

恆星系統與三體運動穩定性的模擬探討

高中組 第一名

縣 市：高雄市

校 名：高雄中學

作 者：陳威尹 謝俊駒

指導教師：蔡國泰



我是澎湖人，自幼在馬公長大，國三時有幸考取雄中，於是寄宿高雄。

從小性好探尋數理之奇與自然之妙，常在閒暇時思考數理問題自娛。因興趣使然，於中學時作了不少小型研究。竟日苦思、徹夜長考之後，解決難題的喜悅和一絲絲的自豪實乃人生至樂。

願此至樂得與同好共享。

關鍵詞：恆星系統、三體運動、模擬、數值分析、小行星、混沌、雙星、拉格朗日點

一、研究動機：

我們在討論天體運動時，當只有一個天體，就行等速度運動；兩個天體時，軌道呈圓錐曲線；但是三個天體的運動分析並不能算出解析解，而只能以數值分析來算出近似值（早期對於太陽系——簡化的三體運動問題——使用攝動理論（先考慮恆星重力，再加入行星的影響）做短期模擬（因為長期的攝動共振可以使運動軌跡完全改觀））。

一般而言，想要進行預測星體軌道，人們只要解開相關的微分方程式就可以了。雖然如此，經由牛頓的計算，證實了想解出只有三個物體的微分方程式都是極度困難的。它的運動定律指出三體運動的模式沒有解析解。要預測三體運動，唯一的方法就是利用攝動的理論計算近似值。但是現在藉由電腦的的輔助，我們可以用數值分析的方法去做三體運動的模擬。只要計算夠精確、模擬時間不要太長，都可以得到令人滿意的結果。既然有了良好的工具，就可以探究一些三體運動的問題了。

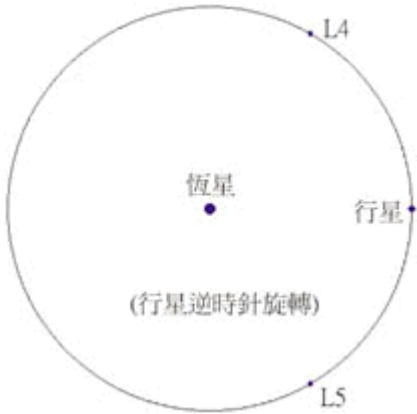
說 明

三體運動的最大特徵是「蝴蝶效應」和「重力彈弓」。蝴蝶效應的本意是指「對初始條件的敏感」——微小的初始條件變化會造成極大影響的效應，也就是有混沌現象（一種介於規律與混亂的現象），像雙擺、彈珠臺等等物理系統；而重力彈弓是一種三體運動中可能發生的的定性現象——意思是：重力系統中有一物體會受到其他物體的重力影響使它的速度超過脫離速度而彈射出去，永不回頭。像太陽系中被甩出去的小行星。

拉格朗日點是指當太陽質量遠大於行星質量遠大於小行星質量時，小行星可以穩定存在的點，總共有 5 個解。本文中只討論穩定的L4與L5。它是在以太陽、行星連線為一邊的正三角形的頂點上。

二、研究目的：

- 1.觀察雙星系統中行星的行爲。
- 2.觀察三恆星系統的運動。
- 3.行星系統的小行星是否能穩定存在。
- 4.拉格朗日點附近的小行星運動。



三、研究設備和器材：

- 個人電腦

四、研究過程：

爲了實際研究三體運動的細節，我用 Visual Basic 6.0 寫了幾個模擬三體運動的程式。它可以將輸入的多個星體之質量、位置、和初速度進行運算，得到往後的發展情形，並畫出運行圖。

程式內容省略。

＊說明1

這三個程式都是用數值積分的方法，但是演算法不同。

程式 1 是先算出速度再用 $\Delta x=v_x \times \Delta t+\frac{1}{2}a_x \Delta t^2$ 的公式計算位置。

程式 2 是三十八屆物理組第二名科展作品中的方法。他是先用 $\Delta x=v_x \times \Delta t+\frac{1}{2}a_x \Delta t^2$ 的公式算出位置，再算出速度。

