

分割次方數的奧祕

高中組 第二名

縣 市：高雄市

校 名：師範大學附屬高中

作 者：何思賢

指導教師：吳吉昌

康木村



何思賢，民國七十二年生於高雄，現就讀高師大附中二年級，就小就喜歡閱讀課外書籍，依照自己的方式去思索問題的答案，上國中之後，對數學這個領域特別興趣，課餘之暇更深入此一學科的研究與探討，經過多次科展的歷練，視野、興趣更加寬廣，這一路走來要感謝學校的支持及老師的指導。

關鍵詞：數論、整數

一、研究動機

Lagrange 定理說明了：任一自然數均可寫成不超過四個自然數的平方和，同時對所有 $8K+7(K \in \mathbb{N})$ 型之自然數，則不能以不超過三個自然數的平方和表示出。關於立方和四次方和以上的討論，則是有名的華陵問題。仿此，我們定義函數 $f_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} (m \geq 2)$ 使得對於某些正整數 n ($m=2$ 時為完全平方數； $m \geq 3$ 時為兩個 m 次方數和)， $f_m(n)$ 表示滿足下列條件之最大正整數： n 可表示成 k 個正整數之 m 次方和，。本文的研究即是探討了的上界。

二、研究目的

- (一)對於幾個固定的 m 值求出 $f_m(n)$ 的上界(不一定是最好的), 以得出一般情形的求上界方法。
- (二)對 $m=2$ 作了更深入的討論。

三、研究過程

(一)

1.我們先討論 $m=2$ 之情況:設 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為非負整數

且滿足:

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \quad (1)$$

由此設我們知： $a_i (i=1,2,3,\dots)$ 之值隨著 n 改變而可以有不同的值，但不是 n 的函數，這是因為對一個 n 值可能有兩個不同的有序數列 $(a_1, a_2, a_3, \dots), (a'_1, a'_2, a'_3, \dots)$ 滿足(1)式，

若有固定自然數 $t (t \leq n)$ 滿足： $f_2(n) \leq n - t - 1$ 只要使底下的式子無非負整數解即可：

$$n - t = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \quad (2)$$

(1)-(2)得：

$$t = 3a_1^2 + 8a_2^2 + 15a_3^2 + \dots \quad (3)$$

此無非負整數解，為了達到精確的下界， t 必須僅可能的大,在此我們借用下結果：

※引理A：若 a, b 互質，考慮自然數 n 。當 $n \geq ab - a - b$ 時，方程 $ax + by = n$ 有非負整數解 (x, y) ；當 $n = ab - a - b$ 時，此方程無非負整數解。

(此定理是Frobenius 問題的特殊情形)。

∵ (a,b)≠1 ∴方程ax+by=x 有無限多解，

我們可適當的選取特殊的一解：0≤x<b

則by=x-ax>(ab-a-b)-ax≥ab-a-b-a(b-1)=-b

∴ y>-1則y≥0

則此特殊解即為非負整數解。

若對x=ab-a-b 有非負整數解，則由ax+by=ab-a-b↔ a(x+1)+b(y+1)=ab

知：ax+by=ab 有正整數解(x,y)

∴ax=ab-by=b(a-y) 得：b|ax，又(b,a)=1

∴ b|k↔k≥b，則by=a(b-x')≤0 (→←)

故對x=ab-a-b 時是無非負整數解的。

依此引理：為了讓3無非負整數解，由(3,8)=1

考慮取z=3 8-3-8=13(<15) 則可得：f₃(x)≤x-14.

2.(1)由3討論f₃(x)的經驗，可討論f₃(x)如下：

2¹-1=7,2²-1=26,4²-1=63,2³-1=124,.....

