

“互換黑白棋”的平面化

國中組 第三名

縣 市：台北縣

校 名：江翠國中

作 者：王士鴻、吳佳欣

張耀華、楊凱淳

指導教師：黃錫川



吳佳欣；生日：1985/3/5；簡歷：台北市幸安國小數理資優班、台北縣埔乾國小數理資優班、台北縣江翠國中數理資優班；興趣、專長：我喜歡看書，各類書籍都看，不管是武俠、科幻、動物、寫實，最喜歡的是小說、科普書也很喜歡。有時後，我會強迫自己去看古典文學、文學名著，或是專門知識的書，以充實自己。我看了很多書，從書中學了不少東西，電腦程式語言也是自己看書學的。

楊凱淳；生日：1985/10/16；簡歷：台北縣新埔國小、台北縣江翠國中數理資優班；興趣、專長：喜歡玩PC、PS games的"SLG"，看comic books和小說，也喜歡看卡通，還有．．．算數學，但如果一直想不出來的話，就會去睡覺。專長是繪畫，從古典的素描、水彩到漫畫式我都會。愛打籃球、聽音樂、彈琴。

王士鴻；生日：1984/10/28；簡歷：台北縣重慶國小、台北縣江翠國中數理資優班；興趣、專長：我很喜歡思考數學，興趣是看漫畫、卡通、聽日文歌。我最討厭的事是，在我上課時想睡覺卻又不能睡時，有人對我極其無聊的玩笑。由於我是單親家庭，常有人錯認為我很成熟，其實我知道周遭的人，因為我的幼稚而常感頭痛。

張耀華；生日：1985/5/15；簡歷：台北縣忠孝國小、台北縣江翠國中數理資優班；興趣、專長：我喜歡看書，喜歡玩牌，喜歡一切讓我沈迷的事物。也喜歡安全的自我挑戰，因為我不敢做太危險的事。我會懷疑、甚至否定一個人。常常藉各種方式去了解他人的專長、性情，但我不願意了解自己，因為對自己的了解是主觀的，不能在他人不認同下認同自己，在其他人的認同前的自行認同是虛偽的。我輕視一切不完美。加入了討論、加入了思考、加入了合作、加入了科學無止盡的領域終於，明白了「為什麼」。

關鍵詞：互換黑白棋、平面化、最佳走法

一、研究動機

我們有機會欣賞建國高中學長發表的科展作品「走走跳跳」(1995年國際科展國內初選加拿大正選)，與屏東高中學長發表的科展作品「乾坤大挪移」(1999年全國科展)，兩校學長在一直線上處理黑白棋子的互換，獲得了很好的研究成果，但是都沒有涉及到如何在平面上交換棋子。因此我們興起了在平面上試走的念頭。就自行設計了下面的題目：如圖1，由2個 $m \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤上，每個矩形分別擺上 $mn-1$ 個黑棋與白棋，只留下中央的重疊格不放置棋子，每個棋子可藉由移動一格或跳過相鄰一個棋子而前進，是否可以將黑白棋全部互換？

二、研究目的

探討由2個 $m \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤，黑白棋全部互換的最佳走法與總步數。

三、研究過程與方法

(一)當 $m=1$ 時

(即：由2個 $1 \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤)