程式 3 利用n階階差法來作計算。因爲 5 階計算最精確，而且超過5階就沒有明顯的減少誤差，所以以後提到程式 3 就是指 5 階階差法。

＊說明 2

本程式是將複雜的運動切割爲很多段的運動，每一個小段有時間間隔Tstep，在本文中以T值表示。因爲個人電腦的運算速度有限，所以其時間間隔T不能取太小，故計算會有一些誤差。爲了使精確度和運算時間達到平衡，用以下實驗衡量誤差和比較三種演算法的優劣。

爲了方便設計數值，以下所有實驗的重力常數都爲 1 。

四-(一)、衡量誤差

四-(一)-1、行星圓周運動的軌跡誤差

問 題：實驗T值的改變對計算誤差的影響。

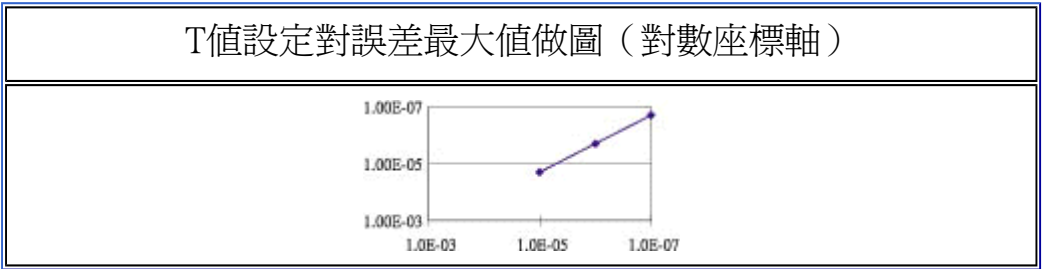
初始條件：模擬行星系統的變化，其中有一行星對恆星作圓周運動，半徑爲 1 。恆星不動，行星沒有質量。

$$V=\sqrt{ar}=\sqrt{(\frac{GM}{r^2})r}=\sqrt{\frac{GM}{r}}=1$$

行星的

實驗方法：以無質量的星體軌道和正圓形比較，計算誤差。

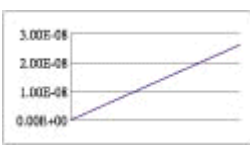
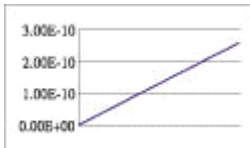
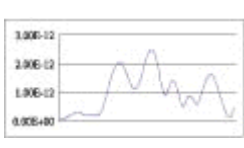
演算法 1：



結 論：在圓周運動中誤差最大值和T值成正比。

演算法 2：→與演算法 1 的實驗比起來誤差明顯大很多，而且是發散的。而誤差也幾乎和T值成正比。

演算法 3：

圖表說明	T=1e-4	T=1e-5	T=1e-6
圖表			
誤差最大值	2.62e-8	2.62e-10	2.62e-12

→與前面的實驗比起來誤差明顯小很多，但也是發散的。而誤差也幾乎和T值成正比。當T=1e-6時跑出奇怪的圖形，可能因爲達到double變數的精確度底限了。

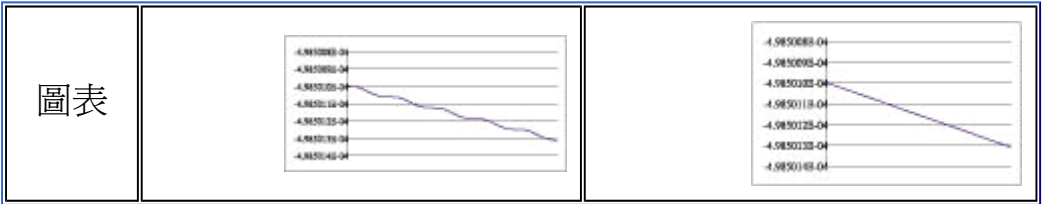
●結論：使用 $\Delta x=V_x \times t+\frac{1}{2}at^2$ 公式會使誤差發散，用階差法誤差很小。

四-(一)-2、行星圓周運動的能量誤差

問題：比較演算法 1、3 在能量誤差的變化。

初始條件：和四-(一)-1的條件一樣。

實驗方法：比較力學能變化量，計算誤差。



●結論：用演算法 1、3 在能量上的誤差只有短期震盪的振幅有差距，在長期的誤差並沒有改善。

四-(一)-3、有小行星的行星圓周運動

因為混沌運動中初始條件的微小誤差可能造成結果的重大差異，所以引入小行星來製造混沌運動，看看是否跟規律的行星圓周運動有差異。

問題：實驗T值的改變對混沌運動中計算誤差的影響。

初始條件：模擬行星系統的變化，其中有一行星對恆星作圓周運動，半徑為 1；小行星對行星行橢圓軌道運動，遠日點為 2，近日點為0.5，與行星軌道相交。恆星質量為 1，行星質量0.01，小行星沒有質量。