一個可能的z=7×26-7-26=149

設，149=7a₁+26a₂+63a₃+124a₄, 其中a_i∈N∪0 若a₄=1，則25=7a₁+26a₂+63a₃，顯然a₁=a₃=0

如此：a₂= $\frac{25}{7} \notin Z$ ，因此a₄=0

若 a₄=2，則23=7a₁+26a₂ 得a₁=0，a₂= $\frac{23}{7} \notin Z$

a₄=1，則86=7a₁+26a₂

a₂=3時，a₃= $\frac{86-78}{7}=\frac{8}{7} \notin Z$

a₂=2時，a₃= $\frac{86-52}{7}=\frac{34}{7} \notin Z$

a₂=1時，a₃= $\frac{86-26}{7}=\frac{60}{7} \notin Z$ ∴a₄=0

而25=7a₁+26a₂ 無非負整數解(a₁,a₂)

故得：f₃(x)≤x-150

(2)討論f₃(x)時，我們發現：

2⁴-1=15,3⁴-1=180,4⁴-1=255 均是5的倍數，

這可由Fermat's Little Theorem：若p為質數，整數a並非p的倍數，則 p|a^{p-1}-1

證 明

∵(a,p)=1，則(a,2a,...,(p-1)a)

構成完全剩餘系，

∴(p-1)!a^{p-1}=a(2a).....(p-1)a=(p-1)! (mod p)

由於(p,(p-1)!)≠1 ∴a^{p-1}=1(mod p)得：p|a^{p-1}-1

所以我們可討論如下：(15, 80)=5，則取

z=(($\frac{15}{5}$)($\frac{80}{5}$)-($\frac{15}{5}$)-($\frac{80}{5}$))5=20·5=145

(這是因為15x+80^y = z 無非負整數解 ($\frac{15}{5}$)x+($\frac{80}{5}$)y= $\frac{z}{5}$ 無非負整數解)

則f₃(x)≤x-146 但是這個上界實在差勁，因為146<150直覺上來說：

上界應該可再小些. 底下，我們繼續改進上界：

由於5⁴-1=624 不為5的倍數，取z=624+259=883

立刻可得一上界： $f_1(x)\leq x-883$

當然此法還可以繼續改進! 如我們可取 $t=624\Box+259=2131$ ，易證： $f_4(x)\leq x-2132$

因爲 $2131-624k$ ($k=0, 1, 2, 3$)均不爲5的倍數

且 $2131<10^4-16^4-1,7^4-1,8^4-1,9^4-1$ 均爲5的倍數)但若取 $t=624\times k_1+k_2$, 其中 $k_1\geq 4$, $k_1,k_2\in N$

則不能保證 $t-624k$ ($k=0,1,\cdots,k_1$) 不能寫成 $15x+80y+255z$ ($x,y,z\in N\cup 0$) 之型式。

因爲之中必有一數爲5的倍數，而且就算不能寫成此型成，也得經檢驗才可知道，而這可能需要極多的運算。

例如:可取 $t=624\Box+145=2641$ 而 $2641-624k$ ($k\geq 0,1,2,3,4$) 的型式中,只有 $k=4$ 使其爲5的倍數，此值即 爲145，而145是不能寫成 $15a_1+80a_2$ ($a_1,a_2\in N\cup 0$) 型式的，且 $145<255$ ，故可得： $f_4(x)\leq x-2642$

上雖未涉及許多運算,但有很大的原因是因爲有引理A的結果,假如數字大些就要涉及三個未知數以上的不定方程。

此時，檢驗有無整數解就沒有引理A可用了。事實上，減少計算量的方法關係著Frobenius問題，但此問題較完整解答只有二個未知數的情況！

一般而言，當 k_1 (或 k_2)再大時就要使更多(變數的)不定方程無整數解,而這是不大容易達成的！

我們把 $f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)$ 的結果列出可得定理B：

$$f_3(x)\leq x-14 \quad , \quad f_4(x)\leq x-150 \quad , \quad f_5(x)\leq x-2642$$

(當然，值域中的每一元素均爲正整數)

