

三角形N倍投射的圓錐曲線探討

國中組 第二名

縣市：基隆市

校名：中正國中

作者：陳維萱

指導教師：林耀南

張淑凌



李佳霖，民國七十四年出生於民風純樸的基隆，從小就對各項事物都充滿了濃厚的興趣，特別喜好作數學、看科學類的叢書以及研究物理、化學，「為什麼？」幾乎成了我的口頭禪，真可說是個「好奇寶寶」！

這次有幸承蒙老師的細心指導，能夠有機會參加全國科展，和各地的高手一較高下，使我了解到學問是無止境的，這世界上還有許多奧妙的事物等著我去發掘呢！對我而言，這將是一個畢生難忘的經驗。

一、研究動機

在一本課外讀物中有一道題目談到：在直角三角形中，若將一邊四等分，沿著等分點，作一倍、二倍、三倍、四倍的投射，則四投射點在同一拋物線上，如圖。我對此種投射法感到非常有趣，於是開始了相關的研究。

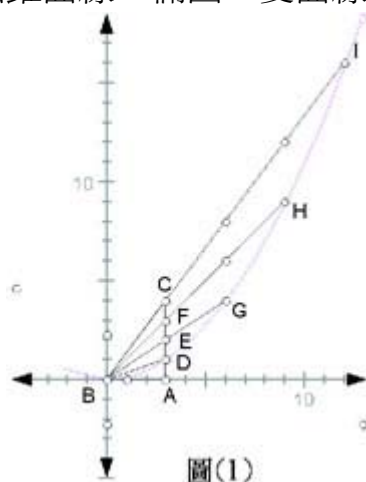
二、研究目的

分別以三頂點為投射源點時，作 $1/N$ 倍投射， $\overline{BN_i} = \frac{1}{N} \overline{BM_i}$ 的圖形，及 N 倍投射 $\overline{BN_i} = N \overline{BM_i}$ 的

圖形。

探討將「特殊點」作為投射源點時，圖形的變化與性質。

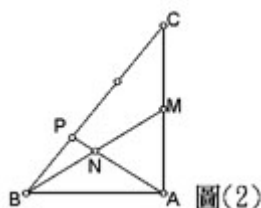
利用此投射系統投出其它的圓錐曲線—橢圓、雙曲線。



圖(1)

三、研究過程

PART A：相異投射源



圖(2)

在向外延伸的部份前，先探討向內縮的部份，如圖，將三角形一邊二等分，延等分點，作1倍、1/2倍、1/3倍的投射，則三投射點在一直線上，此性質是否可推廣下去？

在向外延伸的部份前，先探討向內縮的部份，如圖(2)，將三角形一邊二等分，延等分點，作1倍、1/2倍、1/3倍的投射，則三投射點在一直線上，此性質是否可推廣下去？

如圖(3)，直角 $\triangle BAC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ （為易於觀察起見，且不失一般性）， P_2 二等分 $\overline{AC}$ ，且 Q_2 二等分 $\overline{BP_2}$ ，且 Q_3 、 D 三等分 $\overline{BC}$ ，則 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 三點共線。

證明 (1) 延長 $\overline{BA}$ 並取一點，使 $\overline{BA} = \overline{EA}$

(2) 連 $\overline{EP_2}$ 並延長，交 $\overline{BC}$ 並於 D' 點

(3) 連 $\overline{AQ_2}$ 並延長，交 $\overline{BC}$ 於 Q_3' 點

(4) 在 $\triangle BEP_2$ 中 $\because \overline{BQ_2} = \overline{Q_2P_2}$, $\overline{BA} = \overline{EA}$

$$\therefore \overline{AQ_2} \parallel \overline{EP_2}$$

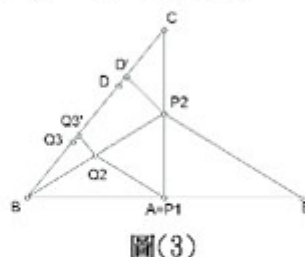
(5) 在 $\triangle BD'P_2$ 中 $\because \overline{BQ_3'} = \overline{Q_3'P_2}$, $\overline{AQ_3'} \parallel \overline{ED'}$