如圖2，黑白棋各有 $n-1$ 個排在同一直線的兩側，中央空置一格，這種情形已由前述兩所高中的學長做過很好的研究，在此不再贅述。

其公式為：總步數 $= (n-1)[(n-1)+2] = n^2-1$

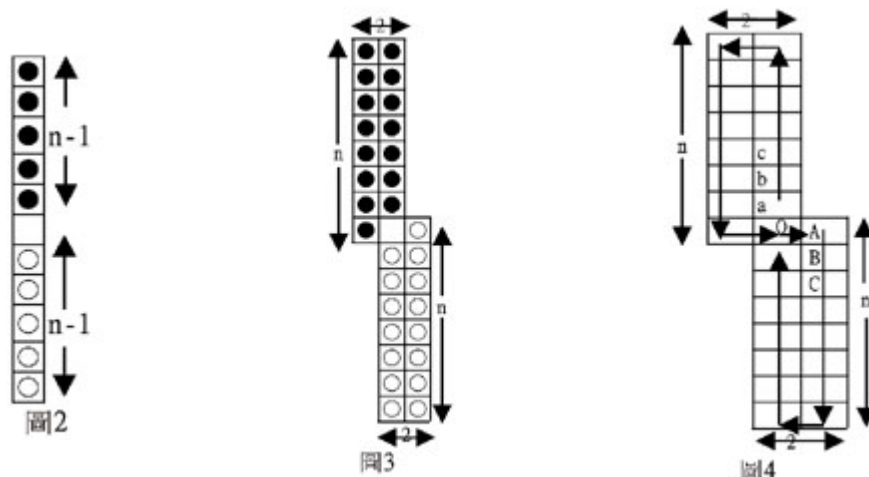
(二) 當 $m=2$ 時

(即：由2個 $2 \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤)

如圖3，當棋盤由直線擴展到平面時，棋子也由上下走向擴大到上下左右走向，因此全部棋子的走法，變得更複雜而難以掌控。經過討論後，我們決定以空格位置移動的走向來掌握棋子的移動情形。

如圖4，表示空格移動位置依序由 $O \rightarrow A \rightarrow a \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow C \rightarrow c \cdots \cdots \rightarrow O$ ，而空格從一個位置到另一位置，是以一次同色棋子的移動開始前及結束後的空格位置，分別為舊位置與新位置。換句話說，空格由一個位置移動到另一位置時，其間移動的都是同一顏色的棋子。

我們發現，(1)畫出的空格經過路線的轉彎處愈少，(2)空格不重複經過同一格。則完成黑白棋交換所需的步數也愈少。這是因為空格沿著直線前進時，棋子才有機會跳躍前進以減少步數，空格轉彎時棋子只能移動到相鄰一格而無法跳躍。如果空格重複經過同一



按照這種走法，我們以不同的n值列舉數例完成下表以觀察其規則：

n	數列	全部步數
2	1323231	15
3	1324334231	29
4	132435454534231	49
5	1324354555645534231	71
...	13243545676...67664534231	...

上表中，第二欄數列的意義為：

- 1.每個黑底白色的數字，表示空格移動一個位置時，一次黑色棋子移動所需的步數。
 - 2.每個白底黑色的數字，表示空格移動一個位置時，一次白色棋子移動所需的步數。
- 右欄為完成全部黑白棋交換所需的全部步數。

由表中我們可以看出幾點：

- 1.數列以一個中間數(加底線較大的數字)爲對稱軸，左右對稱。
- 2.中間數 $=2[\frac{n}{2}]+1$
- 3.每個 $n=k$ 的數列都會重複 $n=k-1$ 的數列。

我們把黑底白色數字和白底黑色數字分開來看，如下表：

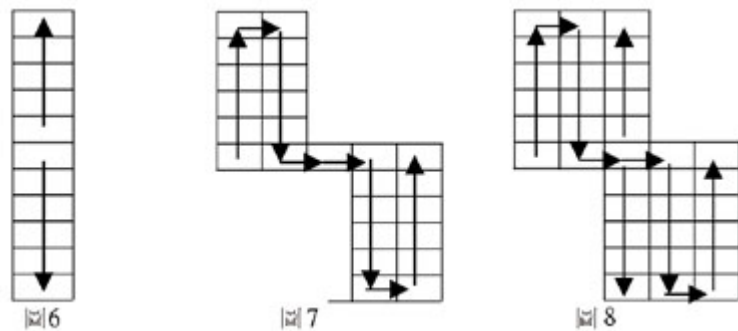
黑底白色數字	$1, 2, \dots, n, n, \dots, 2, 1$
白底黑色數字	$3, 4, \dots, n+1, 2[\frac{n}{2}]+1, n+1, \dots, 4, 3$

