

巧解乘法多面體



國中組 第一名

縣 市：台北市

校 名：天母國中

作 者：吳孟軒

指導教師：許文化、林彩照



我從一歲左右就開始玩數字，爲了滿足我的需要，爸媽幾乎找遍了我想要看的數學書，在人際關係中或許有許多的矛盾和灰色地帶，但在數學世界裡的邏輯、歸納、分析卻能帶來真理的訊息，這就是我何以樂此不疲的原因。

關鍵詞：乘法表、多面體、最佳解、倍數、質數、規律

研究摘要

本主題研究如何在 n (≥ 3) 個多面體的一些面上填入適當的數字以後，可以將 " $n \times n$ 乘法表" 上每一列 $(1, 2, \dots, n)$, $(2, 4, \dots, 2n)$, $(3, 6, \dots, 3n) \dots (n, 2n, \dots, n^2)$ 中的 n 個數，都可以用已填入數字的 n 個多面體經過翻面及前後調動呈現在朝上的 n 個面上。最簡單的作法是選用 n 面體，第一個 n 面體每一面分別填入 $1, 2, \dots, n$ ，第二個 n 面體填入 $(2, 4, \dots, 2n)$ ，第三個 n 面體填入 $(3, 6, \dots, 3n) \dots$ ，第 n 個 n 面體填入 $(n, 2n, \dots, n^2)$ 。這樣的填法就可以依序翻面呈現 $n \times n$ 乘法表上的每一列數字。但是這樣有很多數字重複填入不同多面體中，不是最佳解。

本研究的目的是找出 "最佳解"，最佳解的條件：(1) 填入多面體的數的個數最少，(2) 填入的數其分布最平均，例如 $3 \square$ 乘法表用三個多面體呈現時，每一個多面體只要分別填入兩個數字，如 $(1, 6)$ ， $(2, 9)$ ， $(3, 4)$ 即爲唯一的最佳解。

我已用不同方法找出 $3 \leq n \leq 7$ 亦即 $3 \square \sim 7 \square$ 乘法表的完整最佳解，這 5 種乘法表分別有 1, 1, 2, 6, 76 組最佳解。

在求解的過程中我發現到一些規律，這是研究這個主題最重要也最成功的部分：

對任意(質數-1)×(質數-1)乘法表及 [(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表找求最佳解的程序及方法。

(一)任意(質數-1)×(質數-1)乘法表：

設此質數為 p ，則 " $(p-1) \times (p-1)$ 乘法表"的通則是先在所有多面體上分別填入 $1 \sim (p-1)$ 的整數，再把 $(p-1) \times (p-1)$ 乘法表中其他出現的數填到與此數除以 p 的餘數相同的正方體上，例如16同乘法表， $p=17$ ，因 $28 \equiv 11 \pmod{17}$ ，所以28應與11填入同一正方體。把所有數依此方法填妥即成。這是因為對於任意的 $1 \leq k \leq p$ ，如果 k 和 p 互質，則 $k, 2k, \dots, (p-1)k$ 除以 p 的餘數均不相同。