實驗方法：以小行星的軌跡計算誤差。

●結論：T值在不同在混沌系統中對結果有決定性的影響，但是在定性的性質上並沒有太大的不同。所以為了使精確度和運算時間達到平衡，此後實驗時測試不同的T值設定，找出對結果比較沒有影響而最大的T值來實驗。

●演算法比較：程式 1、3 的結果差不多，而且在能量上的誤差是幾乎一樣的。因為程式 3 的速度比較慢，所以以後用程式 1 來做實驗。

四-(二)、雙星系統

問題：模擬雙星系統的變化，其中有一個質量微小的行星（故不考慮其質量）

初始條件：雙星質量相同，行星質量為零。

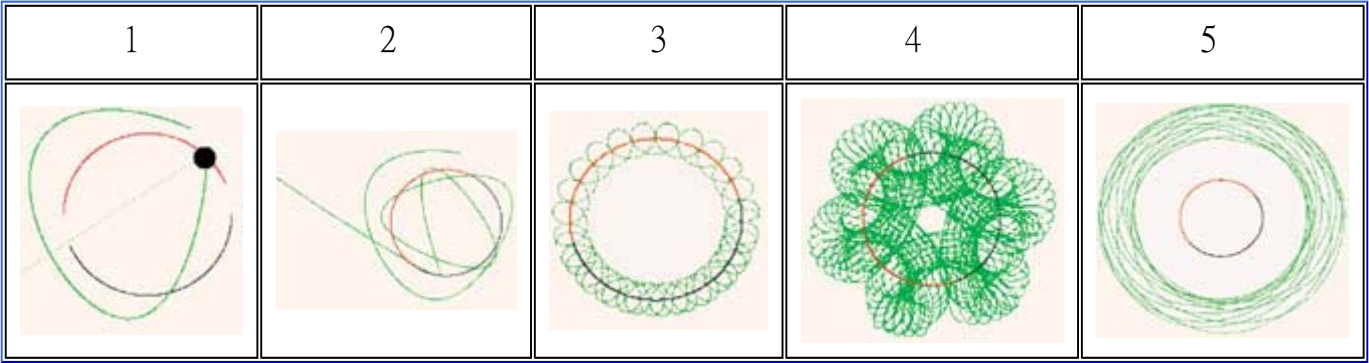
恆星

$$V=\sqrt{ar}=\sqrt{\frac{GM}{(2r)^2}}r=\sqrt{\frac{GM}{4r}}$$

固定變因：雙星質量、位置、初速度。

操縱變因：行星位置、初速度。

圖片說明：選取幾張較有代表性的圖片做說明。雙星的軌跡分別是黑色和紅色，而行星是綠色，黑色圓是指行星與恆星相撞的位置。(圖形比例皆以適當的比例放大縮小過)



→由上圖可知，行星在於雙星系統附近時，不外乎下列幾種運動模式：

- 1.形成內行星（繞著其中一顆恆星轉）。（圖 3、4）
- 2.形成外行星（繞著雙星的質心轉）。（圖 5）
- 3.撞上恆星（圖 1）或被甩出去（圖 2）。

如果行星的位置和初速度隨便設定的話，行星幾乎都被甩出雙星系，這說明了要存在行星是不太可能的，因為它複雜的重力場會使行星不能有穩定的軌道。距離雙星很遠或是很近時會使重力越類似單一恆星的重力場，所以才有所謂的內行星與外行星。

模式分析：

1.內行星：(恆星軌道半徑＝R，行星距離恆星Rm，恆星速度VM，行星速度V)

