任意三角形內接正三角形

高中組　第三名

縣　市：新竹市

校　名：新竹高中

作　　者：劉瑋

指導教師：儲啓政

我是一個喜歡思考的人，無論是對於自然科學或是人文科學都有著濃厚的興趣。由於父母都是老師，所以在這樣一個書香家庭薰陶之下，養成我對學問的嚴謹態度，也使得我求學的過程都滿順利的。

或許是在風城-新竹長大，使我帶有幾分不羈的個性，不喜歡受到俗套的限制，喜歡有創意的想法，因此和有創意的人在一起談天、聽朋友談論新奇的點子是我最愉快的事。

而當沒有朋友在身邊的時候，我並不會感到寂寞，因為獨處正是我的觀察力、想像力、思考力能盡情發揮的時候，往往一些重要的發現、心得都是在這樣的情況下產生的。

我想求學嚴謹、喜歡創新以及不怕孤獨正是引領我走在科學研究這條路上的重要條件，也特別感謝在這一路上總有許許多多的貴人，在我遭遇困難時出手相助，給予我持續走下去的動力。參加科展實在是我人生中一項寶貴的經歷。

一、研究動機

曾經看過這樣的題目：「給定一任意三角形，分別於三角形的三邊上各任取一點，連接這三點，形成一個內接三角形。試問在什麼條件下，此內接三角形的周長發生最小值？」當然這個問題已經有了答案，然而這問題不禁使我想到，如果改變命題，將「內接三角形」改成「內接正三角形」，那麼又會是什麼情況呢？

二、研究目的

給定一任意三角形，分別於此三角形三頂點對邊的直線上，各取一點，使這三點的連線形成一個內接正三角形。研究內接正三角形的性質。

三、研究過程

紙、筆、尺、圓規、電腦

四、研究重點

(一)、討論三角形內接正三角形是否存在。並研究如何用尺規作圖作三角形的內接正三角形？

(二)、研究三角形內接正三角形的性質。

五、 結果與證明

(一)給定一任意$\triangle ABC$，於內部作一小正$\triangle D'E'F'$，其中D'點在$\overline{BC}$上，F'點在$\overline{AB}$上。並作$\overrightarrow{BE'}$交$\overline{AC}$於E點。再分別於$\overline{BC}$和$\overline{AB}$上各取一點D、F，使得$\overline{DE}/\!/\overline{D'E'}$、$\overline{EF}/\!/\overline{E'F'}$，如圖1：

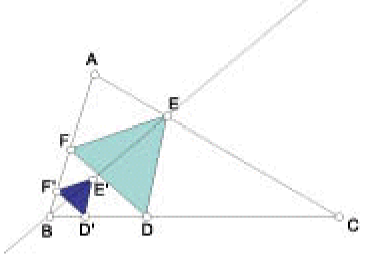

圖1

此時，$\triangle DEF$即為$\triangle ABC$的一個內接正三角形。又當改變$\triangle D'E'F'$的位置時，$\triangle DEF$的位置也會隨著變動，故知給定一任意$\triangle ABC$，可作內接正三角形。我們又發現用類似的方法作圖，可以於$\triangle ABC$三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的延長線上各取一點D、E、F為頂點作一正

三角形，而D、E、F這三點卻不在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$上。為了以下討論方便，避免受到範圍的限制，我們定義：廣義的內接正三角形的三頂點D、E、F可在$\triangle ABC$三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的延長線上變動，且此時的$\triangle DEF$亦可簡稱為$\triangle ABC$的內接正三角形。

由上述結果可知，給定任意$\triangle ABC$，可作內接正三角形。那麼，在任意$\triangle ABC$的某一邊的直線上任取一點，如何作以此點為一頂點的內接正三角形呢？

作　法

在$\triangle ABC$中，設D點為某一內接正三角形在$\overline{BC}$上的一頂點，以D點為中心將整個圖形順時鐘旋轉60^0，形成一個新的$\triangle A'B'C'$ ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$)。令$\overline{A'B'}$和$\overline{AC}$的交點為E。於$\overline{AB}$上取一點F，使$\angle EDF=60^\circ$，則 即為以D點為一頂點的一個內接正三角形，如圖2-1：

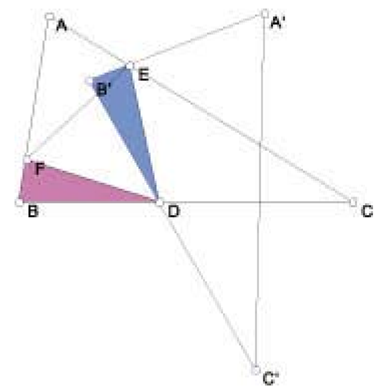

圖2-1

證　明

在$\triangle FBD$和$\triangle EB'D$中，

1.由於$\triangle A'B'C'$是由$\triangle ABC$以D點為中心順時針旋轉60^O所得，

故$\angle FBD=\angle EB'D$ 且$\overline{BD}=\overline{B'D}$ 。

2.