可以看出除了中間數外，其他是成等差級數排列的，這是由於每次同色棋子整串往前移動一格，會比上一次同色棋子整串往前移動一格多出1步。現在，我們可以計算由2個 $2 \times n$ 的矩形重疊一格所成的棋盤，黑白棋交換公式為：

$$\begin{aligned}\text{總步數} &= 2 \times \frac{n(1+n)}{2} + 2 \times \frac{(n-1)(n+4)}{2} + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \\ &= 2n^2 + 4n - 3 + 2\left[\frac{n}{2}\right]\end{aligned}$$

(三)當 $m=3$ 時

經充分嘗試各種不同走法，想要合乎空格移動路線直線最長轉彎最少，且不重複經過同一格的兩條件。那麼我們只需將 $1 \times n$ 與 $2 \times n$ 棋盤最佳走法的空格移動路線的圖形合併，即可拼成 $3 \times n$ 棋盤最佳走法的空格移動路線，如圖6與圖7可拼成圖8。



由圖8可看出，它仍然滿足空格移動路線直線最長轉彎最少，與不重複經過同一格的兩個條件，所以這種走法就是 $3 \times n$ 棋盤的最佳走法。

是故 $3 \times n$ 棋盤的最佳走法就是將圖6與圖7的兩種走法分別完成，將這兩種走法的總步數相加即為 $3 \times n$ 的總步數。這是因為這兩條空格移動路線並不互相影響，只是需將 $2 \times n$ 的中央重疊格分開成不重疊的狀態，這時兩矩形相距一格，如圖7，這種 $2 \times n$ 棋盤經前面相同的方法重新計算後得到：

$$\text{總步數} = 2n^2 + 8n - 2 + 4\left[\frac{n}{2}\right]$$

故由2個 $3 \times n$ 的矩形重疊一格所成的棋盤，如圖8，黑白棋交換的公式為：

總步數=圖6棋盤的總步數+圖7棋盤的總步數

總步數=圖6棋盤的總步數+圖7棋盤的總步數

$$= (n^2 - 1) + \{2n^2 + 8n - 2 + 4\left[\frac{n}{2}\right]\}$$

$$= 3n^2 + 8n - 3 + 4\left[\frac{n}{2}\right]$$

(四)當 $m \geq 4$ 時

同理， $m \times n = 4 \times n$ 棋盤最佳走法的空格移動路線可由2個不同的 $2 \times n$ 棋盤最佳走法的空格移動路線拼成，如圖9與圖10拼成圖11。

2.至於在完成外側 $2 \times n$ 棋盤的棋子交換過程中，當 $k \geq 4$ 時開始有中央橫列的內側棋子會加入移動。實際上，我們並不需要去完成中央橫列內側棋子的交換，只要完成外側 $2 \times n$ 棋盤的棋子交換，即可繼續進行內側 $2 \times n$ 或 $1 \times n$ 棋盤的棋子交換，也就是上列公式中，可以把這些多餘的步數扣除，我們稱之為差距數。這個差距數剛好就是中央橫列的內側棋子交換的步數，在 $k \times n$ 棋盤時中央橫列兩端各有黑白棋 $k-3$ 個，所以差距數 $= (k-2)2-1$ ，這個差距數在 $k \geq 3$ 時都適用(因 $k=3$ 的差距數為0)。

因此，兩個 $2 \times n$ 矩形棋盤在不同距離時，完成交換黑白棋實際需要進行步數的一般化公式為：

當 $k \geq 3$ 時，

$$\begin{aligned} \text{實際進行步數} &= \{2n^2 + 4(k-1)n + [(k-1)^2 - 3] + 4[\frac{n}{2}]\} - [(k-1)^2 - 1] \\ &= 2n^2 + 4(k-1)n + -2 + 4[\frac{n}{2}] \end{aligned}$$

3.把數個最佳走法的 $2 \times n$ 棋盤或 $1 \times n$ 棋盤拼成 $m \times n$ 棋盤後，我們發現共有2種減少步數的方法，整理如下：

(1)空格移動到下一個相同位置時， $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ 透過不同的移動方式，可以以 $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ 的捷徑。