(二)任意[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表：

設此質數為 q ， $(q-1)/2=r$ ，則 " $r \times r$ 乘法表"的通則是把 1 至 $[(q-1)/2]^2=r^2$ 的數按照弓字形的順序填入各個多面體。先按照順序把 $1 \sim r$ 共 r 個數填入第 $1, 2, \dots, r$ 個多面體中，再逆向把 $r+1 \sim 2r$ 的 r 個數分別填入第 $r, r-1, r-2, \dots, 1$ 個正方體。 $2r+1=q$ 是質數，所以跳過。然後 $2r+2 \sim 4r+2$ 這 $2r+1$ 個數也照著 $1 \sim 2r+1$ 的方法做。同理 $4r+3 \sim 6r+3, 6r+4 \sim 8r+4, \dots$ 也如法炮製，一直填到 r^2 就停下來，最後把 $r \times r$ 乘法表沒出現的數刪掉即完成。此法則是由前面（一）的方法轉變而來的。假設 $1 \leq s \leq r$ ，並且 $r \leq q$ ，因為 $s \leq q$ ，且 q 是質數，所以 $s, 2s, \dots, (q-1)s=2rs$ 除以 q 的餘數都不同。其中 $s \div q$ 與 $(q-1)s \div q$ 的餘數和為 q ； $2s \div q$ 與 $(q-2)s \div q$ 的餘數和也是 q ；依此類推，直到 $rs \div q$ 與 $(r+1)s \div q$ 的餘數和仍是 q 。如果把除以 q 餘 1 以及餘 $q-1$ 的數填在第 1 個多面體；餘 2 和餘 $q-2$ 的數填在第 2 個多面體，依此類推，直到餘 r 和餘 $r+1$ 的數填在第 r 個多面體，則如果在前面填入 $1 \sim r^2$ 的數時，用同樣的方法繼續延伸到 $qr=(2r+1)r$ ，則 s 和 $(q-1)s, 2s$ 和 $(q-2)s, \dots$ ，到 rs 和 $(r+1)s$ ，這 r 組數會分別出現在 r 個不同的多面體上。若不看 $(r+1)s \sim (q-1)s=2rs$ 這一段，則剩下的 $s, 2s, \dots, rs$ 分別出現在不同的多面體上。

(三)但7, 13, 17, 19等數既不屬於 "質數-1"，也不是 " $(質數-1)/2$ "，因此必須尋找其他的方法求解，這部分尚待研究。

壹、研究動機

在9個正方體各個面上填入適當的數，使這些正方體經過翻轉調動後，9個朝上的面可以是九九乘法表任何一系列的9個數，亦即可以用這9個正方體排出(1) 1, 2, 3, ..., 9；(2) 2, 4, 6, ..., 18；(3) 3, 6, 9, ..., 27；(4) ...；...；(9) 9, 18, 27, ..., 81，等9種組合。填入的數要盡量避免重複，且必須盡量平均分布在各個正方體，如此才算是最佳解。以下簡稱此問題為 " $9 \square$ 乘法表"。

有人研究 "12合乘法表"的最佳解法，並找出正方體共填63個數的解答，其中有4個數重複填了兩次，但尚未找到填59個數的解法；也就是沒有任何數重複的情形。我想要探討是否有填59個數的解法的存在性，並推擴此問題到正方體個數不為12的情形。

貳、研究目的

- 一、尋求在 3×3 至12合乘法表中至少要填幾個數，以及尋找 3×3 至 $7 \square$ 乘法表中所有的 "最佳解"。
- 二、觀察到(質數-1)×(質數-1)及[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]有固定規則，並探討其原因？
- 三、在六面體時，我們有一及二的結果，若換成其他多面體時，其情況如何？

參、研究設備與器材

紙、筆、正方體、電腦。

肆、研究過程 (略)

伍、研究結果

- 一、 $3 \times 3 \sim 7 \square$ 乘法表的最佳解：

這5種乘法表分別找到1, 1, 2, 6, 76組最佳解。最佳解的組數隨著乘法表的擴大而增加。

二、6□乘法表除了6組最佳解（各正方體分別填4, 3, 3, 3, 3, 2個數）以外，另有13 組次佳解，各正方體分別填4, 4, 3, 3, 2, 2個數。

只有3×3乘法表具有每個正方體填入一樣多個數的填法。

三、6×6 乘法表共18個數要填入6個正方體，但沒有每個正方體填3個數的填法。

四、最佳解的規律性：

(一)任意(質數-1)×(質數-1)乘法表可用以下方式排成：（註：m可以是任意質數，X表示多餘的一個正方體，最後要刪除。）

1.先把1 ～(m-1)²的數依照以下的填法填入m個正方體：

正方體No.	1	2	3	...	m-1	X
填入的數	1	2	3	...	m-1	m
	m+1	m+2	m+3	...	2m-1	2m
	2m+1	2m+2	2m+3	...	3m-1	3m
	...	...	...	...	...	...
	(m-1) ²					