$$\therefore \overline{BQ_3'} = \overline{D'Q_3'} \dots\dots\dots ①$$

(6) 在 $\triangle CQ_3'A$ 中 $\because \overline{CP_2} = \overline{P_2P_1}$, $\overline{AQ_3'} \parallel \overline{ED'}$

$$\therefore \overline{Q_3'D'} = \overline{D'C} \dots\dots\dots ②$$

(7) 由①、②可知 Q_3' 、 D' 三等分 $\overline{BC}$ ，又 Q_3 、 D 三等分 $\overline{BC}$



圖(3)

$$\therefore D = D', Q_3 = Q_3''$$

(8) $\because A, Q_2, Q_3'$ 三點共線，又 $A = Q_1, Q_3' = Q_3$

$\therefore Q_1, Q_2, Q_3$ 三點共線

由上述之證明，可推得如下的性質：

性質一 在 $\triangle ABC$ 中， $P_i (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ n 等分 $\overline{AC}$ ，且 $\overline{BP_i} = \frac{1}{i} \overline{BP_i}$ ，則 Q 點共線

接下來是向外延伸的部分，採解析的方法，將 $\triangle ABC$ 放在座標平面上計算，又為了方便計算，取具一般性的直角三角形。外延 n 倍時，所得到的各點不共線，那麼這些點又排列成怎樣的圖形呢？於是做更進一步的研究：

直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ n 等分 $\overline{AC}$ ， $\overline{BQ_n} = n \overline{BP_n}$ ， $P_1 = Q_1, C = P_n$ ，如圖(4)。則 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ 皆在同一條拋物線上

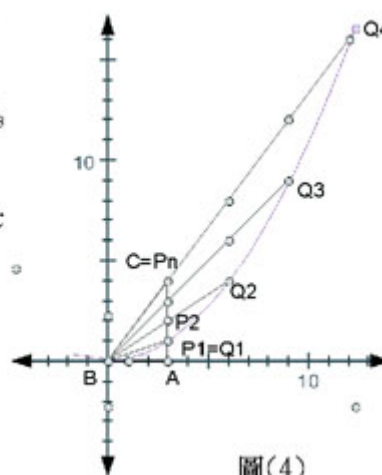
證明 設 Q_1, Q_2, Q_3 的拋物線方程式為 $y = Ax^2 + Bx + C$

得拋物線方程式為 $y = kx^2 / nh^2$

$x = nh$ 代入，得 $y = nk$

$\therefore Q_n$ 在此拋物線上

$\therefore Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ 在同一條拋物線上



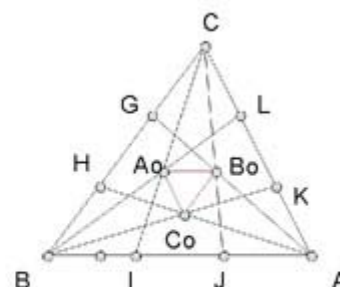
圖(4)

性質二

在 $\triangle ABC$ 中， $P_i (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ n 等分 $\overline{AC}$ ，且 $\overline{BP_i} = i \overline{BP_i}$ ，則 Q_i 點在同一條拋物線上。

接下來將投射點擴充至三角形三頂點，結果發現當三角形的三邊被 n 等分時，各邊第一個等分點與頂點相連的線段交點中所形成的三角形必會與原三角形相似，其邊長也可由下表導出：如圖

	$\triangle ABC$ 與 $A_0B_0C_0$ 的邊長比
三等分	5 : 1
四等分	7 : 2
五等分	9 : 3
:	:
:	:
n 等分	$(2n-1) : (n-2)$



圖(5)

性質三

任意三角形各邊被 n 等分時，其第一等分點與對面對應頂點的三交點所形成的三角形必與原三角形相似且邊長比為 $(2n-1) : (n-2)$

由圖中各頂點與各邊等分點外延皆可形成拋物線，共六條拋物線，接下來開始探討拋物線所形成的交點構成的三角形與原三角形是否有相似的關係？首先計算這六條拋物線的方程式，發現六條拋物線的對稱軸皆平行原三角形的投射邊。