$\angle BDF=\angle BDB'-\angle FDB'=60^\circ-\angle FDB'$ ，

$\angle B'DE=\angle EDF-\angle FDB'=60^\circ-\angle FDB'$ ，

故$\angle BDF=\angle B'DE$ 。

3.由上述二點知：$\triangle FBD\cong\triangle EB'D$ (ASA全等性質)，

所以$\overline{FD}=\overline{ED}$ ，又已知$\angle EDF=60^\circ$ ，

故$\triangle DEF$為正三角形。

經過觀察，我們發現以$\overline{BC}$上的一點D作為頂點的內接正三角形的有兩類，一類就是上述的$\triangle DEF$，另外一類作法如下：

作　法

在$\triangle ABC$中，設D點為某一內接正三角形在$\overline{BC}$上的一頂點，以D點為中心將整個圖形順時鐘旋轉60^0 ，形成一個新的$\triangle A'B'C'$ ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$)。令 $\overline{A'C'}$和$\overline{AB}$ 的交點為f。於$\overline{AC}$上取一點e，使 $=\angle fDe=60^\circ$ ，則 即為以D點為一頂點的一個內接正三角形，如圖2-2：

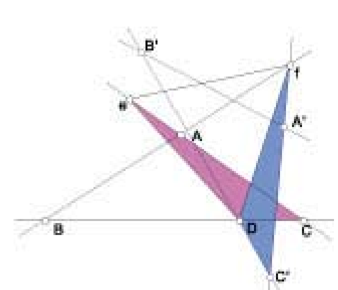

圖2-2

(證明方法與同向內接正三角形類似，在此不加贅述)

上述這兩類正三角形，E點與e點皆在$\overline{AC}$上，F點與f點皆在$\overline{AB}$上，而它們的差異在於$\triangle DEF$三頂點D、E、F的排列方向與$\triangle ABC$三頂點A、B、C的排列方向同向（如圖2-1，皆為逆時鐘）；而$\triangle Def$ 三頂點D、e、f的排列方向與 三頂點A、B、C的排列方向反向（如圖2-2， 為順時鐘）。為了方便起見，以下稱$\triangle DEF$這類的正三角形為同向正三角形，稱$\triangle Def$ 這類的正三角形為反向正三角形。

(二)

有了上述的結果，就可以利用GSP系統作圖，如圖3：

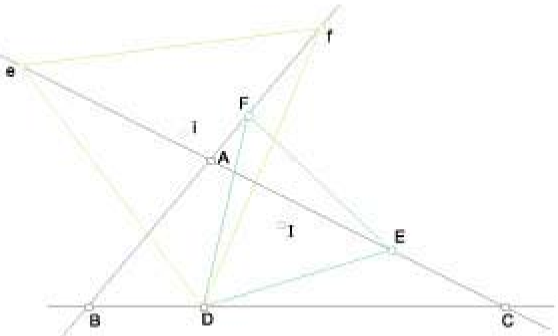

圖3

其中ΔABC爲給定的任意三角形，而ΔDEF爲其同向內接正三角形，ΔDef 爲其反向內接正三角形。D點的位置在$\overline{BC}$上變動，此時ΔDEF和ΔDef也會隨之變化。經由觀察，我們獲得了一個驚人的性質：「一給定的任意ΔABC ，所有同向內接正三角形的中心構成一條直線，所有反向內接正三角形的中心也構成一條直線，這兩條直線互相平行，且皆與ΔABC的尤拉線垂直。」證明如下：