2.再把(m-1)×(m-1)乘法表中沒有出現的數以及正方體X刪掉就行了。

(二)[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表則是用以下方式排成（n表示任意質數，而p=(n-1)/2）：

依照以下方式把1～p²的數填入p+1個正方體：

正方體 X	1	2	3	...	p-1	p
2p+1	1	2	3	→	p-1	p
	2p	2p-1	2p-2	←	p+2	p+1
	2p+2	2p+3	2p+4	→	3p	3p+1
4p+2	4p+1	4p	4p-1	←	3p+3	3p+2
	4p+3	4p+4	4p+5	→	5p+1	5p+2
依此類推，一直填到 p ²						

刪掉p×p乘法表中沒有出現的數以及正方體X就完成了。

(三)8□～12×12合乘法表均可依照上述2種方法的其中一種來求出填入正方體的數最少之解法。

其中9□乘法表使用[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]的方法求得的解答中，9個 正方體各填了4個數，而且都是1個一位數、3個兩位數，排列相當整齊。

五、改變多面體的面數：

(一)下表是把正方體改為其他面數的多面體時，各種大小的乘法表所能排出的解答組數，每組解答填入的數必須最少：

面數	2	3	4	5以上
乘法表				
3□	1	1	1	1
4□	0	1	1	1
5□	0	2	2	2
6□	0	0	19	20
7□	0	0	76	76

(二)上表僅6□找到1組非最佳解的排法：

A	B	C	D	E	F
1, 9, 10, 16, 36	2, 15, 24	3, 8, 30	4, 18, 25	5, 12	6, 20

陸、討論

3×3, 4□, 以及5×5的乘法表, 最佳解都只有1~2組, 如果直接嘗試, 很容易就湊出答案。到了6□, 變化較5×5多, 要有技巧的尋找解答, 而不是亂試。7□更有多達76組解, 而必須用樹狀圖的方式尋找單一正方體的填法並把這些填法組成解答。8□至12合則因情況太複雜, 無法直接分析, 而需從前面的3□~7×7發現規律性並推廣以尋找解答。

欲尋找可以套用在8□以上乘法表之解答的規律性, 就需觀察7□以內的情形(已經求出完整最佳解)。有時找到了規律, 但無法適用於所有正方體, 就需要停下來思考, 究竟為什麼有些大小的乘法表可以適用此規則, 有些卻不行? 結果發現(質數-1)×(質數-1)及[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表可依規律找出解答, 原因是對於任意質數m和與m互質的任何一數n, 具有n, 2n, …, (m-1)n除以m的餘數均不相同的特性。任意(質數-1)×(質數-1)與[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表都可用固定的方法找到填入的數最少之解答。

柒、結論

一、

(一)3□~7□乘法表所有最佳解：

No.	A	B	C	D	E	F	G
3×3乘法表 (共1組解)							
1	1, 6	2, 9	3, 4				

4□乘法表 (共1組解)							
1	1, 6, 16	2, 12	3, 8	4, 9			

5×5乘法表 (共2組解)							
1	1, 6, 20	2, 12, 25	3, 10, 16	4, 15	5, 8, 9		
2	1, 10, 12	2, 9, 20	3, 8, 25	4, 15	5, 6, 16		

6×6 乘法表 (No.1~6 為最佳解，No.7~19 為次佳解，共 19 組解)