公式： $\vec{V}=\sqrt{\frac{GM}{R_m^2}R_m}+\vec{V}_M$
R_m<0.95 R 才比較穩定

Rm<0.95 R才比較穩定

2.外行星：（恆星軌道半徑＝R，行星距離雙星質心Rm，行星速度V）

公式： $\vec{V}=\sqrt{\frac{G(2M)}{R_m^2}R_m}$

Rm>2.4 R才比較穩定

●穩定性討論：

行星的運動軌跡非常混亂，很難推論以後是否能一直待在軌域上。尤其是三維運動時，常常出乎意料之外地被甩出去。

●結 論：

一般而言雙星系統比較難存在行星。若能存在，則有：形成內行星、形成外行星兩種模式。

四-(三)、三恆星系統

問 題：同時存在三個質量相近的星體（所以任何一個的質量皆不可忽略）

固定變因：沒有。

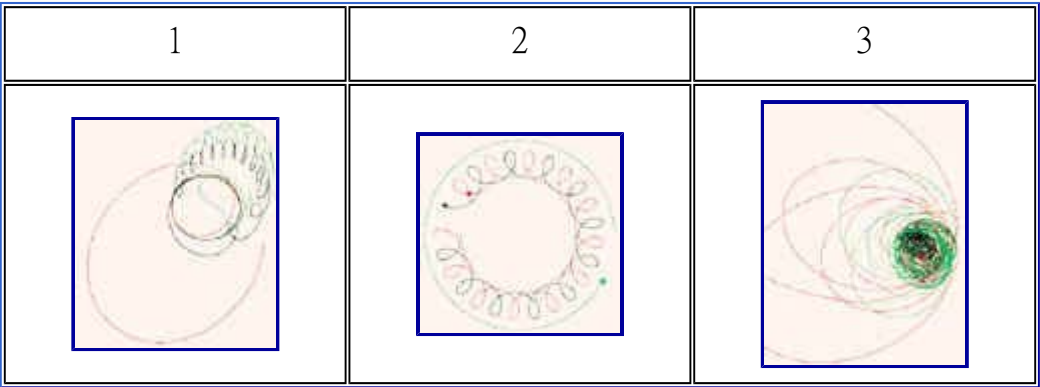
操縱變因：三顆恆星的初始位置與初速度。圖 1 、 2 的初始條件經過特殊設計：

圖 1：三星圓周

公式： $V=\sqrt{ar}=\sqrt{2 \times \frac{GM}{(\sqrt{3}r)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \times r}=\sqrt{\frac{GM}{\sqrt{3}r}}$

圖 2：巢狀雙星（紅黑兩星是小雙星，與綠星形成較大雙星）

圖片說明：三顆恆星的軌跡分別是黑色、紅色和綠色。圖形比例皆以適當的比例縮放。（這三張圖片只是實驗結果中有代表性的例子）



→圖片展示的就是三體運動的標準例子——雜亂、不規則、且不自我重複。由實驗中可以看到這些系統大多是非常不穩定的，過不久都會相撞或分離。唯一能存在的只有巢狀雙星。就連圖 1 是故意設計的三星圓周運動也因為蝴蝶效應而破壞了整個平衡，因此，三星圓周運動是不穩定的解，就像拉格朗日點的前三個解一樣。

●結 論：

很難存在穩定的三恆星系統，唯一的可能性是：巢狀雙星。

四-(四)、穩定存在的小行星

討論三體運動的特殊解——拉格朗日點。穩定的拉格朗日點是在以太陽、行星連線為一邊的正三角形的頂點上，稱為 L4、L5。

說 明：

與行星軌道相同時，小行星只有在這兩個位置可以穩定存在。（與行星軌道不同時，就沒有所謂拉格朗日點的限制。）

初始條件：

一個恆星動力系統，但只有一個行星和一個小行星，以實驗小行星穩定存在的位置。行星質量相對於太陽極微小，小行星質量相對於行星的極微小。行星和小行星都以太陽為中心作圓周運動。（圖中的小圓圈都是指太陽、行星、小行星的初始位置。）

四-(四)-1、小行星的位置

問 題：

與行星軌道相同時，實驗小行星可以穩定存在的位置，用以檢驗拉格朗日點。

固定變因：

太陽質量是行星的100倍，行星的質量是小行星的100倍。

操縱變因：

小行星的角位置 θ 。(如以太陽位置為原點，太陽與行星的距離為 r ，下方所列的角位置為 θ 度，則行星的位置在 $(r, 0)$ 處，小行星的位置在 $(r \times \cos \theta, r \times \sin \theta)$ 處。)

角位置	180	-120	-90	60	-60	40
圖片						$V = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{GM}{(2r)^2}} = \sqrt{\frac{GM}{4r}}$