建立一個複數座標系，如圖4-1：

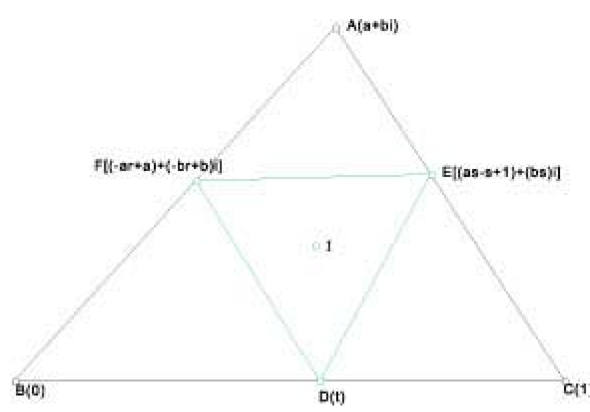

圖4-1

其中ΔABC爲給定的任意三角形，ΔDEF爲其同向內接正三角形，I點爲ΔDEF的中心。令A點座標爲$a+bi$ 、B點座標爲0、C點座標爲1，並設$\overline{BD}:\overline{DC}=t:1-t$ 、$\overline{CE}:\overline{EA}=s:1-s$ 、$\overline{AF}:\overline{FB}=r:1-r$ ，其中爲a、b定數t爲變數，s、r會隨著t值而變化。則D點座標爲t、E點座標爲$(as-s+1)+(bs)i$ 、F點座標爲$(-ar+a)+(-br+b)i$ 。

故知$\overline{DE}=(as-s-t+1)+(bs)i$ ，

$\overline{DF}=(-ar-t+a)+(-br+b)i$ 。

由於$\angle FDE=60^\circ$ ，

故$\overline{DE}\times(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\overline{DF}$ ，

即$[(as-s-t+1)+(bs)i]\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(-ar-t+a)+(-br+b)i$ ，

乘開之後，等號左右的實部對應實部，虛部對應虛部，得到：

實部：$(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=-ar-t+a$ ---------------------------->1式

虛部：$(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}=-br+b$ ------------------------->2式

將1、2式整理得：

1式：$-ar=(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s+\frac{1}{2}t-a+\frac{1}{2}$ ------------------------------->3式

2式：$-br=(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s-\frac{\sqrt{3}}{2}t-b+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ------------------------->4式

$\frac{3式}{4式}:\frac{a}{b}=\frac{(a-\sqrt{3}b-1)s+t+(-2a+1)}{(\sqrt{3}a+b-\sqrt{3})s-\sqrt{3}t+(-2a+\sqrt{3})}$ ，

交叉相乘再經整理得：$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{-\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$ ，

於是得到了s與t之間的關係式。

另將1、2式整理得：

1式：$(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}b}{2}-\frac{1}{2})s=-ar-\frac{1}{2}t+a-\frac{1}{2}$ ----------------------------->5式

2式：$(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})s=-br+\frac{\sqrt{3}}{2}t+b-\frac{\sqrt{3}}{2}$ -------------------------->6式

$\frac{5式}{6式}:\frac{a-\sqrt{3}b-1}{\sqrt{3}a+b-\sqrt{3}}=\frac{-2ar-t+2a-1}{-2abr+\sqrt{3}t+2b-\sqrt{3}}$ ，

交叉相乘再經整理得：$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}t+\frac{-\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}$，

於是得到了r與t之間的關係式。

(爲了方便起見，以下將複數座標系改爲直角座標系)

將E點座標$(as-s+1,bs)$、F點座標$(-ar+a,-br+b)$中的s、r用t的關係式代入，得到：

E點座標：$[\frac{(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a-b)t+(ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab+b^2)t+(-\sqrt{3}ab+b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$，

F點座標：$[\frac{(\sqrt{3}a^2+ab-\sqrt{3}a-b)t+2ab}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab-b^2-\sqrt{3}b)t+2b^2}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$，

又D點座標$(t,0)$。故得I點座標如下：

$\frac{1}{3}[\frac{(3\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-3\sqrt{3}a)t+(3ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(2\sqrt{3}ab-\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab+3b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$。

我們可以看到，I點的x、y座標也爲t的一次函數，因此當D點$(t,0)$在$\overline{BC}$上變動時，$t\in R$，故I點的軌跡也構成一條直線，且此直線的一個方向向量爲：

$$\vec{D_1}=(3a^2+b^2-3a,2ab-b)$$ 。

又由A點座標(a,b)、B點座標(0,0)、C點座標(1,0)，

可得$\triangle ABC$重心G點座標$(\frac{a+1}{3},\frac{b}{3})$、外心O點座標$(\frac{1}{2},\frac{a^2+b^2-a}{2b})$，

$\overline{GO}=\frac{1}{6}(1-2a,\frac{3a^2+b^2-3a}{b})$ 即爲$\triangle ABC$尤拉線的一個方向向量。

$\vec{d_1}\cdot\overline{GO}=\frac{1}{6}[(3a^2+b^2-3a)(1-2a)+(2ab-b)(\frac{3a^2+b^2-3a}{b})]=0$