性質四

任意一個三角形邊長的 N 等分點投射後所造成的拋物線，其對稱軸必平行原三角形的對應邊。

六條拋物線的交點中，共可形成五個與原三角形相似的三角形。

性質五

六條拋物線交點所形成的三角形均與原三角形相似，且原三角形與其邊長比分別為

$$(1) 4:(3n-4), (2) 2:(3n-4-3\sqrt{n(n-4)}), (3) 2:(3n+4+3\sqrt{n(n-4)}) \\ (4) 1:(3n-2+3\sqrt{n(n-1)}) \text{ 和 } 1:(3n-2-3\sqrt{n(n-1)})$$

再探討諸相似三角形對應頂點的關係，發現對應點皆在原三角形的中線上。

性質六

向內縮 $1/N$ 倍及內外延伸 N 倍所形成的三角形，其頂點皆會在原三角形的中線上，故可知這些三角形都是由「重心」向原三角形的頂點投射出去的相似三角形。

Part B 相同投射源

由上面的研究可發現，不論是由頂點向內縮 $1/n$ 倍或向外延 n 倍，所形成的三角形頂點均在原三角形的中線上，也就是說，這些三角形全部是由重心向外投射構成的，接著將投射源點改成重心，並將重心擺在平面座標的原點，如圖。

直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，以重心 G 為投射源點， $P_2, P_3, P_4, \dots, P_n$ n 等分 $\overline{AC}$ 。 $\overline{GQ_1} = \overline{GP_1}$ ， $\overline{GQ_2} = \overline{GP_2}$ ， $\overline{GQ_3} = \overline{GP_3}$ ， $\overline{GQ_4} = \overline{GP_4}$ ， $\dots$ ， $\overline{GQ_n} = \overline{GP_n}$ 。

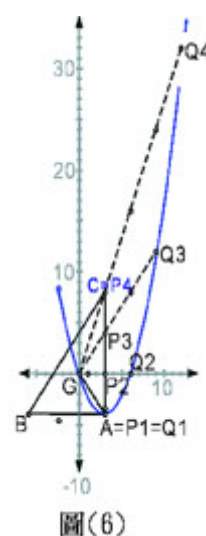
$A=P_1=Q_1$ ， $C=P_{n+1}$ ，則 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n+1}$ 在同一條拋物線上。

證明 設 Q_1, Q_2, Q_3 的拋物線方程式為 $y = Ax^2 + Bx + C$

得拋物線方程式為 $y = (-3k/nk^2) \times x^2 + [(n+3)k/nh]X$

$x = nh$ 代入 得 $y = (-3k/nk^2) \times n^2h^2 + [(n+3)k/nh] \times nh = (-2n+3)h$

$\therefore Q_{n+1}$ 在此拋物線上 $\therefore Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n+1}$ 在同一拋物線上



圖(6)

將投射方向擴充至各邊，也都會形成拋物線，且六條拋物線均經過投射源點。

同樣地，計算六條拋物線的交點，發現和在PART A一樣，拋物線的交點形成的三角形亦與原三角形相似。

性質七

六條拋物線亦可形成與原三角形相似的三角形，邊長比分別為 $4 : (n+2)$ 、 $1 : (n+1)$ ，且各相似三角形對應點亦在原三角形的中線上：

Part C 其他的圓錐曲線

在座標平面上，由原點往AC 投射，由前文的探討，得知：

當向外作有規律的N倍，投射時，造成的P點軌跡為拋物線

當向內作有規律的1/N倍，投射時，P點軌跡為一直線。

除了這兩類圖形外還有其他種類的圖形嗎？

爲了進一步的研究這現象，在此採用極座標觀念探討，因爲極座標的觀念本身就很像此N倍投射，若使用它可能更容易看出投射軌跡方程式的玄機。

- (1)以 $O(0, 0)$ 為極座標原點，令 $\overline{OP}=r$ ， $\angle AOP=\theta$ 如圖(7)，得 $P(r, \theta)$ 由座標平面上的 $P(ia, i^2/n*b)$ ， i 倍投射點，將此點轉換成極座標式為：

$$P(r, \theta), \overline{OP}=r \quad r=i\sqrt{a^2+\left[\frac{ib}{n}\right]^2} \dots\dots\dots ①$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+\left[\frac{ib}{n}\right]^2}} \dots\dots\dots ②$$