關於 $f_6(x)$ 顯然有一等式成立條件： $x=152=3^2+5^2$

所以此上界是最佳上界。而 $f_6(x)$ 則留待(二)討論。

3.由1,2,可得一般的討論方案：

(1) $(2^m-13^{n-1})\equiv 1(\forall m\in N)$ ，則可試取

$t=(2^{n-1})(3^n-1)-(2^{n-1})-(3^{n-1})$ 作討論，

由於 $2^{n-1}14^{n-1}$ ，且 $n\leq 6^{n-1}$ ，所以只需檢驗： $(x,y,z\in N)$

$$(2^{n-1})(3^{n-1})-(2^{n-1})-(3^{n-1})$$

$$=(x-1)(2^{n-1})+(y-1)(3^{n-1})+z(5^n-1)$$

$$\Leftrightarrow (2^n-1)(3^n-1)=(2^{n-1}x+(3^{n-1}y)+(5^n-1)z$$

如： $m=5$ 時， $(2^5-1,3^5-1)=(31,242)=1$ ，而檢驗

$7502=31\times 242=31x+242y+3124z$ 時發現有：

$(x,y,z)=(110,4,1)$ 這一組解，故不能定結論。而依前經驗：此時的

$$m\neq ((5-1)!(7-1)!(11-1)!\cdots j!$$

$$\alpha_n,\alpha_m,\alpha_{11},\cdots\in\{0,1\}$$

但不全爲 $0,\beta\in N$

但這並不是充分條件,例外情形如： $(2^m-1,3^n-1)\equiv (2047,177146)\equiv 23$

(2)若 $(2^{n-1},13^{n-1})\equiv d\neq 1$

(a) $m=((p_1-1)(p_2-1)\cdots)\beta$

(p_k 爲質數且 $2\leq p_1\leq p_2\leq\cdots$) s 的取法可從 變形，

$\therefore \forall k\leq p_i$ ($k\in N$), k^n-1 ，爲 $k^{p_i-1}-1$ 之倍數，則爲 p_i 之倍數。

$\therefore f_m(x)\leq x-p_1^m$ (粗略估計)

(b) m 爲上述例外情形:目前尙沒找出具體之方法。

(二) $m=2$ 時的討論—— $f_3(x)\equiv x-14$ 時的情況

1.考慮能分成二數平方和之完全平方數依序爲 $5^2, 10^2, 13^2,\cdots\cdots$

2.∵ 5²不可寫成三正整數平方和(檢驗得知) ∴ 10²亦不可。

證 明

假如10²可寫成三正整數平方和；

設10²=x₁²+x₂²+x₃²(x₁,x₂,x₃∈N)

由於x_i≡0 1 (mod 4)(i=1,2,3) 且 x₁²+x₂²+x₃²≡10²≡0 (mod 4)

∴x_i≡0 (mod 4) 2k 令x_i=2y_i(y_i∈N)

則由10²=(2y₁)²+(2y₂)²+(2y₃)²得：25=y₁²+y₂²+y₃² (→←)

3.雖然5²不可寫成3數平方和，卻可寫成4~11數平方和。

即，5²=(3²+4²)=8×1²+2×2²+1×3²=9×1²+1×4²
=7×1²+2×3²=4×1²+3×2²+1×3²=1×1²+6×2²
=3×1²+1×2²+2×3²=4×2²+1×3²=1×1²+2×2²+1×4²

169=1×25+144×1² 可分成 145(=1+144)~155
=2×3²+2×2² (=11+144)個數之平方和(因可 +143×1²
分成 3+144=147 數之平方和)

=2×25+119 可分成(2+119)~(22+119)即
=9×2²+133×1² 121~141 數之平方和，又可
=1×3²+6×2²+136×1² 分成 142~144 數之平方和
=2×3²+3×2²+139×1²

=3×25+94 可分成(3+94)~(33+94),(4+69)~(44+69)
=4×25+69 (5+44)~(55+44),(6+19)~(66+19)
=5×25+44 即 97~127,73~113,49~99,25~85
=6×25+19 則可分成 25~127 數之平方和。

=3呂+9²+3²+2²：可分成3+3~33+3 即6~36個數之平方和。

綜合上述，可分成2~155之平方和， ∴f₃(13²)=13²-14

4.若對於n(≥169),f₃(n²)=n²-14，則f₃(2n²)=2n²-14

證 明

(1)設n²=x₁²+x₂²=x₁²+x₂²+x₃² (x₁,x₂,...x₃∈N)