1	1, 8, 9, 30	2, 18, 20	3, 10, 24	4, 15, 36	5, 12	6, 16, 25	
2	1, 8, 15, 36	2, 18, 20	3, 10, 24	4, 9, 30	5, 12	6, 16, 25	
3	1, 9, 10, 24	2, 18, 20	3, 8, 30	4, 15, 36	5, 12	6, 16, 25	
4	1, 12, 25	2, 9, 16, 30	3, 10, 24	4, 15, 36	5, 8, 18	6, 20	
5	1, 12, 25	2, 15, 16, 36	3, 10, 24	4, 9, 30	5, 8, 18	6, 20	
6	1, 12, 25	2, 15, 24	3, 10, 16, 36	4, 9, 30	5, 8, 18	6, 20	
7	1, 8, 9, 30	2, 15, 24	3, 10, 16, 36	4, 18, 25	5, 12	6, 20	
8	1, 8, 9, 30	2, 15, 16, 36	3, 10, 24	4, 18, 25	5, 12	6, 20	
9	1, 8, 9, 30	2, 16, 18, 25	3, 10, 24	4, 15, 36	5, 12	6, 20	
10	1, 8, 15, 36	2, 9, 16, 30	3, 10, 24	4, 18, 25	5, 12	6, 20	
11	1, 8, 15, 36	2, 16, 18, 25	3, 10, 24	4, 9, 30	5, 12	6, 20	
12	1, 8, 15, 25	2, 15, 24	3, 10, 16, 36	4, 9, 30	5, 12	6, 20	
13	1, 8, 15, 25	2, 9, 16, 30	3, 10, 24	4, 15, 36	5, 12	6, 20	
14	1, 8, 15, 25	2, 15, 16, 36	3, 10, 24	4, 9, 30	5, 12	6, 20	
15	1, 9, 10, 24	2, 15, 16, 36	3, 8, 30	4, 18, 25	5, 12	6, 20	
16	1, 9, 10, 24	2, 16, 18, 25	3, 8, 30	4, 15, 36	5, 12	6, 20	
17	1, 10, 16, 18	2, 15, 24	3, 8, 30	4, 9, 25, 36	5, 12	6, 20	
18	1, 10, 16, 18	2, 15, 24	3, 8, 25, 26	4, 9, 30	5, 12	6, 20	
19	1, 10, 16, 18	2, 9, 24, 25	3, 8, 30	4, 15, 36	5, 12	6, 20	

7×7 乘法表 (共 76 組解)

1	1, 8, 15, 42	2, 9, 24, 35	3, 10, 38, 36	4, 21, 30	5, 14, 16, 18	6, 20, 49	7, 12, 25
2	1, 8, 15, 42	2, 9, 24, 35	3, 14, 20, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 10, 16, 18
3	1, 8, 15, 42	2, 16, 18, 35	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
4	1, 8, 15, 42	2, 16, 18, 35	3, 14, 20, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
5	1, 8, 15, 42	2, 16, 21, 30	3, 10, 28, 36	4, 18, 35	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
6	1, 8, 15, 42	2, 16, 21, 30	3, 14, 20, 36	4, 18, 35	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
7	1, 8, 15, 42	2, 18, 20, 49	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 16, 35	7, 12, 25
8	1, 8, 15, 42	2, 18, 25, 28	3, 14, 20, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 9, 10, 24
9	1, 8, 15, 42	2, 20, 21, 36	3, 14, 16, 30	4, 18, 35	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
10	1, 8, 18, 35	2, 15, 16, 42	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
11	1, 8, 18, 35	2, 15, 16, 42	3, 14, 20, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
12	1, 8, 18, 35	2, 15, 28, 36	3, 10, 16, 42	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
13	1, 8, 18, 35	2, 16, 21, 30	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25

