

整體與倍角

高中組 第三名

縣 市：台北縣

校 名：板橋高中

作 者：簡境良、張緯鈞、陳韋銓

指導教師：蔡志強



我是張緯鈞. 我從來沒有想到我會有這樣的機會去參加這種比賽. 都要感謝我們的蔡志強蔡老師, 他真的在我們旁邊給了我們很大的鼓勵. 蠻多地方他都給了我們非常好的建議與協助. 真的很高興能夠有這樣一個回憶, 我在之中學到了很多的事情, 也成長了不少, 給了我蠻多寶貴的經驗. 讓我感到了許多人的關懷還有溫情.

我是簡境良, 我做這一次的科展, 學了很多. 看了所有的組員專注的神情, 我真的是嚇了一跳. 沒有想到大家都可以這個樣子, 爲了這次的比賽而付出如此多的精力還有時間. 雖然做的時候也遇到了許多的失敗與挫折, 但是都被我們一一的克服了. 所以, 我最大的感觸就是, 人的潛力還有團結的力量竟是如此的無限.

我是陳韋銓. 這次的科展, 我覺得我們凝聚了許多人的力量還有學校所有的資源, 像我們雖然是數學科的, 但是我們學校還有許多別科的作品也在做, 大家常就是在一起一直到晚上. 還有許多自然科及數學科的老師都給了我們很大的鼓勵, 沒有他們, 我也不可能堅持到現在. 因爲其中真的是蠻累人的. 尤其是我們的指導老師蔡志強老師, 尤是辛苦. 這次我們科展能得名, 的的確確是許多人辛苦的結果, 榮耀是屬於每個人的!

關鍵詞：

整邊與倍角

一、研究動機

數論與幾何最迷人的地方就是找尋具有某些特定性質的整數邊三角形, 譬如說直角三角形的所有整數邊三角形是

其中 u, v 滿足 $(u, v) = 1$, 且一奇一偶的整數.

然後, 另一個有趣的課題是面積爲整數的Heron三角形

但這是一個非常困難的問題.

今天, 我想要探討一個類似於上面, 但簡單的問題, 也就是其中一個內角, 是另一內角的 n 倍的所有整數邊三角形. 這個問題是我們從87年度台灣省第二區數學科能力競賽的第二試的問題二

在坐標平面上, 已知 $P(0,0)$, $Q(1,0)$ 為定點, 而動點 $R(x,y)$ 在 $\triangle PQR$ 中滿足 $\angle Q = 2\angle P$, 則動點 R 的軌跡方程式為何?

二、研究目的

給定 θ, n , 將滿足其中一角爲 θ , 另一角爲 $n\theta$ 的整數邊三角形所構成的集合, 記爲 $\Delta_{\theta, n}$.

1. 對怎樣的 θ, n , 這種整數邊三角形存在, 也就是 $\Delta_{\theta, n} \neq \emptyset$.
2. 這種整數邊三角形的邊長的一般式爲何?
3. 進一步的問題是求出其中一角爲 $p\pi/q$, 而另一角爲 $r\pi/s, q, s \in \mathbb{N}$ 的所有整數邊三角形.

三、研究工具

筆, 紙, 電腦, G.S.P.

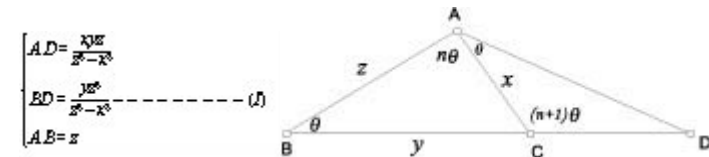
四、研究過程及討論

在研究這個問題之前, 我們先研究: 對於給定 $\Delta_{n\theta}$ 中的任意一個三角形, 如何推得 $\Delta_{(n+1)\theta}$ 中的一個三角形, 這是我們研究這個問題的基礎. 由這個基礎, 可得 $\Delta_{n\theta}$ 中三角形邊長的一組遞推式, 研究過程如下.