→在圖片裡面，我們可以發現：雖然小行星的初始條件是與太陽作圓周運動的，但因為行星的攝動，使得小行星無法以原來的軌道運行。這個實驗結果可以在我們的太陽系中找到。因為木星的質量最大，攝動效應也最大，所以在木星的拉格朗日點上我們可以發現兩叢小行星跟木星穩定地同步作圓周運動，但是在木星軌道的其他地方就找不到和木星同步繞太陽公轉的小行星了。

●結 論：與行星軌道相同時，小行星只有在60和 -60度的地方（拉格朗日點）可以穩定存在。

●討 論：太陽系中質量最大的行星是木星，也最具有代表性。以木星套用此模式可以發現：在拉格朗日點上的就是特洛伊小行星群。（特洛伊小行星群的圖片附在後面）

四-(四)-2、行星的質量

問 題：小行星與行星軌道相同時，實驗行星的質量對小行星穩定性的影響。

固定變因：小行星的位置在行星的格拉格朗日點上。

操縱變因：行星的質量——以太陽的質量為 1。（小行星的質量仍是行星的百分之一）

0.001	0.01	0.02	0.03	0.05

→發現行星的質量對恆星系的重大影響：行星的質量越小，對其他行星的攝動就越小，而系統也越穩定，也就是說如果行星對恆星的質量比例太大的話，也會造成恆星系的不穩定。像圖中行星質量為恆星的0.03倍時，小行星已經不能穩定存在了，這也表示：如果我們的木星質量更大或是再多一兩個像木星的大質量行星的話，太陽系的行星可能也會被甩出太陽系——這對身為在居住於太陽系行星上的我們當然不是個好消息。所以，今天有人類生存在地球上，還依賴著太陽系的穩定重力系統呢！

●結 論：只有行星質量小於恆星的0.02倍時，拉格朗日點上的小行星可以穩定存在，太大則不行。

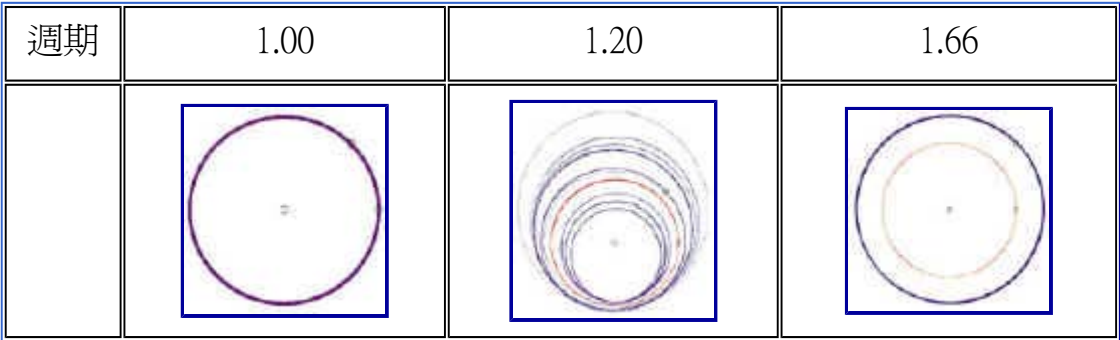
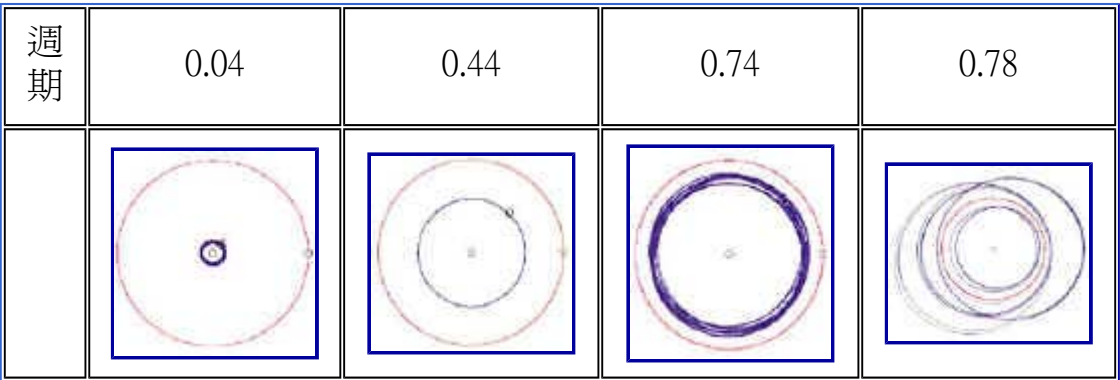
●討 論：木星的質量大約是太陽的0.001倍，以木星套用此模式可以發現大多數小行星與類地行星可以穩定存在。

