )、( $\chi_3, \rho_3$ ).....等的數據，再以數值分析的方法對這些數據做線性回歸即可得常數



A 與 B。

(6).有了 A、B 兩常數，此一浮子便可以置入任何一未知密度的液體中，記錄浮子達到靜止平衡時的物理量  $\chi$ ，那麼該未知液體的密度  $\rho$  即可由(2)式直接求得，很是方便。接下來的工作就是考慮該使用何種物理量來製造向上的平衡力  $F_m$ 。

(7).因為實驗在液體中進行，故考慮對浮子施以非接觸力較為妥當，也就是說不外乎用電場力或磁場力來製造  $F_m$ ，若採用電場力則必須對浮子事先予以充電，然後才供應電場使其受力，在液體中這是相當困難且不切實際的。我們最後決定用磁場力來推動浮子，因為只要使用具有永久磁矩的浮子，並在其下方安置一供磁的線圈，通以電流後就可以產生對浮子的磁力，我們調整此電流至浮子於液中平衡靜止後，記錄此時物理量電流  $I$ ，代入(2)式即可求得該液體密度。

(8).一個具有永久磁矩  $m$  的磁鐵恰置於螺線管中心軸線正上方受沿軸方向往上的力可寫為:

$$F = m \frac{dB}{dZ} \dots\dots\dots(4)$$

合併(1)式與(4)式可寫為

$$m \frac{dB}{dZ} = V_b(\rho_b - \rho_l) \dots\dots\dots(5)$$

### 3.螺線管軸向磁場分布之研究

(1)下面附圖為一長為  $L$ 、半徑為  $r$ 、繞有  $N$  匝漆包線之單層線圈，通有電流  $I$ ， $P$  為其軸線上一點，在線圈中心與  $P$  相距  $x$  之處生成的軸向磁場為:

$$B(X) = \frac{\mu_0 I n_0}{2} \left[ \frac{x + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \right] \dots\dots(6)$$

我們真正關心的不只是磁場  $B(x)$  的大小，更在意其沿軸向對位置變數  $x$  的微分

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 I n_0}{2} \left\{ \frac{\frac{\sqrt{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + r^2} - \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \left[\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}{\frac{\sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + r^2} - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \left[\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