則2n²=(2x₁)²+(2x₂)²=(2x₁)²+(2x₂)²+(2x₃)²

故可分成2,3數之平方和，又(2n)²=n²+n²+n²+n²——可分成4~4(n²-14)

數之平方和，故考慮：可否分成(4n²-55)~(4n²-14)數之平方和。(2)證明了這可行性。

(2)對於分成n²-11-3t(t∈N且1≤t≤14)數，

n²=(1+t)(2+1-3)+(n²-13-4t)·1²， (n²≥169∴n²-13-4t≥0)

對於分成n²-11-(3t+1)=n²-12-3t 數，

n²=(4+t)·2²+(n²-16-4t)·1²， (n²-16-4t≥169-16-56≥0)

對於分成n²-11-(3t+2)=n²-13-3t 數平方和，

n²=(t-1)·2²+2·3+(n²-14-4t)·1²(n²-14-4t≥0) 得證.

由此:13²,26²,52²...(13□^汚)²...(r N)均有：f₃((13·2)²)=(13·2)²-14

5.仿2，可證明：20²不可寫成三正整數平方和，而可寫成二正整數平方和的完全偶平方數

依序爲:10²,20²,26²,... 由4.可知：f₃(26²)=26²-14，故得：

定理C:13²,26²分割是最小的奇、偶數滿足f₃(n²)=n²-14

我們把4.寫成定理D：∀r∈N∪0,f₃((13·2)²)=(13·2)²-14.

6.我們的疑問是：

除了13□^f型式的數外，可否有系統構造出其它的數，

滿足： $f_x(n)=n-14$ ，答案是肯定的，見下：

(1)考慮原始畢氏三元組 $(m^2-n^2,2mn,(m+n)^2)$

令 $m^2-n^2<2mn\leftrightarrow (m-n)^2<2n^2\leftrightarrow m<(\sqrt{2}+1)n\Leftarrow m<2n$

(2)取 $13\cdot 2^r=$ 且滿足 一取法爲 取 ，則 $m^2-n^2=105<2mn=208$,
(由2.知： $f_x(2^k)\nrightarrow 2^k-14(\forall k\geq 4\in N)$, 此乃 2^k 不可分成二正整數平方和之故.由此，可恰當的選取 m 使得 $n<m<2n$)

我們證明： $m+n=13^2+8^2=233$ 滿足： $f_x(233)=233^2-14$

(3) $\therefore 233^2=208^2+105^2$ ，而 $f_x(208^2)=208^2-14$, (208= $13\Box^4$)

$\therefore$ 可分成 $2\sim 208^2-13$ 個數之平方和。

(4)又可分成: $105^2+1,105^2+2,\cdots$,

$105^2+(208^2-14)=233^2-13$ 個數的平方和，

而 $105^2\leq 208^2-13$ (註2)故可分成 $2\sim 233^2-14$ 個數的平方和

$\therefore f_x(233^2)=233^2-14$.

註: 1.以此方法，可從任一滿足： $f_x(n_i)=n_i-14$ 的數 n_i 構造出 n_k 滿足：

$f_x(n_k)=n_k-14$,

且 $\frac{n_k^2}{n_i^2}\nrightarrow 2^k(k\in Z)$ ——定理E.

2.爲何可由 $105<208$ 推得： $105^2\leq 208^2-13$ 見下：

若： $2n^2-m^2\geq n$,由 $2mn-(m^2-n^2)=-(m-n)^2+2n^2$,

則 $2mn-(m^2-n^2)\geq -(2n-1-n)^2+2n^2=(n+1)^2-2=(n+1)^2-2=7$

$\therefore 2mn\geq (m^2-n^2)+9$, 則 $(2mn)^2\geq (m^2-n^2+7)^2\geq (m^2-n^2)+13$

3.只用13爲出發點並不能得到所有的 因爲這樣只能得到 形如 $3k+1$ 的數，

(因爲 m, n 均不爲3的倍數則 $(m^2+n^2)\equiv 1(mod3)$ ，故知)

但是 15^2 (是3的倍數)滿足 $f_x(15^2)=15^2-14$ ：

$15^2=12^2+9^2=14^2+5^2+2^2=13^2+6^2+4^2+2^2$ 故可分成1~158個自然數的平方和，又仿4.(2)知亦可分成159-211個自然數的平方和，得證.