由②代入① 得 $r = i*a/\cos\theta=ia/\cos\theta$ 此為拋物線極座標式。

- (2)以 $O(0, 0)$ 為原點，令 $\overline{OP'}=r$ ， $\angle AOP'=\theta$ 得 $P'(r, \theta)$ 如圖(8)

由座標平面上的 $P'[1/(i+1)*a, i/(i+1)*b/n]$ 各段的 $1/n$ 倍投射點，轉換成極座標式為：

$$r=\frac{1}{i+1}\sqrt{a^2+\left[\frac{ib}{n}\right]^2} \dots\dots\dots ③$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+\left[\frac{ib}{n}\right]^2}} \dots\dots\dots ④$$

由④代入③得 $r = 1/(i+1)*a/\cos\theta$ 此應為一直線

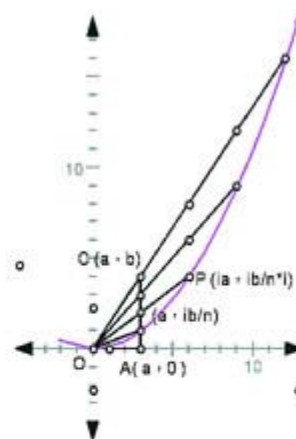
為了印證上式為一直線，以 A 為極座標原點，令 $\angle P'AO = \alpha$ ， $\overline{P'D} \perp \overline{OA}$ ，D

$$\left(\frac{a}{i+1}, 0\right) \cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP'}} = \frac{a - \frac{a}{i+1}}{\sqrt{\left(\frac{a}{i+1} - a\right)^2 + \left[\frac{ib}{(i+1)n}\right]^2}}, \text{這表示當 } i \text{ 值給定時，諸 } P' \text{ 點}$$

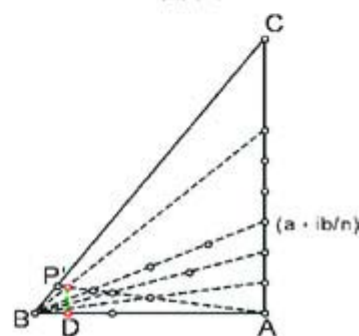
的 α 值即為定值，也就是諸 P' 點會共線。

甲：在這 n 倍投射的情形裡，只能是拋物線或直線嗎？是否有其他的可能？再詳細觀察那兩個極座標方程式：

$$(1) r = \frac{i'a}{\cos\theta} \quad (2) r = \frac{(i+1)^{-1}a}{\cos\theta}$$



圖(7)



圖(8)

從(1)、(2)式中，可觀察到 i 的指數若加以變化，也許會有不同的曲線

出現，例如取指數大於一的 $3/2$ 倍投射，設投射點 $P''[i^{3/2}a, i^{3/2}b/n]$

$$\therefore r = i^{3/2} \sqrt{a^2 + \left\{ \frac{ib}{n} \right\}^2} \dots\dots\dots ⑤$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left\{ \frac{ib}{n} \right\}^2}} \dots\dots\dots ⑥$$

由⑥代入⑤，得 $r = i^{3/2} \cdot a / \cos\theta$ ，然後由坐標平面上觀察這 P'' 點

$$\begin{cases} x = i^{3/2}a \\ y = i^{3/2} \frac{b}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = i^3 a^2 \\ y^2 = i^3 \frac{b^2}{n^2} \end{cases} \quad \text{這表示 } i \text{ 的指數有倍數關係}$$

假設取 i^t 倍投射，設投射點 $P''[i^t a, i^{t+1}(b/n)]$

$$\therefore r = i^t \sqrt{a^2 + \left\{ \frac{ib}{n} \right\}^2} \dots\dots\dots ⑦$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left\{ \frac{ib}{n} \right\}^2}} \dots\dots\dots ⑧$$