對一固定螺線管軸線任一點  $P$  而言

$$\frac{dB}{dx} = KI \quad K \text{ 為某一常數。}$$

這個結果對我們有特別的意義，因為由此(5)式可改寫為

$$m \frac{dB}{dx} = gV_b(\rho_b - \rho_\lambda) \propto I$$

$$\therefore gV_b(\rho_b - \rho_\lambda) = KI$$

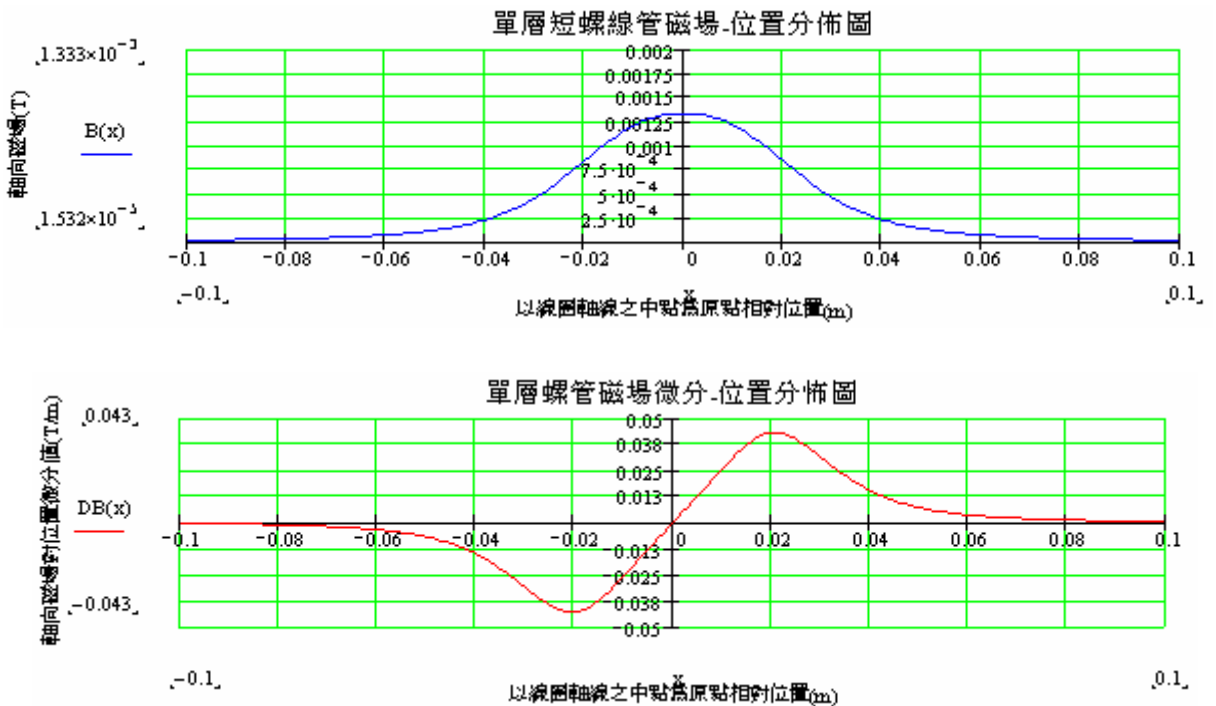
$$\therefore \rho_\lambda = \rho_b - \frac{KI}{gV_b} \dots\dots\dots(8)$$

上式中k、g、V<sub>b</sub>、ρ<sub>b</sub>皆為常數。比較(2)式中的常數A與B

$$\rho_\lambda = A - BI$$

只要常數A與B能事先求得，那麼每次測量浮子平衡時之供磁電流I就可以算出該液體密度了

(2)我們將(6)、(7)兩式以電腦分析我們可以發現一般有限長度螺管軸線上的磁場最強處在螺線管軸線正中央，而越往兩端延伸則逐漸衰減，兩端出口處雖然磁場漸弱，但其磁場B對位置x的微分值卻是最大的，這正符合我們的需求，因為浮子受的磁力為F=m(dB/dx)，實驗時若能讓浮子(小磁鐵)盡量靠近線圈端口，這樣就或可產生夠用的浮力以平衡浮子。