如圖12空格要移到斜線格子去 $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ 只有一個 $2 \times n$ 棋盤時，是以 $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ 法移動的，需要3步。現在合併後的走法 $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ ，2步就移到了。這種情況一棋子被異色棋包圍時。在 m 為奇數時，

$m \times n$ 棋盤總步數會減少 $(\frac{m-1}{2})(n-1)$ 步。 m 為偶數時， $m \times n$ 棋盤總步數會減少 $(\frac{m-2}{2})(n-1)$ 步。

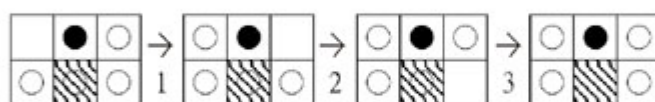


圖 12

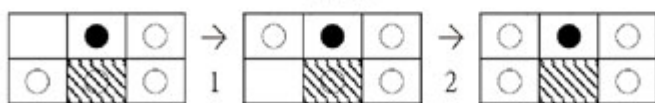


圖 13

(2)改變空格移動路線內、外直行的順序，使總步數減少。

原來的空格移動路線直行的順序如圖14、圖15，當我們把空格移動路線直行的順序改變成如圖16、圖17。在 m 為奇數時會減少 步， m 為偶數時會減少 步。

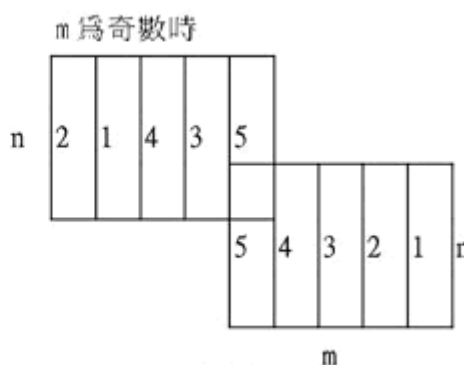
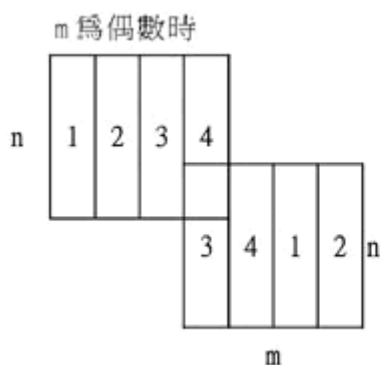


圖 14

圖 15

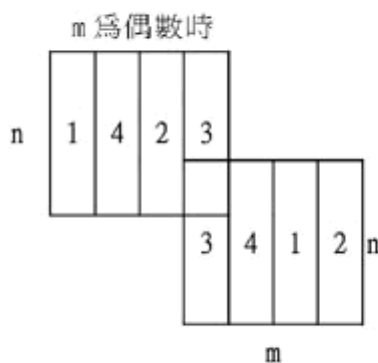


圖 16

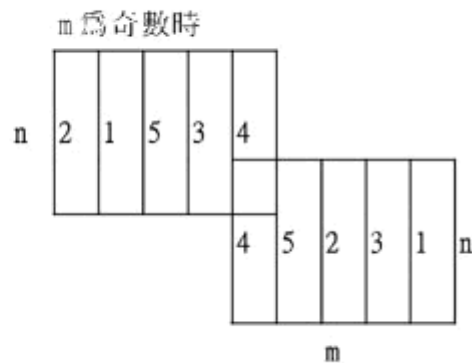


圖 17

綜合上述：

將(1)(2)合併化簡後得到：m為奇數時會減少(m-1)(n-1)步，m為偶數時會減少m(n-1)步，這就是合併後m×n棋盤產生新的捷徑所能減少的步數。

經過上面的探討，現在，我們已經可以完成由2個m×n的矩形重疊一格所形成的棋盤，黑白棋全部互換的總步數。

1.當m為奇數時

m×n棋盤的空格移動路線，可由一個1×n棋盤的空格移動路線與 個不同的2×n棋盤的空格移動路線拼成。

$$\begin{aligned} \text{總步數} &= (n-1)^2 + \sum_{k=3,5,\dots,m} \{2n^2 + 4(k-1)n - 2 + 4[\frac{n}{2}]\} - (m-1)(n-1) \\ &= mn^2 + (m-1)mn - 1 + (m-1)[\frac{n}{2}] \dots\dots\dots (\text{公式 1}) \end{aligned}$$