將⑧代入⑦得 $r = i^t (a / \cos\theta)$

然而由座標平面上觀察這 P'' 點

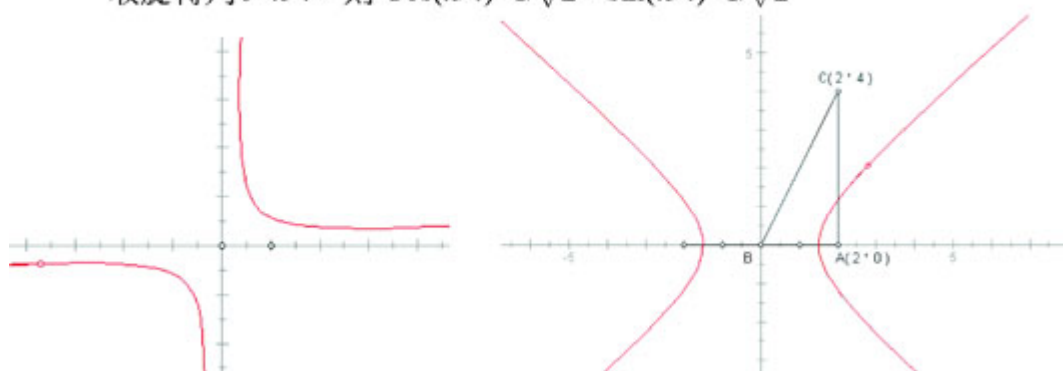
$$\begin{cases} x = i^t a \\ y = i^{t+1} \frac{b}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = i^{2t} a^2 \\ y^2 = \frac{i^{2t+2} b^2}{n^2} \end{cases} \quad \text{得 } x^2 y^2 = i^{4t+2} \cdot \frac{a^2 b^2}{n^2} \text{ 也就是 } xy = \pm i^{2t+1} \cdot \frac{ab}{n}$$

當 $t = -1/2$ 時， $xy = \pm ab/n$ 為雙曲線，同理一開始取 $P''[i^{-2t}a, i^{2t+1}(b/n)]$ 時，最後會造成 $xy = \pm i^{4t+1}(ab/n)$ ，故取 $t = -1/4$ 時， $xy = \pm ab/n$ 亦為雙曲線，總而言之，當 $t = -1/2, -1/4, -1/6, \dots$ 時，圖形為雙曲線，例如：以 $t = -1/2$ 為例， $(k=1) P''[i^{-1/2}a, b/n \cdot i^{-1/2}]$

$$\text{在平面座標上，令 } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{i}} a \\ y = \sqrt{i} \frac{b}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2}{i} \\ y^2 = \frac{ib^2}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \therefore x^2 y^2 = \frac{a^2 b^2}{n^2} \\ \therefore xy = \pm \frac{ab}{n} \end{cases} \text{ 為一雙曲線} \dots\dots ⑨$$

這一組雙曲線的圖大約如圖(9)，若要精確的將此圖形畫出，就需要指定 a 、 b 、 n 的值可將此雙曲線藉軸旋轉(這是繪拋物線常用到的方法)而繪出，如圖(10)

取旋轉角 $\theta = \pi/4$ ，則 $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ， $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$



圖(9)

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \dots \text{代入} \textcircled{9} \frac{x'}{2ab} - \frac{y'}{2ab} = 1 \end{cases}$$

再取 $n=8, a=2, b=4$ 試一試 原式成為 $x'^2/(\sqrt{2})^2 - y'^2/(\sqrt{2})^2 = 1$...確實為雙曲線試再以 $t=-1/2, k=2$ 為例： $P^n[i^t a, i^{t+1}(b/n)]$

$$\text{令} \begin{cases} x = \frac{2a}{\sqrt{i}} \\ y = \frac{2b}{\sqrt{in}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4a^2}{i} \Rightarrow \therefore xy^2 = \frac{16a^2b^2}{n^2} \\ y^2 = \frac{4ib^2}{n^2} \end{cases} \therefore xy = \pm \frac{4ab}{n} \quad (\text{為定數}) \dots \text{是雙曲線}$$

此可看出當 n, a, b 指定後，由 $t=-1/2$ 僅可畫出一個雙曲線，但可藉由 K 值的改變而得到無限多的拋物線

乙：更進一步的要去探討的是，在這種 n 倍投射的環境中，是否有機會造成橢圓呢？那種橢圓又位於何處？

首先再從 it 倍投射思考起，則投射 $P^n(i^t a, i^{t+1} b/n)$

$$\text{令} \begin{cases} x = i^t a \\ y = \frac{i^{t+1} b}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = i^{2t} a^2 \\ y^2 = \frac{i^{2t+2} b^2}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2 x^2}{n^2} = \frac{i^{2t} a^2 b^2}{n^2} \dots \textcircled{10} \\ a^2 y^2 = \frac{i^{2t+2} a^2 b^2}{n^2} \dots \textcircled{11} \end{cases}$$

$$\text{由} \textcircled{10} + \textcircled{11} \quad b^2/n^2 * x^2 + a^2 y^2 = (i^{2t} + i^{2t+2}) * a^2 b^2 / n^2$$