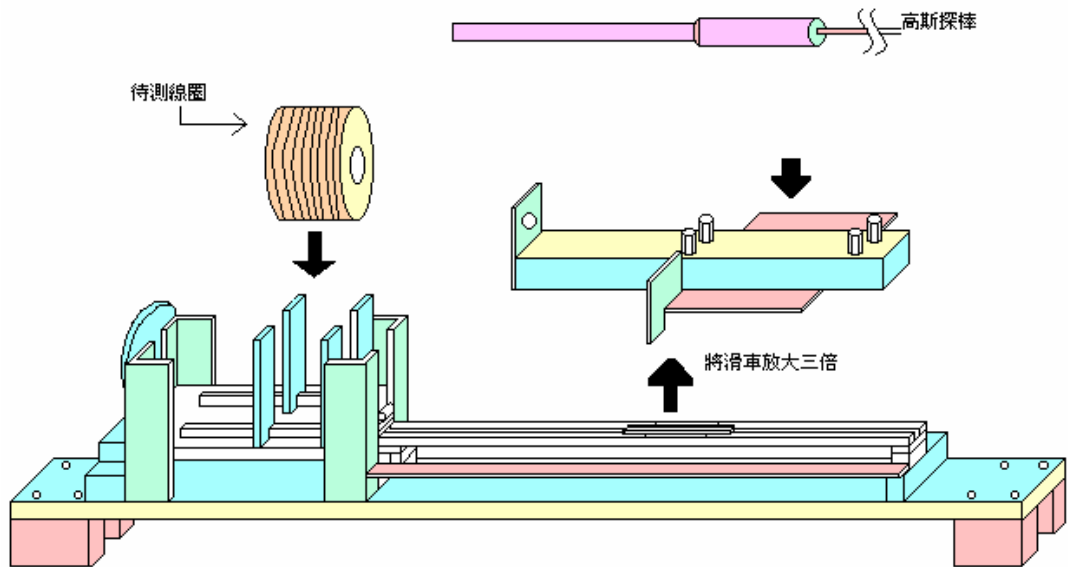


### 五、實驗器材研製

(一) 自製線圈軸向磁場測量之機座的設計與製作(以下詳述於作品說明書)

- 1.製作原因。
- 2.製作原則。
- 3.製作材料
- 4.製作工具
- 5.製作過程
- 6.以繞線機自行

繞製各種尺寸的線圈 (1)繞製線圈時所使用的工具 (2)繞製線圈的方法



## (二)磁力懸浮系統設計與製作

1.浮子構造：最初我們使用的 ABS 塑膠小球，在浮升過程中，因容易傾斜造成浮子翻轉，不容易靜止平衡，多次嘗試使用不同的材料來組成浮子，有用筆尖或各類塑膠小管內坎入磁鐵者，但浮子傾斜的問題依然存在，經長期改良後目前我們使用的浮子是在玻璃纖維圓柱中塞入柱狀釹鐵硼磁鐵，再封膠處理後完成，效果甚佳。

### 2.盛裝試液之容器之選擇

(1)為了方便以光電系統測量浮子是否靜止平衡，必須使浮子升降的路徑侷限於同一直線上，使用一種超小型的試管(0.5ml)，其口徑正好可容納浮子於管內升降。

(2)這種小型試管只需極小量的試液即可將其灌滿，此點對測量珍貴(或稀有)液體的密度殊為有利。

(3)由於小型試管的管壁很薄，內部盛裝試液又很少，故加熱或冷卻都能快速達成，不會造成試管內試液溫度分佈不均的現象。

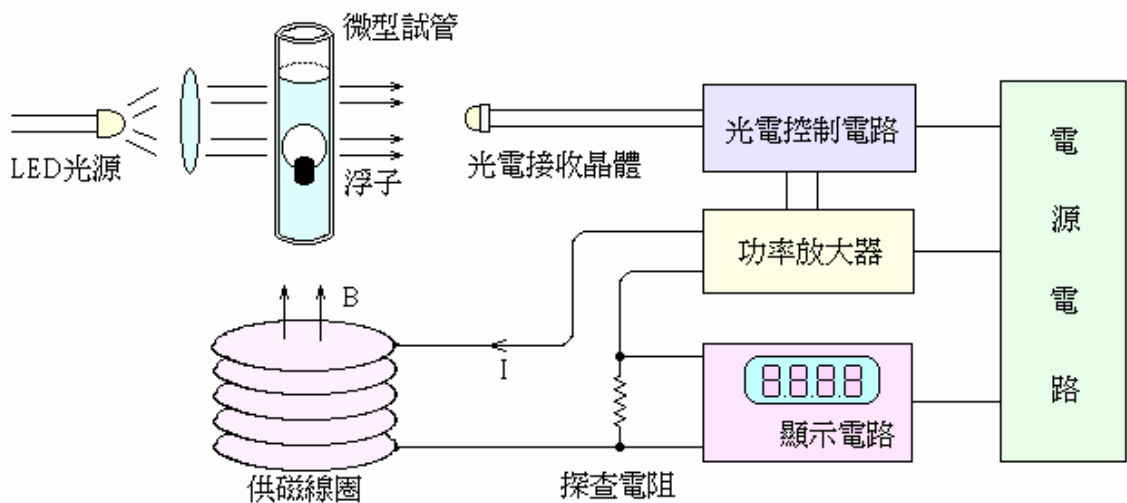
### 3.光電偵測系統之設計

(1)為了加熱(或冷卻)均勻，光電系統須浸入熱(冰)水中，我們製作了一個能同時容納小試管及光電系統的恆溫槽。

(2)恆溫槽具有八個聯外管路，計有光發射源管路(二路)，光電接收管路，直讀式顯微鏡監視管路，進水口及出水口管路(二路)，溫度感測器管路等。

(3)與光發射、接收管路方向垂直的另一組管路亦設置了一組光發射晶體及直讀式顯微鏡監視管路，當浮子升至預定位置時，可從電腦螢幕上清楚看到浮子上升速度逐步減緩而漸趨於平衡靜止的過程。