四-(四)-3、小行星公轉週期

問 題：與行星軌道不相同時，實驗小行星可以穩定行圓周運動的半徑（但使用週期做變因）。

固定變因：太陽質量是行星的1000倍，行星的質量是小行星的1000倍。小行星與行星的夾角為45度。

操縱變因：小行星公轉週期——以行星公轉週期為 1 。



這些並不是所有的實驗結果，因為在這個實驗中總共分析了數百張圖片，故只挑選幾張有代表性的。

- 1.週期從0.01到0.14時：逐漸顯示出混沌現象，軌道雜亂但是不偏離原來的軌道太遠。
- 2.週期從0.15到0.48時：有穩定存在的小行星帶。
- 3.週期從0.49到0.74時：逐漸顯示出混沌現象，軌道雜亂但是不偏離原來的軌道太遠。
- 4.週期從0.75到1.34時：非常不穩定的軌道，有的幾乎一兩個行星年之後小行星就會被彈射出去，有的軌道一直作大幅度的變動。
- 5.週期從1.35到1.66時：混沌現象逐漸消失，軌道雜亂但是也不偏離原來的軌道太遠。
- 6.週期超過1.66時：有穩定存在的小行星帶。

實驗結果：

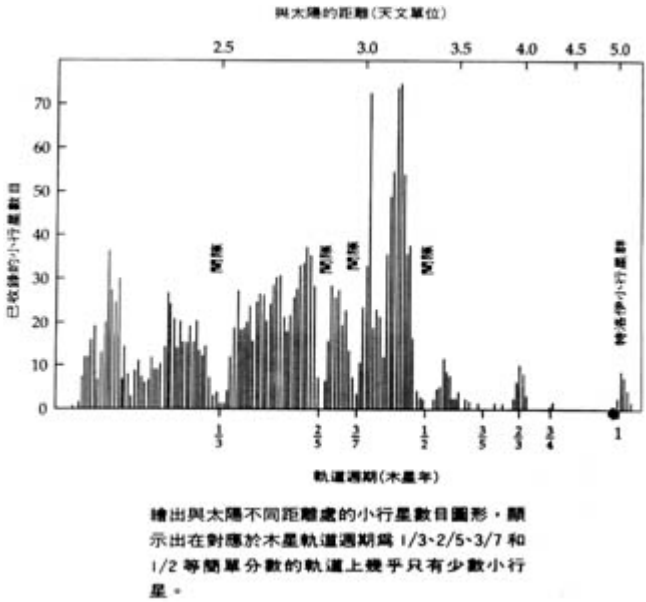
小行星的週期若和行星成簡單整數比的話，是不太穩定的軌道。因為小行星在轉了幾圈就會和行星走到相同的角度，一次一次的影響下小行星的運行就會偏離原來的軌道。由於我們的太陽系的常數較接近本實驗，所以要跟事實比較的話，本實驗的結果比較適合。

● 結 論：

小行星在恆星系的外圍和內部時是穩定的，但是在週期與行星成接近簡單整數比時容易偏移軌道。

● 討 論：

與現在的太陽系比較，行星使用木星為代表，觀察小行星分布，資料如下：



* 註：以現有資料看來，在週期為0.49以上的軌道很少存在小行星，而且在週期成簡單整數比的時候小行星數量驟減，與模型跑出來的結果類似。

四-(五)、拉格朗日點附近的小行星

因為在上一個實驗中，發現了小行星初始位置即使在拉格朗日點附近也有可能穩定存在，所以加以研究。

四-(五)-1、衡量誤差

固定變因：各星體的初始條件能使行星和小行星做圓周運動、恆星的速度能使系統動量為零。

操縱變因：T值

實驗結果：以微觀的角度看來，半徑的誤差成週期變化且會因T值改變。而以巨觀的角度看來，半徑誤差也成週期變化但不會因為T而改變，也就是說實驗誤差並不會一直累積而影響長期的結果。