若要使此方程式成為橢圓的方程式，則必須要使 $(i^{2t} + i^{2t+2})$ 為一個正定數，因 t 在指數位置，不易看出 t 為多少時，可使上式為定值，不過整理後，令 $i^{2t}(1+i^2)=1$ ，則 $i^{2t}=1/(1+i^2)$ ，也就是 $i^t = \pm \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$ ，偶只要取 t 的位置為 $\log t$ ，即可得到 $t = \pm \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$ ，現在重新思考，以 $\log t$ 倍投射為例：則 $P^n(i^{\log t} a, \frac{i^{1+\log t} b}{n})$

$$\text{令} \begin{cases} x = i^{\log t} a \\ y = \frac{i^{1+\log t} b}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = i^{2\log t} a^2 \\ y^2 = \frac{i^{2+2\log t} b^2}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2 x^2}{n^2} = \frac{i^{2\log t} a^2 b^2}{n^2} \dots \textcircled{12} \\ a^2 y^2 = \frac{i^{2+2\log t} a^2 b^2}{n^2} \dots \textcircled{13} \end{cases}$$

$$\text{由} \textcircled{12} + \textcircled{13} \quad b^2/n^2 * x^2 + a^2 y^2 = (i^{2\log t} + i^{2+2\log t}) * a^2 b^2 / n^2 = (t^2 + i^2 t^2) * a^2 b^2 / n^2$$

$$\text{令} t^2 + i^2 t^2 = 1 \quad (\text{亦可為其它定值})，則 t^2(1+i^2) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$$

取 $\frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$ 倍投射檢驗其投射點為 $P^n \frac{a}{\sqrt{1+i^2}}, \frac{ib}{\sqrt{1+i^2}}$

$$\text{令} \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{1+i^2}} \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{1+i^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2 x^2}{n^2} = \frac{a^2 b^2}{(1+i^2)n^2} \dots \textcircled{14} \end{cases}$$

$$\left| y = \frac{ib}{\sqrt{1+i^2n}} \right| \left| y^2 = \frac{i^2b^2}{\sqrt{(1+i^2)n^2}} \right| a^2y^2 = \frac{i^2a^2b^2}{(1+i^2)n^2} \cdots \textcircled{15}$$

由⑭ + ⑮得 $b^2/n^2 * x^2 + a^2y^2 = (1+i^2)/(1+i^2) * a^2b^2/n^2 = a^2b^2/n^2$ 為定數…………… ⑯

在⑯式中，因 x^2 項、 y^2 項係數同號，可判斷它是一個橢圓方程式，長短半徑各為 a ， b/n 為了更清楚一點觀察它，再以 $n=8$ ， $a=2$ ， $b=4$ 為例

$$P^m \left(\frac{2}{\sqrt{1+i^2}}, \frac{4i}{\sqrt{1+i^2n}} \right)$$

$$\text{令} \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{1+i^2}} \\ y = \frac{i}{2\sqrt{1+i^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4}{1+i^2} \\ y^2 = \frac{i^2}{4(1+i^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{1+i^2} \cdots \textcircled{17} \\ 4y^2 = \frac{i^2}{1+i^2} \cdots \textcircled{18} \end{cases}$$

由⑰ + ⑱得 $x^2/2^2 + y^2/(1/2)^2 = 1$ [如圖(11)]

又若取 $t = \frac{2}{\sqrt{1+i^2}}$ ， $n=8$ ， $a=2$ ， $b=4$ 則得 $x^2/4^2 + y^2/1^2 = 1$

若要使此投射方式投射出圓，則需使橢圓的長軸與短軸相等，也就是 $b^2/n^2 = a^2$ ($\pm b/n = a$ ，取正值 $b/n = a$)