2.當m為偶數時

m×n 棋盤的空格移動路線，可由 $\frac{n}{2}$ 個不同的 2×n 棋盤的空格移動路線拼成。

總步數

$$\begin{aligned} &= 2n^2 + 4n - 3 + 2[\frac{n}{2}] + \sum_{k=4,6,\dots,m} \{2n^2 + 4(k-1)n - 2 + 4[\frac{n}{2}]\} - m(n-1) \\ &= mn^2 + (m-1)mn - 1 + 2(m-1)[\frac{n}{2}] \dots\dots\dots (\text{公式 2}) \end{aligned}$$

我們發現上述兩個公式是相同的，即

$$\text{總步數} = mn^2 + (m-1)mn - 1 + 2(m-1)[\frac{n}{2}]$$

四、討論

在上面的公式中，把m、n互換(即棋盤轉90度時)，總步數可能不相同，這是因為受到棋盤合併後，產生新的捷徑的影響。所以要應用上述公式時，要先考慮棋盤是否需要旋轉90度？因此我們以原來的公式

$(mn^2 + (m-1)mn - 1 + 2(m-1)[\frac{n}{2}])$ ，減去 m 、 n 互換後的公式

$(m^2n + (m-1)mn - 1 + 2(n-1)[\frac{m}{2}])$ ，所得出的差數來討論棋盤是否需要旋轉

1. 當 m 為奇數， n 為奇數時，則差數 = 0。
2. 當 m 為奇數， n 為偶數時，則差數 = $m-1$ 。
3. 當 m 為偶數， n 為奇數時，則差數 = $1-n$ 。
4. 當 m 為偶數， n 為偶數時，則差數 = $m-n$ 。

由判斷上述四個差數的正負，我們以下表來討論棋盤是否需要旋轉 90 度？

$n \backslash m$	奇數	偶數
奇數	不旋轉 (差數=0)	不旋轉 (差數= $1-n < 0$)
偶數	要旋轉 (差數= $m-1 > 0$)	$m > n$ 時，要旋轉 $m = n$ 時，不旋轉 $m < n$ 時，不旋轉 (差數= $m-n$)

五、結論

由 2 個 $m \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤，完成黑白棋全部互換的總步數為：

總步數

$$= mn^2 + (m-1)mn - 1 + 2(m-1)[\frac{n}{2}]$$

但在使用上述公式時，若有下列三種情形，必須將 m 、 n 互換計算(即需要把棋盤旋轉 90 度)：

1. 當 n 為偶數， m 為奇數時
2. 當 n 為偶數， m 為偶數，且 $m > n$ 時
3. 當 $m=2$ 時

六、未來發展

將由 2 個 $m \times n$ 的矩形重疊一格所形成的棋盤，改成由 1 個 $m \times n$ 矩形與 1 個 $p \times q$ 矩形的 2 個矩形(但 $mn=pq$)，重疊一格所形成的棋盤，黑白棋全部互換的最佳走法與總步數。

七、參考資料

- 1.數學思考 John Mason, Leone Burton, Kaye Stacey 原著
建中同學合譯 九章出版社
- 2.走走跳跳 建國高中1995年國際科展國內初選加拿大正選
- 3.乾坤大挪移 屏東高中1999年全國科展

評語

本作品作者將過去一直線性處理黑白棋子互換情形推廣到平面上兩個 $m \times n$ 的矩形重疊一格棋盤上作黑白互換，本作品先從特殊情形 $m=1$ ，或 $m=2$ 時探討黑白互換所需總步數，再找出一般情況黑白互換總步數，並討論在各種情況下黑白互換總步數，研究方法嚴謹。內容有趣，且具有創意。

[回到目錄頁../Index.htm](#)