四、結論

(1) $f_x(n)\leq n-14(\forall n\geq 5\approx 25)$ ， $f_x(n)\leq n-150(\forall n\geq 3^2+5^2=152)$

而 $f_x(152)=2^2=152-150$ ， $f_x(n)\leq n-2642(\forall n\geq 4^2+7^2=2657)$

(2) $13^2, 26^2$ 分別爲最小的奇、偶數滿足： $f_x(n)=n-14$

(3) $\forall r\in N\cup 0$ ， $f_x((13\cdot 2^r)^2)=(13\cdot 2^r)^2-14$

(4)對於任一滿足： $f_x(n_i)=n_i-14$ 的正整數 n_i ，可構造出 n_k 滿足：且 $\frac{n_k^2}{n_i^2}\nrightarrow 2^k(k\in Z)$

五、回顧與展望

(1)在文中，爲何要如此定義 $f_{\pm}(n)$ ？

根據此定義，函數 $f_{\pm}$ 之定義域爲完全平方數所構成的集合，即討論 $f_x(n)$ 時， n 必須爲完全平方數！而對於 $m\geq 3$ 時，依有名的F.L.T：一個正整數之 m 次方不可分成二個正整數的 m 次方和！因而我們的定義域才取爲二正整數的 m 次方和之數所構成的集合”，爲了使我們的研究能更爲寬廣，我們可改變(或放寬)定義，而保留了此研究的部分(或全部)結果。

例如，可放寬定義爲：

若 n 可寫成 k_0 個正整的 m 次方和，(k_0 可有不同取值)則 $f_{\pm}(n,k_0)$ 爲：

$\forall k_0\leq k(k\in N)\leq f_{\pm}(n,k_0)-1$ ， n 可寫成 k 個正整數的 m 次方和，但不可寫成個 $f_{\pm}(n,k_0)$ 正整數的 m 次方和。如此定義可使本文的結果幾乎全保留，且研究的主題更 爲寬廣，且我們可以定義 k_0 到 $f_{\pm}(n,k_0)-1$ 的最長長度，即定義：

$G_{\pm}(n,k_0)=f_{\pm}(n,k_0)-k_0$ ，以進而研究 $G_{\pm}(n,k_0)$ 之max.值 $G_{\pm}(n)$ 。

(2)本文的發展方向：

在文中給予幾種估計上界的方法，可給予改進—不只是承文中的精神給予改進,而是作本質上的修改。我們還可研究達到

上界的解數，例如:
是否有無窮多個 n 使 $f_1(n)=n-150$ ？對於 $f_3(n)$ 我們雖然有許多結果，但還可進一步研究使： $f_3(n)=n-14$ 的 n 值之一般型式，或求得所有 n 的方法。
(若為偶數且 $f_3(n)=n-14$,可易知： $f_3(\frac{n}{2})=\frac{n}{2}-14$ 我們因此只需關心所有的奇數 n ,使 $f_3(n)=n-14$,而在文中給予了無窮多個奇數 n 的求法，卻不確定這種方法是否可求得所有的奇數 n)而對於 $G_4(n)$ ， 則更是另一番深入的研究。

六、參考資料

不定方程	著者:單墀 余紅兵	凡異出版社
數論導引	著者:閩嗣鶴 嚴士健	凡異出版社
數學奧林匹克大集	著者:黃宜國	上海教育出版社

評語

本件作品討論一個正整數表示成 k 個正整數之 n 次方和的解法，研究過程頗為細心，表達能力良好，作品將來尚可能再發展。

回到目錄頁../Index.htm