故$\vec{d_1}\perp\overline{GO}$，也就是I點軌跡所構成的直線與$\triangle ABC$的尤拉線垂直。

我們用同樣的方法操作反向內接正三角形，建立一個複數座標系(如圖4-2)，

其中$\triangle ABC$爲給定的任意三角形，$\triangle Def$爲其反向內接正三角形，i點爲$\triangle Def$ 的中心。

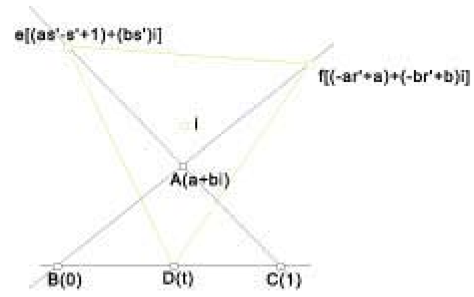

圖4-2

經過同樣的計算方法，得i點座標如下：

$\frac{1}{3}[\frac{(-3\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2+3\sqrt{3}a)t+(3ab-\sqrt{3}b^2)}{-\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2+\sqrt{3}a+b},\frac{(-2\sqrt{3}ab+\sqrt{3}b)t+(\sqrt{3}ab+3b^2)}{-\sqrt{3}a^2-\sqrt{3}b^2+\sqrt{3}a+b}]$。

我們可以看到，i點的x、y座標也爲t的一次函數，因此當D點$(t,0)$在$\overline{BC}$上變動時，$t\in R$，故i點的軌跡也構成一條直線，且此直線的一個方向向量爲：

$$\vec{d_2}=(-3a^2-b^2+3a,-2ab+b)$$

$\vec{d_2}\cdot\overline{GO}=\frac{1}{6}[(-3a^2-b^2+3a)(1-2a)+(2ab-b)(\frac{3a^2+b^2-3a}{b})]=0$，

故$\vec{d_2}\perp\overline{GO}$，也就是i點軌跡所構成的直線與$\triangle ABC$的尤拉線垂直。

(三)我們試著用已有的結果來找尋何時內接正三角形發生最小值同向內接正三角形中，利用：

E點座標 ，

F點座標 ，$[\frac{(\sqrt{3}a^2-ab-\sqrt{3})t+2ab}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b},\frac{(\sqrt{3}ab-b^2-\sqrt{3}b)t+2b^2}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]$，

計算$\overline{EF}$的長度，得：

$\overline{EF}=\sqrt{[\frac{(2ab-b)t+(-ab+\sqrt{3}b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]^2+[\frac{(2b^2+\sqrt{3}b)t+(-\sqrt{3}ab-b^2)}{\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}a+b}]^2}$，

再用配方法，可求得當$t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 時，$\overline{EF}$的長度發生最小值，此時$\triangle DEF$的周長發生最小值。

我們發現了一個性質，就是當$\triangle DEF$的周長發生最小值時，$t+s+r$為一定值$\frac{3}{2}$ 。

也就是當$\triangle DEF$的周長發生最小值時，將$t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 代入s 、r與t的關係式：

$s=\frac{\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3a^2}+\sqrt{3b^2}-\sqrt{3}a+b}t+\frac{-\sqrt{3}a+b}{\sqrt{3a^2}+\sqrt{3b^2}-\sqrt{3}a+b}$ ，

$r=\frac{-\sqrt{3}a+b+\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2}+\sqrt{3b^2}-\sqrt{3}a+b}t+1-\frac{2b}{\sqrt{3a^2}+\sqrt{3b^2}-\sqrt{3}a+b}$ ，

計算此時$t+s+r$的值即可得此定值$\frac{3}{2}$ ：

用同樣的方法計算反向內接正三角形周長的最小值，也有類似的性質：

當$t'=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 時，$\triangle D'E'F'$的周長發生最小值，且此時$t'+s'+r'=\frac{3}{2}$ 。

六、結論

(一)一給定的任意$\triangle ABC$ ，所有同向內接正三角形的中心構成一條直線，所有反向內接正三角形的中心也構成一條直線，這兩條直線互相平行，且皆與 的尤拉線垂直；又當內接正三角形的三頂點僅在 的三邊上移動時， 中僅能作同向內接正三角形，且此時內接正三角形的中心構成一條與尤拉線垂直的線段。

(二)當$t=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 時，同向內接正三角形的周長發生最小值，且此時$t+s+r$為定值$\frac{3}{2}$ ；又當$t'=\frac{1}{2}+\frac{2a-1}{2a^2+2b^2-2a+2\sqrt{3}b+2}$ 時，反向內接正三角形的周長發生最小值，此時$t'+s'+r'$ 亦為定值 $\frac{3}{2}$ 。

評語

本作品主要在討論三角形內接正三角形的性質，思考過程頗為嚴謹，表達及論証均恰當並利用GSP軟體呈現研究成果提昇生動性是一件不錯的作品。

回到目錄頁../Index.htm