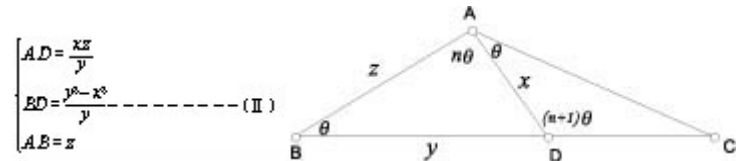
底下我們先作一個很重要的觀察.

引理一

(1).給定 ΔABC , $\angle B=\theta$, $\angle A=n\theta$ x 爲 θ 所對應的邊, y 爲 $n\theta$ 所對應的邊, z 爲 $\angle BCA$ 所對應的邊, 且 $(n+2)\theta<\pi$,在 $\overline{BC}$ 上取一點 D ,使得 $\angle CAD=\theta$ (D 不在 $\overline{BC}$ 邊上), 則 ΔABD 之三邊長.



(2).給定 ΔABC , $\angle B=\theta$, $\angle A=(n+1)\theta$ x 爲 θ 所對應的邊, y 爲 $(n+1)\theta$ 所對應的邊, z 爲 $\angle BCA$ 所對應的邊, 在 $\overline{BC}$ 上取一點 D , 使得 $\angle CAD=\theta$, 則 ΔABD 之三邊長.



注 解

(1).由[引理一], 我們可以得到 $\Delta_{n\theta}$ 中三角形邊長的一組遞推關係式.確切的說,設 ΔABC 是滿足 $\angle A=n\angle B$ 之整數邊三角形, 其中 x,y,z 分別爲 ΔABC 之三邊長 $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$, 則由[引理一]的第一部份, 可得一個 ΔABD 滿足 $\angle A=(n+1)\angle B$, 而且邊長滿足(I)式.

因此, ΔABD 的三邊長均爲有理數, 再將 ΔABD 放大 $\frac{z^2-x^2}{z}$ 倍, 即可得到一個 $\Delta A'B'C'$, 且邊長滿足

$$\begin{cases} A'C'=xy \\ B'C'=yz \\ A'B'=z^2-x^2 \end{cases} \text{----- (*)}$$

顯然, $\Delta A'B'C' \in \Delta_{n\theta}$, 因此我們可以從 $\Delta_{n\theta}$ 中的一個 ΔABC , 得到 $\Delta_{n\theta}$ 中的一個 $\Delta A'B'C'$, 且其邊長滿足(*)的關係式.

(2).反過來說, 由[引理一]的第二部份, 從 $\Delta_{n\theta}$ 中的一個 ΔABC 出發, 可以得到一個 ΔABD 滿足 $\angle A=n\angle B$, 邊長均爲有理數, 且有如下關係式.

$$\begin{cases} AD=\frac{xz}{y} \\ BD=\frac{y^2-x^2}{y} \\ AB=z \end{cases}$$

其中 x,y,z 分別爲 ΔABC 之三邊長 $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$.

再將 ΔABD 放大 y 倍, 則所得到的 $\Delta A'B'C'$ 顯然是 $\Delta_{n\theta}$ 中的一個元素, 且在(*) 式的對應下, $\Delta_{n\theta}$ 中的 $\Delta A'B'C'$ 就對應到 $\Delta_{n\theta}$ 中的 $\Delta A'B'C'$ ($\Delta A'B'C'$ 是將 ΔABC 放大 $z(y^2-x^2)$ 倍得來).

由以上的說明, 可知在不論相似三角形的情況下, $\Delta_{n\theta}$ 中的任一個 $\Delta A'B'C'$ 均可由 $\Delta_{n\theta}$ 中一個 ΔABC 透過下列的關係式得來.

$$\begin{cases} A'C'=xy \\ B'C'=yz \\ A'B'=z^2-x^2 \end{cases}$$

其中 x,y,z 分別爲 ΔABC 之邊長 $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$.

因此,我們有如下的[引理二].

引理二

滿足 $\angle A=n\angle B$, 且三邊均爲整數的 ΔABC 存在的充要條件爲 $\cos \angle B$ 爲有理數.

推論一

在不論相似三角形的情況下, 則下列的遞迴關係式可生成其中一內角爲 θ ,另一內角爲 $n\theta$ 的所有整數邊三角形.