以 $n=3$ ， $a=2$ ， $b=6$ 為例 $P \left(\frac{2}{\sqrt{1+i^2}}, \frac{2i}{\sqrt{1+i^2n}} \right)$

$x^2 + y^2 = (4+4i^2)/(1+i^2) \dots$ 為圓 [如圖(12)]

又若取 $t = \frac{2}{\sqrt{1+i^2}}$ ， $n=6$ ， $a=2$ ， $b=12$ 則得

$$x^2 + y^2 = 16$$

在 N 倍投射架構的概念中，極坐標式為 $r = t * a / \cos \theta$ 與用焦點、準線造成的圓錐曲線的一般性極坐標式 $r = tk / (1 \pm t \cos \theta)$ 相比，可說是毫不遜色

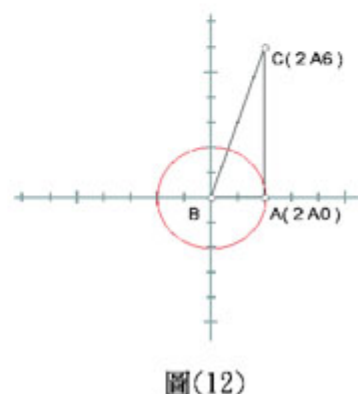
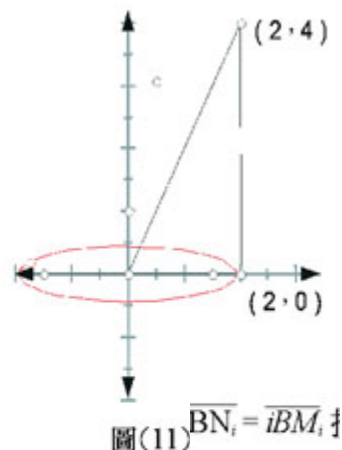
且(1)當 $t=ki$ 時，圖形為拋物線

(2)當 $t=k/(i+1)$ 時，圖形為一直線

(3)當 $t=k/\sqrt{i}$ 時，圖形為雙曲線

(4)當 $t = \frac{k}{\sqrt{1+i^2}}$ 時，圖形為橢圓，但若 $an =$

b 時，則圖形為圓其中 k 為任一定數



四、結論

1. $\overline{BN_i} = i\overline{BM_i}$ 以三角形的一頂點為投射源點，對邊 n 等分點為方向，若依投射，則成拋物線排列，依 $\overline{BN_i} = \frac{1}{i}\overline{BM_i}$ 投射，則成直線排列。

2.分別以三角形的三頂點為投射源點及三角形的重心為投射點，向各對邊 n 等分點為方向同時投射出拋物線，則拋物線交點所形成的三角形皆與原三角形相似。

3.擴展 i 倍投射及 $1/i$ 倍投射成為 it 倍投射，其中 $t = -1/2, -1/4, -1/6, \dots$ 時，圖形成為雙曲線。

4.擴展為 $\frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$ 倍投射時，圖形成為橢圓，使 $an=b$ 時，圖形成為圓。

五、參考資料

1.大陸地區數學競賽題解(1995)

2.胡炳生、胡禮祥著 九章出版社

評語

本作品作者從如下問題：在直角三角形 $\triangle ABC$ 中著將 $\overline{AB}$ 四等分 $D、E、F$ 為等分點， $\overline{CD} = \overline{CE}$ ， $\overline{CG} = 2\overline{CE}$ ， $\overline{CH} = 3\overline{CF}$ ， $\overline{CI} = \overline{CB}$ 則 $D、G、H、I$ 四點在同一條拋物線出發討論 $\overline{AB}$ n 等分然後探討 $\frac{1}{m}$ 倍投射點之軌跡在一直線上及 m 倍投射點的軌跡，先作 $\frac{1}{m}$ 倍投射，本文作者先討論 $n=2, 3, 4$ 再討論一般情況，至於 n 倍投射亦先討論 $n=2, 3, 4$ 情況，再推廣至一般情況證明其投射點在拋物線上。除此外亦探討 n 倍投射性質、作者亦考慮一般三角形 n 倍投射及其投射後其投射點軌跡所在拋物線性質，本作品內容有趣，頗具創造性，研究方法嚴謹。國中生能有此成果實屬不易。

回到目錄頁 [../Index.htm](http://Index.htm)