- (4)由光電偵測系統之電路方塊圖，當浮子受磁場的推力而浮升至光的通道附近時，由於浮子會逐漸擋住光線使得光電接收晶體所感測的光強度下降，因此光電流輸出也下降，後面的控制電路會反應此信號而給予功率放大電路較少的驅動電壓，因此功率放大器供應線圈的供磁電流也跟著減少，於是浮子所受的磁浮力下降，上升的趨勢將逐漸減緩，如此循環下去直至浮子達靜力平衡為止。
- (5)我們在線圈上串聯了一支  $1\Omega$  的電阻。此電阻上的電位降  $V$  可完全轉換成同數值的電流  $I$ ，因此我們可使用數位電壓錶來直接紀錄使浮子平衡的供磁電流  $I$ 。



#### 4.溫度顯示電路的設計

- (1)市售的白金溫度感測器體積都太大，我們改用電子溫度感測元件可達 $\pm 0.1^\circ\text{C}$ 。
- (2)將測得溫度以電壓形式輸出，用電壓隨耦器以低輸出阻抗傳輸至數位電錶。

#### 5.密度顯示電路之設計:

- (1)當浮子達平衡位置時，與線圈相串接的  $1\Omega$  上的電壓不僅被用來監視供磁電流，我們還設計把此一電壓傳送至另一電路使其能直接顯示待測液體的密度。
- (2)利用兩種以上已知密度  $\rho_i$  (須 L.C 等級 $\pm 0.0001\text{g/ml}$ ) 的試液及浮子升至定點時之對應的電流  $I$  可求得常數  $A$  與  $B$ 。
- (3)先將正相輸入端與接地(即  $A=0$ )，調整回授電阻使運算放大器輸出電壓與  $BI$

的值相等，然後將負相輸入端接地調整正相輸入端的直流電壓使運算放大器的輸出電壓與常數 A 的數值相等，調整後即可直接測讀液體密度了。

6. 密度計各單元組合作：(以下詳見說明書)

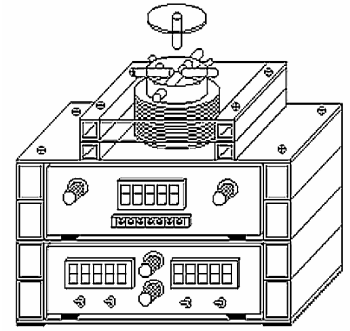
(1) 浮子的升降路線對準複層線圈中央軸線之校正

(2) 儀器架的設計與製作

(三) 加熱、致冷、溫度控制及微量供水系統

1. 微量抽水幫浦系統設計

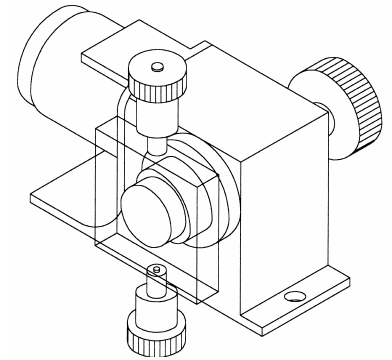
2. 循環水加熱、致冷的的方法



## 六、實驗過程

實驗(一) 浮子供磁線圈之測量(詳見說明書)