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n y_n \\ y_{n+1}=y_n z_n \\ z_{n+1}=z_n^2-x_n^2 \end{cases} \quad x_1=x, y_1=y, z_1=z, x, y, z \in \mathbb{N}, 2x>z$$

其中 $\cos \theta=\frac{z}{2x}$, x_n 爲 θ 所對的邊, y_n 爲 $n\theta$ 所對的邊, z_n 爲 $\pi-(n+1)\theta$ 所對的邊.

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n y_n \\ y_{n+1}=y_n z_n \\ z_{n+1}=z_n^2-x_n^2 \end{cases} \quad x_1=x, y_1=y, z_1=z, x, y, z \in \mathbb{N}$$

接下來我們利用遞迴關係式

算出 x_n,y_n,z_n (當 $n=1,2,3,.....,8$)

n	x_n	y_n
1	x	x
2	x^3	x^3
3	x^2z_1	$x(x^3-x^3)z_1$
4	$x^4z_1^2z_2$	$x^3(x^3-2x^3)z_1^2z_2$
5	$x^3z_1^3z_2^2z_3$	$x(x^4-3x^3x^3+x^4)z_1^3z_2^2z_3$
n	z_n	
1	z	
2	z^3-x^3	
3	$z(x^3-2x^3)z_1$	
4	$z^4-3x^3x^3+x^4)z_1^2z_2$	
5	$z(x^4-4x^3x^3+3x^4)z_1^3z_2^2z_3$	

觀察發現

在上面,我們發現,當 $n=3,4,...,8$ 時, x_n,y_n,z_n 有大於1的公因數, 這對我們找的三整邊有了相當大的阻礙, 於是我們接下來考慮[引理三],[四]來改良我們的遞迴關係式.

引理三

遞迴關係式 $x_{n+1}=x_ny_n,y_{n+1}=yz_n,z_{n+1}=z_n^3-x_n^3$

其中 $x_1=x,y_1=y,z_1=z,x,z,s\in N$

滿足 $x|y_n$

引理四

考慮下列兩組遞迴關係式

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_ny_n \\ y_{n+1}=yz_n \\ z_{n+1}=z_n^3-x_n^3 \end{cases} \quad \text{滿足 } x|y,z|z_n^3-x_n^3, x,z,s\in N$$

以及

$$\begin{cases} a_{n+1}=xa_n \\ b_{n+1}=xc_n \\ c_{n+1}=zc_n-xb_n \end{cases} \quad \text{滿足 } a|b,c|c_n^3-x_n^3, x,z,s\in N$$

則 $x_n=na_n,y_n=nb_n,z_n=nc_n$, 且 nc_n 滿足下列遞迴關係式.

$$nc_{n+1}=nc_n\frac{y_n}{x_n},nc_1=1$$

推論二

遞迴關係式 $nc_{n+1}=\frac{y_n}{x_n}nc_n$, 且 $nc_1=1, \forall n\in N$

滿足 $nc_n\in N$

引理五

遞迴關係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=xa_n \\ b_{n+1}=xc_n \\ c_{n+1}=zc_n-xb_n \end{cases} \quad \text{滿足 } a|b,c|c_n^3-x_n^3, x,z,s\in N$$

若 $(a_n,c_n)=(x,z)=1$, 則 $(a_n,b_n,c_n)=1, \forall n\in N$

由[推論一],[引理四],[五]可得到下面的[引理六].

引理六

下列的遞迴關係式可生成其中一內角為 ϕ , 另一內角為 nc_ϕ , 且三邊長的最大公因數為1的所有整數邊三角形.

$$\begin{cases} a_{n+1}=xa_n \\ b_{n+1}=xc_n \\ c_{n+1}=zc_n-xb_n \end{cases} \quad \text{滿足 } a|b,c|c_n^3-x_n^3, x,z,s\in N,(x,z)=1$$

其中 a_n 為 ϕ 所對的邊, b_n 為 nc_ϕ 所對的邊, c_n 為 $\pi-(n+1)\phi$ 所對的邊, 且 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$.