●結 論：實驗誤差並不會一直累積而影響長期的結果。

四-(五)-2、小行星的位置

問 題：在拉格朗日點附近的小行星穩定性

固定變因：各星體的初始條件能使行星和小行星做圓周運動、恆星的速度能使系統動量為零。行星公轉半徑為2000。以下實驗都使小行星公轉50圈，T值為0.003，運算100次紀錄一次數據。

操縱變因：小行星的位置（與拉格朗日點的偏移量）

實驗結果：除了(-1,0) (5,0)兩個圖以外，其他的偏移量都跟 四-(五)- 1 的對照組沒什麼兩樣。

●結 論：小行星的初始位置只有在偏移拉格朗日點超過半徑的0.5%以上時，才對長時間的軌跡有影響，而以靠近太陽的偏移影響最大(x-)。而在y或z方向的偏移只會產生週期震盪。另外，小行星的存在會造成行星與小行星的週期變長。

●討 論：與現在的太陽系比較，在木星的拉格朗日點上的特洛伊小行星群的位置在木星軌道的外側，原因可以用此模型來解釋：因為靠近太陽的偏移影響最大，所以留下的小行星都在木星軌道的外側。(參見本頁上方的附圖)

五、研究結果：

- 1.一般而言靠近雙星系統比較難存在行星。若能存在，則有：形成內行星、形成外行星兩種模式。
- 2.很難存在穩定的三恆星系統，唯一的可能性是：巢狀雙星。
- 3.與行星軌道相同時，小行星只有在拉格朗日點（以太陽、行星連線為一邊的正三角形的頂點上）或其附近可以穩定存在，與觀測結果相同。
- 4.只有行星質量小於恆星的0.02倍時，拉格朗日點上的小行星可以穩定存在。
- 5.小行星在恆星系的外圍和內部時是穩定的，但是在週期與行星成接近簡單整數比時容易偏移軌道。
- 6.小行星的初始位置只有在偏移拉格朗日點超過半徑的0.5%以上時，才對長時間的軌跡有影響，而以靠近太陽的偏移影響最大。這可以解釋為何特洛伊小行星群的位置在木星軌道的外側。另外，小行星的存在會造成行星與小行星的週期變長。

六、討論與推廣：

待努力的方向

因為我建立的模型經過化簡，而且沒有使用很精密的數值方法，使得誤差超過精密試驗所要求的精確度。尤其是力學能減少的誤差（使用階差公式後位置的誤差已經很小了）。

- 力學能減少的誤差：雖然階差方法可以大幅提高位置的精確度，但是也無法消除力學能減少的誤差。
- 模擬太陽系資料不足：我本來想做太陽系的模擬，但是天文年鑑上只有標示出行星的位置，沒有詳細的速度（只知道平均速度），所以無法完成。

對於真正的模擬來說，有許多因素不可忽略，例如：小行星與行星的碰撞、太陽風的影響、潮汐作用、星球質量不均勻、星球不一定是正球形、星球自轉、星際氣體與塵埃的摩擦、熱輻射等等。如果可以把這些因素都考慮進去，建造出數學模型，而且有能力計算，那麼它的應用價值將無可限量。對於充分地了解星團和星系的演化，幫助天文觀測，計算人造衛星軌道，甚至預測太陽系未來的命運。由於引進太空觀測、電波天文學等，用它來預判恆星系中的小行星、行星是否穩定，更是值得一試。最重要的是：它可以將我們無法或難以觀察的現象呈現在我們眼前，更突破了觀測器材的限制。

七、參考資料：

- 1.牛頓時鐘 混沌太陽系——科學與人出版社
- 2.混沌魔鏡——科學與人出版社
- 3.牛頓雜誌 1 6 3、1 6 9期
- 4.第三十八屆科展高中組物理科第二名作品——
三體運動模型與拉格朗日點上的小行星
- 5.天文年鑑2000

完整作品說明書請到 <http://cvictor.myself.com.tw>

或是其鏡射站 <http://home.pchome.com.tw/boy/cvictor/> 下載

評語

該生以電腦程式，模擬恆星雙星系統之行星軌道，及三體系統的穩定性，旁及小行星帶受擾動而產生間隙之應用，正能深入就天體動力學的前沿課題展開獨立研究，甚為可喜，其電腦程式可彈性修改，即時作出各項模擬，有深入發展的潛力。

回到目錄頁../[Index.htm](#)