14	1, 8, 18, 35	2, 16, 21, 30	3, 14, 20, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
15	1, 8, 18, 35	2, 20, 21, 36	3, 14, 16, 30	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
16	1, 8, 21, 30	2, 9, 24, 35	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 14, 16, 18	6, 20, 49	7, 12, 25
17	1, 8, 21, 30	2, 9, 24, 35	3, 14, 20, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 10, 16, 18
18	1, 8, 21, 30	2, 15, 16, 42	3, 10, 28, 36	4, 18, 35	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
19	1, 8, 21, 30	2, 15, 16, 42	3, 14, 20, 36	4, 18, 35	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
20	1, 8, 21, 30	2, 15, 28, 36	3, 10, 16, 42	4, 18, 35	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
21	1, 8, 21, 30	2, 16, 18, 35	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
22	1, 8, 21, 30	2, 16, 18, 35	3, 14, 20, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
23	1, 8, 21, 30	2, 18, 20, 49	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 9, 14, 24	6, 16, 35	7, 12, 25
24	1, 8, 21, 30	2, 18, 25, 28	3, 14, 20, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 9, 10, 24
25	1, 10, 18, 28	2, 9, 20, 42	3, 14, 24, 25	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 8, 15, 36
26	1, 10, 18, 28	2, 9, 24, 35	3, 14, 16, 30	4, 15, 42	5, 8, 21, 36	6, 20, 49	7, 12, 25
27	1, 10, 18, 28	2, 15, 16, 42	3, 8, 35, 36	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 12, 25
28	1, 10, 18, 28	2, 15, 24, 49	3, 14, 20, 36	4, 21, 30	5, 8, 9, 42	6, 16, 35	7, 12, 25

54	1, 12, 35	2, 18, 25, 28	3, 10, 16, 42	4, 21, 30	5, 9, 14, 24	6, 20, 49	7, 8, 15, 36
55	1, 12, 35	2, 18, 25, 28	3, 14, 16, 30	4, 15, 42	5, 8, 21, 26	6, 20, 49	7, 9, 10, 24
56	1, 12, 35	2, 20, 21, 36	3, 8, 30, 49	4, 15, 42	5, 9, 14, 24	6, 25, 28	7, 10, 16, 18
57	1, 12, 35	2, 20, 21, 36	3, 8, 30, 49	4, 15, 42	5, 14, 16, 18	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
58	1, 12, 35	2, 20, 21, 36	3, 10, 24, 49	4, 15, 42	5, 14, 16, 18	6, 25, 28	7, 8, 9, 30
59	1, 12, 35	2, 20, 21, 36	3, 14, 16, 30	4, 15, 42	5, 8, 18, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
60	1, 12, 35	2, 21, 24, 25	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 14, 16, 18	6, 20, 49	7, 8, 9, 30
61	1, 14, 15, 24	2, 9, 20, 42	3, 8, 35, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 10, 16, 18
62	1, 14, 15, 24	2, 9, 20, 42	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 8, 18, 25
63	1, 14, 15, 24	2, 9, 20, 42	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 8, 18, 49	6, 16, 35	7, 12, 25
64	1, 14, 15, 24	2, 9, 28, 30	3, 10, 16, 42	4, 18, 35	5, 8, 21, 36	6, 20, 49	7, 12, 25
65	1, 14, 15, 25	2, 16, 18, 35	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 8, 9, 42	6, 20, 49	7, 12, 25
66	1, 14, 15, 24	2, 16, 21, 30	3, 10, 28, 36	4, 18, 35	5, 8, 9, 42	6, 20, 49	7, 12, 25
67	1, 14, 15, 24	2, 18, 20, 49	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 8, 9, 42	6, 16, 35	7, 12, 25
68	1, 14, 15, 24	2, 20, 21, 36	3, 10, 16, 42	4, 18, 35	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 8, 9, 30
69	1, 14, 18, 20	2, 9, 24, 35	3, 10, 16, 42	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 8, 15, 36
70	1, 14, 18, 20	2, 9, 28, 30	3, 10, 24, 49	4, 15, 42	5, 8, 21, 36	6, 16, 35	7, 12, 25
71	1, 14, 18, 20	2, 15, 16, 42	3, 8, 35, 36	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
72	1, 14, 18, 20	2, 15, 24, 49	3, 10, 28, 36	4, 21, 30	5, 8, 9, 42	6, 16, 35	7, 12, 25
73	1, 14, 18, 20	2, 15, 28, 36	3, 8, 25, 42	4, 21, 30	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 9, 10, 24