推 導

接下來, 我們利用遞迴式算出 a_n,b_n,c_n 的顯式.

$$\begin{cases} a_{n+1}=xa_n \\ b_{n+1}=xc_n \\ c_{n+1}=zc_n-xb_n \end{cases}$$

我們算出來的結果歸納如下.

n	a_n	b_n	c_n
---	-------	-------	-------

1	x	x	x
2	x^2	$2x$	x^2-x^0
3	x^3	$x(x^2-x^0)$	$x^3-2x^1+x^1$
4	x^4	$2x(x^3-2x^1)$	$x^4-2x^3+x^3$
5	x^5	$x(x^4-2x^3+x^3)$	$x^5-4x^4+3x^4$

觀察發現

- $$\begin{cases} a_n=x^n \\ b_n=xc_{n-1} \end{cases}$$

2.n爲奇數 , $c_n=x(\cdots\cdots)$

n爲偶數 , $c_n=(\cdots\cdots)$

3.在 c_n 的括號裡, 係數成正負相間.

4.將 c_n 括號裡的係數排列如下.

$$n=1 \quad 1$$

$$n=2 \quad 1 \quad 1$$

$$n=3 \quad 1 \quad 2$$

$$n=4 \quad 1 \quad 3 \quad 1$$

$$n=5 \quad 1 \quad 4 \quad 3$$

我們發現了有類似"巴斯卡三角形"的東西, 如下

$$n=1 \quad c_0$$

$$n=2 \quad c_0 \quad c_1$$

$$n=3 \quad c_0 \quad c_1$$

$$n=4 \quad c_0 \quad c_1 \quad c_2$$

$$n=5 \quad c_0 \quad c_1 \quad c_2$$

由以上之觀察, 得到如下的猜想.

在不論n爲奇數或偶數時, 我們把 a_n, b_n, c_n 的一般式加強如下.

$$a_n=x^n$$

$$b_n=x[C_0^{n-1}-C_1^{n-2}x^2+C_2^{n-2}x^4-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}(\frac{n}{2})!(\frac{n-1}{2})!x^{n-1}]\quad\text{--(G)}$$

$$c_n=C_0^n-C_1^{n-1}x^2+C_2^{n-1}x^4-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}}^n(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2})!x^n$$

經過以上的討論及[引理二],[六], 我們可以將 $\Delta_{n,\theta}$ 中的三角形刻劃如下.

定理一

(1). 一內角爲 θ , 另一內角爲 $n\theta$ 的所有整數邊三角形滿足下面兩點.

$$1.\exists x,z\in N,(xz)\neq 1,2x>z, \text{ 使得 } \cos\theta=\frac{x}{2x}.$$

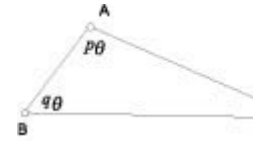
$$2.\exists k\in N^+, \text{ 使得三邊長爲 } ka_n, kb_n, kc_n, \text{ 其中 } a_n, b_n, c_n \text{ 爲(G)式.}$$

(2).給定 $k,x,z\in N^+$, 滿足 $2x>z,(x,z)=1$, 且 $\cos\theta=\frac{x}{2x}$, 則三整數邊爲 ka_n, kb_n, kc_n 之三角形的三內角爲 $\theta, n\theta, x-(n+1)\theta$,其中 a_n, b_n, c_n 爲(G)式, 且 n 滿足 $(n+1)\theta< x$.

接下來, 我們試著找出 ΔABC 其三內角爲 $p\theta, q\theta, x-(p+q)\theta$, 且其邊均爲整數. 在証明過程中, 我們以 $\theta, n\theta, x-(n+1)\theta$ 所對的三整邊爲基礎, 以找出 $p\theta, q\theta, x-(p+q)\theta$ 所對的邊,証明如下.

引理七

若 ΔABC 三內角爲 $p\theta, q\theta, x-(p+q)\theta$,且其三邊長爲有理數, 則 $\cos\theta$ 爲有理數.



定 義

$$f_{n,\theta}(x,z)=C_0^{x-z}-C_1^{x-z}x^2+c_2^{x-z}x^4-\cdots+(-1)^{\frac{x}{2}}C_{\frac{x}{2}}^x(\frac{x}{2})!(\frac{x}{2})!x^x$$

引理八

若給定一個 ϕ ，滿足 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$, $x,z\in N(2x>z,(x,z)=1)$ ，則

$$\sin\pi\phi=\frac{f_{\pi}(x,z)}{x-1},\sin\phi$$

引理九

若 $0<p,q,\phi<x$ ，且滿足 $(p+q)\phi<x$ ，則 $\sin p\phi,\sin q\phi,\sin(x-(p+q)\phi)$ 可爲一個三角形的三邊長.