1. 以自製機座測量線圈軸向各點磁場
2. 實驗結果列表
3. 實驗結果曲線圖
4. 實驗結果討論



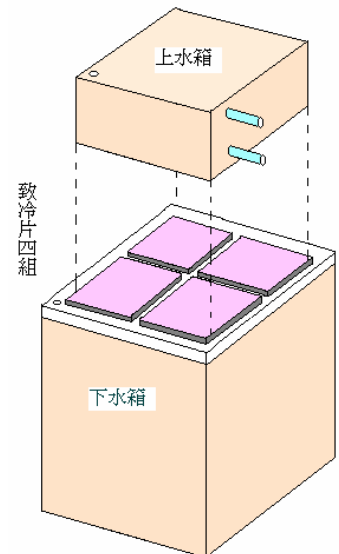
實驗(二) 加熱、致冷及溫控系統的實驗(詳見說明書)

1. 實驗步驟
2. 實驗數據列表
3. 實驗結果繪圖
4. 實驗結果討論

實驗(三) 測量純水密度(詳見說明書)

1. 自製密度計之調整與校正

- (1). 實驗室等級(L.C 10<sup>4</sup>等級)試劑之購備
- (2). 實驗步驟
- (3). 實驗結果列表
- (4). 實驗結果曲線繪圖
- (5). 實驗結果討論

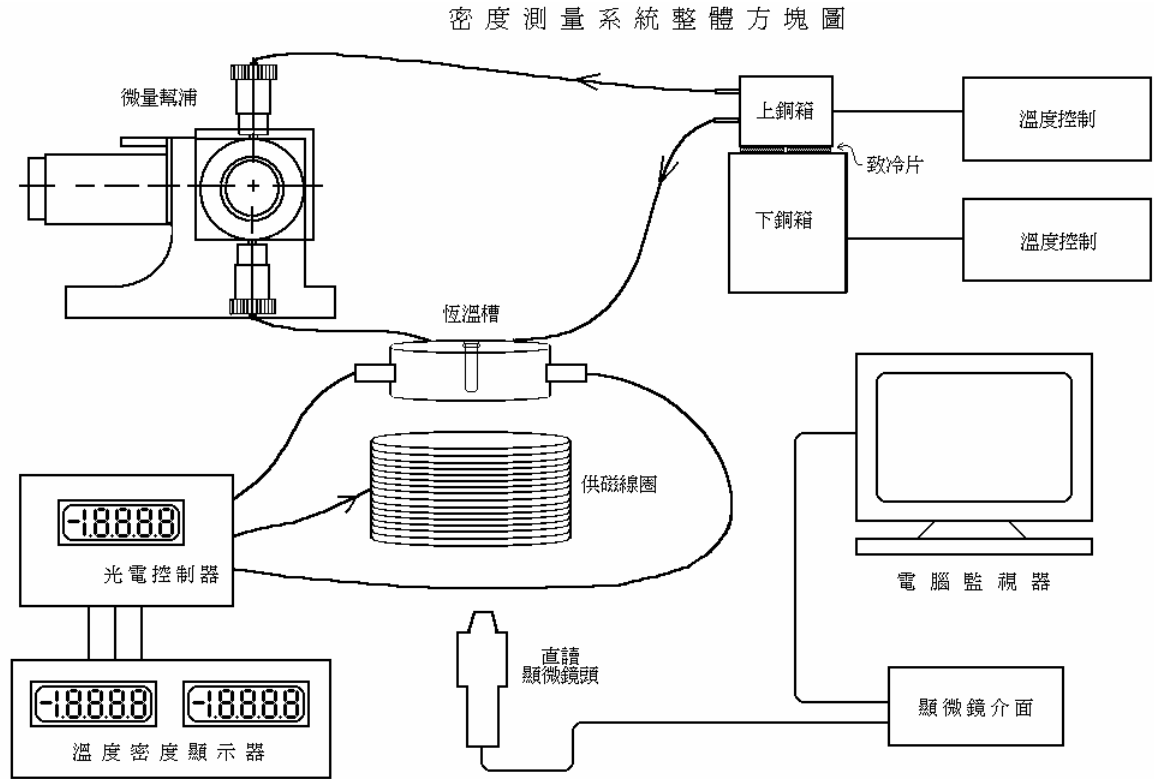


- a. 實驗曲線顯示，我們以直線方程  $Y = A - B * X$  對實驗之數據組做曲線擬合，得到了磁力懸浮系統的常數 A 與 B，其中 A=2.3058 而 B=11.7959。
- b. 試液數據組數越多，擬合所得之常數會越準確，且試液的密度值範圍越大越好，國內化學藥品有標示比重至 10<sup>4</sup>等級者少之又少，我們已經盡了最大力量去收尋了。
- c. 系統常數 A 其實就是浮子本身的密度，它必須比所有欲測試液的密度還大，