74	1, 14, 18, 20	2, 15, 28, 36	3, 10, 24, 49	4, 21, 30	5, 8, 9, 42	6, 16, 35	7, 12, 25
75	1, 14, 18, 20	2, 16, 21, 30	3, 8, 35, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 25, 28	7, 9, 10, 24
76	1, 14, 18, 20	2, 21, 24, 25	3, 10, 28, 36	4, 15, 42	5, 12, 49	6, 16, 35	7, 8, 9, 30

(二)8□~12合合乘法表最佳解特性：

乘法表	8□	9□	10×10	11×11	12×12
1.乘法表中出現了幾 個不同的數？	30	36	42	53	59
2.正方體最少要填幾 個數？	30	36	42	53	59
3.有沒有一個數填了 2 遍以上？	無	無	無	無	無
4.每個正方體分別填入幾個數？	5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3	4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4	5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3	6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4	6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4

二、(質數-1)×(質數-1)乘法表及[(質數-1)/2]×[(質數-1)/2]乘法表有固定作法如下：

(一)(質數-1)×(質數-1)乘法表：

1.先把1~(m-1)²的數依照以下的填法填入m個正方體：

正方體No.	1	2	3	．．．	m-1	X
填入的數	1	2	3	．．．	m-1	m
	m+1	m+2	m+3	．．．	2m-1	2m
	2m+1	2m+2	2m+3	．．．	3m-1	3m
	．．．	．．．	．．．	．．．	．．．	．．．
	(m-1) ²					

2. 再把(m-1)×(m-1)乘法表中沒有出現的數以及正方體X刪掉就行了。

(二) $[(質數-1)/2] \times [(質數-1)/2]$ 乘法表：

1.設要排的是 $n \times n$ 乘法表，則畫表格如下， $1 \sim n^2$ 的數呈S形分布：

正方體X	正方體1	正方體2	正方體3		正方體 $n-1$	正方體 n
	1	2	3		$n-1$	n
$2p+1$	$2n$	$2n-1$	$2n-2$		$n+2$	$n+1$
	$2n+2$	$2n+3$	$2n+4$		$3n$	$3n+1$
$4p+2$	$4n+1$	$4n$	$4n-1$		$3n+3$	$3n+2$
	$4n+3$	$4n+4$	$4n+5$		$5n+1$	$5n+2$
依此類推，一直填到 n^2						

2.刪掉 $n \times n$ 乘法表中沒有出現的數，刪完後正方體X已經沒有任何數了，就把這個正方體刪去。其他幾個正方體則保留未被刪去的數。到此即完成解答。

三、把正方體改成其他面數的多面體研究結果：

(一) $3 \square \sim 7 \square$ 乘法表，正方體換成其他不同數量的面，分別可排出的解答組數，每組解答填入的數都要最少：

乘法表 \ 面數	2	3	4	5 以上
3×3	1	1	1	1

捌、未來發展

(一) $(質數-1) \times (質數-1)$ 與 $[(質數-1)/2] \times [(質數-1)/2]$ 乘法表的規律雖然可以使填入的數最少，但這些數的分布不一定最平均。是否存在其他的規律，能夠使填入的數分布最平均？

除了 $(質數-1) \times (質數-1)$ 及 $[(質數-1)/2] \times [(質數-1)/2]$ 乘法表具有規律以外，是否還有其他的規律存在？發現的規律能否應用於所有任意 $n \times n$ 乘法表？

如何推算出任意 $n \times n$ 乘法表共出現幾個不同的數？

(二)改變多面體的面數時， $3 \square \sim 7 \square$ 乘法表中只有 $6 \square$ 出現1組異於最佳解的解答，其餘乘法表皆沒有最佳解以外的解答。 8×8 以上的乘法表，異於最佳解的解答數量如何？是否會隨著乘法表的擴大而增加？還是忽多忽少，無規律可尋？

玖、參考資料

(一)電腦入門與QBasic

評語

作者想借多面體來設計一種特殊之乘法表，想法及分析皆非常嚴謹，雖然尚未完整推算出最佳解法，但仍屬最佳之作品，尤其作者對問題之瞭解以及能非常明確地知道其最終目標，實在難得。