引理十

若給定 ϕ,p,q ，滿足 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$, $x,z\in N(2x>z,(x,z)=1)$ ，以及 $p,q\in N,(p,q)=1$ ，

且 $0<(p+q)\phi<x$ ，則存在一整數邊 $\triangle ABC$ ，其內角爲 $p,q,\phi,x-(p+q)\phi$ ，且其所對三邊長分別爲 $f_{\pi}(x,z)k^q,f_{\pi}(x,z)k^p,f_{\pi+q}(x,z)$

引理十一

$f_{\pi+n}(x,z)$ 滿足如下的遞推式

$$f_{\pi+n}(x,z)=2f_{\pi+n-1}(x,z)-x^2f_{\pi}(x,z)$$

其中 $f_0(x,z)=0,f_1(x,z)=1$

引理十二

- (1). $(x^n,f_{\pi+n}(x,z))=1,\forall n,n=0,1,2\cdots$
- (2). $(f_{\pi}^2(x,z),f_{\pi+1}^2(x,z))=1,\forall n=0,1,2\cdots$
- (3). $f_{\pi}^2(x,z)|f_{\pi+n}^2(x,z),\forall n,k\in N$

定理二

(1).一內角爲 $P\phi$ ，另一內角爲 $q\phi$ 的所有整數邊三角形滿足下面兩點.

- 1 $\exists x,z\in N,(x,z)=1,2x>z$ ，使得 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$.
- 2 $\exists k\in N$ ，使得三邊長爲 $k\times f_{\pi}(x,z)k^q,k\times f_{\pi}(x,z)k^p,k\times f_{\pi+q}(x,z)$.

(2).給定 $k,x,z\in N$ 滿足 $2x>z,(x,z)=1$, 且 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$ ，則三整數邊爲

$k\times f_{\pi}(x,z)k^q,k\times f_{\pi}(x,z)k^p,k\times f_{\pi+q}(x,z)$ 的 $\triangle ABC$ 其三內角爲

$p,q,\phi,x-(p+q)\phi$ ，其中 $0<(p+q)\phi<\pi,(p,q)=1$.

由[定理二]的討論，我們已找到所有內角爲 $p,q,\phi,x-(p+q)\phi$ ，且其邊爲整數的三角形, 因此得到如下的結論.

五、結論

(1).一內角爲 $P\phi$ ，另一內角爲 $q\phi$ 的所有整數邊三角形滿足下面兩點.

- 1 $\exists x,z\in N,(x,z)=1,2x>z$ ，使得 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$.
- 2 $\exists k\in N$ ，使得三邊長爲 $k\times f_{\pi}(x,z)k^q,k\times f_{\pi}(x,z)k^p,k\times f_{\pi+q}(x,z)$.

(2).給定 $k,x,z\in N$ 滿足 $2x>z,(x,z)=1$, 且 $\cos\phi=\frac{x}{2x}$ ，則三整數邊爲

$k\times f_{\pi}(x,z)k^q,k\times f_{\pi}(x,z)k^p,k\times f_{\pi+q}(x,z)$ 的 $\triangle ABC$ 其三內角爲

$p,q,\phi,x-(p+q)\phi$ ，其中 $0<(p+q)\phi<\pi,(p,q)=1$.

滿足 $f_{\pi+1}(x,z)=C_0x^n-C_1x^{n-2x}+C_2x^{n-2x-2x}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2x}}C_{\frac{n}{2x}}(\frac{n}{2x}k(\frac{n}{2x}-\frac{n}{2x})$

六、參考資料

- 1.基礎數學第一, 二, 四冊(國立編譯館).
- 2.87學年度全國數學科能力競賽成果報告書.

評語

本研究討論邊長爲整數，其中兩角度數比值爲有理數的三角形的存在性。作者抽絲剝繭，利用三角形性質及複角公式，遞迴地決定了構成這種解答的方法。解法完整，是本地高中生研究的典型。