不過我們不需要事先知道其值，只要經上述數據擬合過程即可求得。

- d. 系統常數 B 是線圈供磁電流 I 的倍數，我們可以利用運算放大器調整其增益來獲得這個倍數 B，如此一來我們就可以做出一個直讀密度的顯示器。



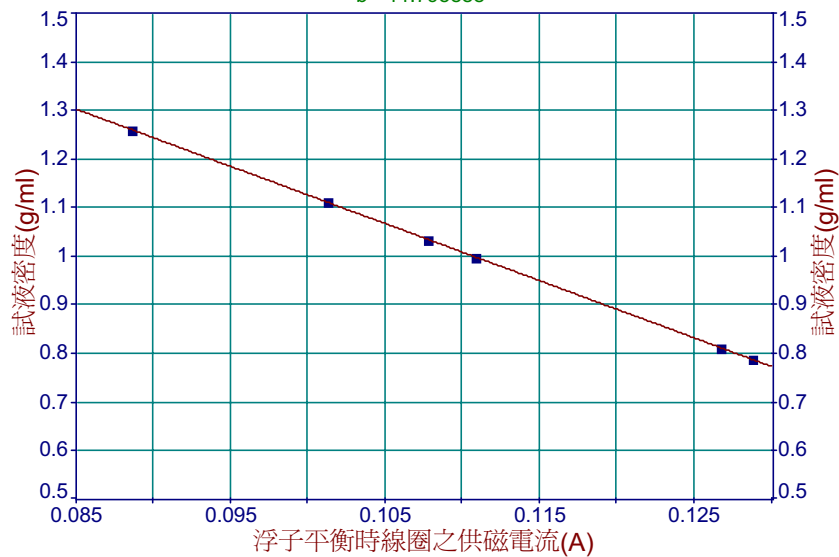
試液密度對浮子平衡時供磁電流關係圖

直線擬合  $y=a + (b)(x)$

$r^2=0.99997115$  DF Adj  $r^2=0.99995191$  FitStdErr=0.0010825964 Fstat=138622.21

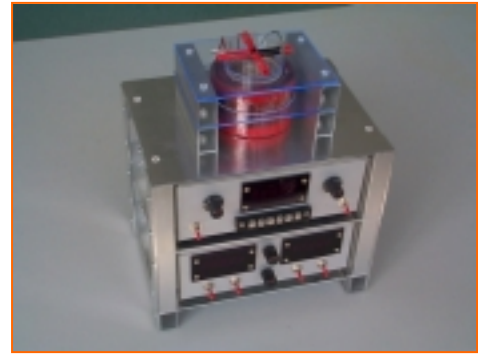
$a=2.3058348$

$b=-11.795888$



2. 密度顯示器之調整: (以下詳見說明書)
3. 以自製的磁力懸浮密度計測量純水密度值

- (1) 實驗步驟
- (2) 實驗結果列表:
- (3) 實驗結果曲線繪圖:

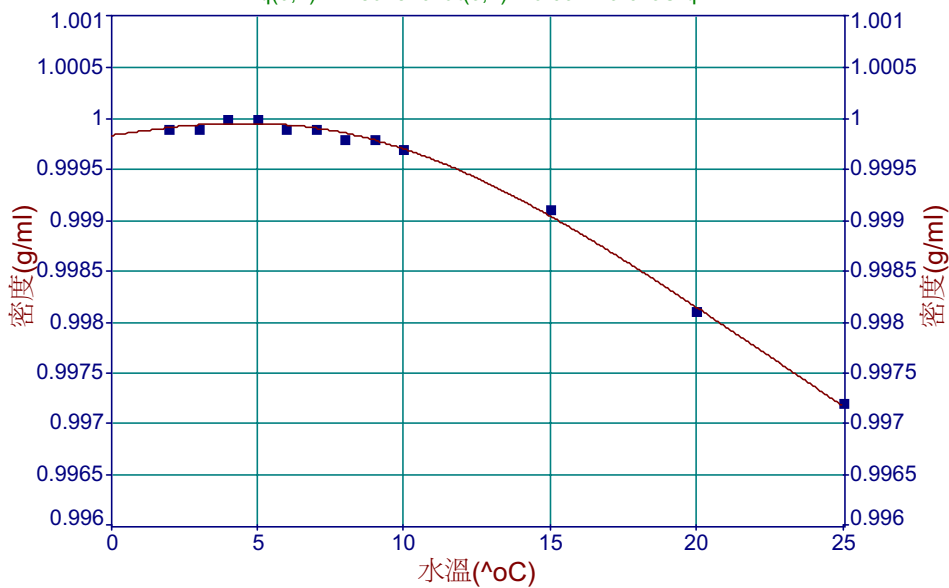


### 去離子二度蒸餾水密度相對溫度曲線

$$\rho(T,S,P) = \rho_m \{ 1 - \alpha [ |T - T_m(S,P)| ]^q (q(S,P)) \}$$

$$T_m(0,1) = 4.03^\circ\text{C} \quad \rho_m(0,1) = 999.97 \text{ Kg/m}^3$$

$$q(0,1) = 1.894816 \quad \alpha(0,1) = 9.30 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-q}$$



#### (4) 實驗結果討論

a. 迄至目前為止，在所有推求水的密度相對於溫度變化的方程式中，Gebhart 和 Mollendorf 兩人之方程式一直為科學界所公認是最準確的，其推導過程繁複，我們僅將其結果列出：

$$\rho = \rho_m \left\{ 1 - \alpha [ |T - T_m| ]^q \right\} \dots\dots\dots(10)$$

其中  $\rho$  為純水密度， $T$  為當時的水溫， $\rho_m$ 、 $\alpha$ 、 $T_m$  及  $q$  皆是鹽度和壓力的函數，而純水(鹽度為零)於定壓(一大氣壓)之下，以上四項變數可視為常數，即  $\rho_m = 999.97 \text{ kg/m}^3$ ， $T_m = 4.03^\circ\text{C}$ ， $q = 1.894816$ ， $\alpha = 9.30 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-q}$

b. 我們將上述四項變數代入(10)式中擬合實測的數據，由上頁兩圖顯示在水溫  $10^\circ\text{C}$  以上擬合的結果相當良好。

- c.於 $0^{\circ}\text{C}\sim 10^{\circ}\text{C}$ 的範圍內擬合較差，因為此段溫度範圍內純水的密度相對於溫度的變化極為細微，密度計測量值若僅能讀至 $0.0001\text{g/ml}$ 仍顯不足，最好能測讀至 $0.00001\text{g/ml}$ ，實驗數據才能與(10)式有較完美的擬合，這是我們要繼續努力的工作。
- d.為何純水的密度在 $4^{\circ}\text{C}$ 以下有減小的現象？此點感激工研院曾永寬教授給了我一個思考方向，即冰晶間距有多大的問題。
- e.由水分子及冰晶結構圖片，詳細比對及思考可做出以下推論：  
通常水溫下降時，水分子動能漸減，水的體積減小而密度逐漸增大直到 $4^{\circ}\text{C}$ 時密度達到最大值。至於 $4^{\circ}\text{C}$ 以下因水溫已極為接近凝固點了，此時水分子動能太小，一部份水分子已有逐漸填入冰晶格子的傾向，水分子因有氫鍵之強大引力使分子間距離很小，但是冰晶的間距較水分子距離為大，水溫若繼續降低水分子填入冰晶格子的數量就越多，整體體積就逐漸變大，水的密度也就因此逐漸降低了。

## 七、結論

我們所發展的磁力懸浮密度測量系統，國內尚未見到從事這個領域的研究論文，而國外書籍已發表的文章也缺乏對此項研究詳細而完整的報告，我們雖然完成了磁力懸浮密度計的階段實驗，但是也留下了不少問題有待繼續研究解決，其中最主要的幾項一是複層線圈出口處磁場對位置的變化率 $dB/dx$ 要如何測量？它是浮子受磁力的來源；另一為致冷系統應如何改良才能加快冷卻速度？目前的致冷速度仍嫌太慢；系統避震也是亟待解決的問題，每當浮子達到定位而呈現靜力平衡時地面輕微的振動都會引起小試管內的試液及浮子跟著晃動，這使得密度計讀數不停地改變不易讀取。浮子的材料也是欲改進的重點之一，因為它的密度也會隨著溫度而改變並非真正的常數，我們目前使用玻璃纖維材料製作浮子它的熱膨脹率約為水的百分之一，可說是堪用而已。

最想改進的一項是如何能把密度測量值再向下推進一個位數，使其能測量密度至 $10^5$ (甚至 $10^6$ ) $\text{g/ml}$ ，這樣才能真正解析水溫於 $4^{\circ}\text{C}$ 附近時密度的細微變化，不過這必須要有更穩定的恆溫系統才辦得到，否則將增加讀取的困難度與錯誤率。

## 八、主要參考資料

- (一).D.W. Kupke and T.H.Crouch, Methods Enzymol. 48, 29 (1978)
- (二).Kuzman Raznjevic, Hand Book of Thermodynamic Tables
- (三).<http://www.berhold.com.au/industrial-pages/density.html>
- (四).<http://www.Kyoto-kem.com/e-product/density/>

評語：

本作品用磁力在一容器外將一固体（磁浮子）定位於液体中，以量測液體的密度，構思新穎具有創意。而其實驗設計精密完美，例如用磁浮子之升降過程遮擋光線以控制光電信號再控制磁力決定磁浮子之升降。恒溫標之以循環水定溫等。各部分之儀器設計也具有巧思，如複層線圈，磁浮子等及精確度之考量及測試。即本作品具有創意構想慎密，量測方法精巧。為一難得的完美作品。

!"#\$ #

\$%&'()\*+,-./012 3456 78 9:; <= >? 9@-ABC

DEFG8HIJKLMNIJKL

OPQ1R STU V8O\$-WXYZ[\:]^\_M MabMc4

dCe) fge) hijklmnNoG @pq rs ptu v)w 8xJ

yz {||}~% •€Oj •j N, f,,...M†‡^MJ%Š'g Œ•y

::]

z Ž•• "O" "•-8R—~™š›œ•žNŸ jç£¤\*¥

!§"8©Nª'OPL« W q-Œ8€ž™š8 9Mœ•MdC-® - M

p - ˘© §" °ÿ8N±²³ ´µ

¶,.

8 10»¶, ¼

z½¾¼j çÀ vÁ \$g ‹ÄÄÄÄÆÇÈ

ÉgÊËÌÍÎ Ćî ĩ Đ ÑÄÄÄÆÒÓ e)-® Ÿ Ô8Í ÓŒÉ6

Öx ØÄÙ,1Ú ÛÜž Ÿ 8:ÝÞœ• Óß Ÿàáâi›œ•j-@ã

e) äå æç'jè-œ•jéää ê8 Ég èiĩĩđñ

¶òÝ

óô8© `õîy \$öj¹÷ô

øùýú û €ÿCjü:ý þ

回Äé‹Änj 群- @ 找,...M 材...開始

真 ĩ 難去將>C\ 程與“ 天如此 þ x 接éž OP 裏面 8ÿ 邊J 邊 覺îJ-j

üe)8 變聰明囉ô™šœ• 指導 % 心 朋友 §" Û 後8žšš2÷ 穌(上

帝) 78Pj 次美妙 習YŠô