小倆口的不能

高小組　第三名

縣　市：高雄縣

校　名：中正國小

作　　者：杜信達

指導教師：高紹菁、杜鴻祥

生性好奇，喜創新好研究，從國小三年級開始探索鑽研，榮獲全國科展第37屆數學科初小組佳作、高雄縣第38屆數學科初小組第二名、第39屆應用科學科高小組第三名。中華民國第十屆發明及創新展覽會製作「狗大便清除器」榮獲發明類學生組佳作。

本屆科展最高興的是終於能獨自完成一件作品，希望能繼續研究。

關鍵詞：最大不能，互質數對，因數倍數

壹、研究動機

媽媽給我的零用錢都是五十元和十元的銅板；我發現，如果改變銅板上的錢數時，能湊成的價錢似乎有些規則值得討論；因此就在爸爸、媽媽和老師的指導下做了這個研究。

貳、研究目的

利用數對1和5所能組成的數字，若是改用２、３、４、５……等或變動各種不同數字的組合，則組成的數與原來數對之間有什麼關係？為什麼有些數不能被互質數對組成？還有那些數可以被互質數對組成？為什麼可以被組成？

以下所討論的數都是正整數。另外，我用（m，n）表示m、n兩個數的最大公因數。

參、研究器材與設備

一、用1和5所能組成的數有那些？

二、用5和其他數字所能組成的數有那些？

三、任何一組數對所能組成的數有那些？

四、為什麼會有最大不能組成的數？

五、如果任意給一個數，則它是那一組互質數對的最大不能？

六、如何很快的把一個數分成一組互質數對的倍數和？

七、二元一次方程式在什麼條件下有解？

肆、研究過程

一、用1和5所能組成的數字有那些？

因為1是最基本的整數，所以每一個數字都可以用1和5組成。同樣的，1和任何整數所組成的任何一組數對都可以組成所有的整數。

二、用5和其他數字所能組成的數有那些？

先將2和5組合，發現1、3不能被組成。

繼續以3和5組合，發現1、2、4、7不能被組成。

再以4和5組合，發現1、2、3、6、7、11不能被組成。

接著以5和5組合，只能組成5的倍數。

為了簡化，以下的討論都找兩個不相同的整數。

再以6和5、7和5分別組合，發現都會有一些不能被組成的數。

到此，我發現，若想用一組數對去組成任何數時，一定會有不能被組成的數，這些不能被組成的數之中，除最小的是1外，一定會有一個最大的數，為了方便，以下都簡稱為最大不能，換句話說比這個最大不能還大的數都可以用這一組數對組成。只是這個最大不能如何找？有沒有規則？

三、任何一組數對所能組成的數有那些？

因為1是最基本的整數，每一個數都可以用1組成，所以從最小的2和3開始。2和3的最大不能為1。

再以2和4組合，因為（2，4）＝2，所以只能組成2的倍數。

2和5已組合過，改為2和6，我發現2和任何的偶數配對都只能組成2的倍數，因此以下我只有找2和奇數配對。

接著2和7，我發現1、3、5不能被組成。

繼續2和9，我發現1、3、5、7不能被組成。

再換爲3和4，我發現1、2、5不能被組成。

3和5已做過，又因爲（3，6）＝（3，9）＝（3，3k）＝3，只能組成3的倍數；所以改用3和7、3和8、3和10分別組合。

然後，我把所研究的結果排列出來做個比較：

2和31不能被組成。

2和51、3不能被組成。

2和71、3、5不能被組成。

2和91、3、5、7不能被組成。

3和41、2、5不能被組成。

3和51、2、4、7不能被組成。

3和71、2、4、5、8、11不能被組成。

3和81、2、4、5、7、10、13不能被組成。

3和101、2、4、5、7、8、11、14、17不能被組成。

4和51、2、3、6、7、11不能被組成。

我發現要以一組數對組成任意數時，必須這一組數對的兩個數互質才可以；若兩個數不互質，則這一組數對只能組成它們最大公因數的倍數及這兩個數的倍數，其他的數都不可能被組成。

我還發現，若兩數互質，則不能組成的數有一些不規則的跳動，但是它們一定有一個最大不能；可是怎麼找呢？只好再一併排列出來做個比較：

2和31，2和53，2和75，2和97，3和45，3和57，

3和711，3和813，3和1017，4和511，

經過細心的觀察與比較，我終於發現：

1＝2×3－2－3、3＝2×5－2－5、5＝2×7－2－7、7＝2×9－2－9、5＝3×4－3－4、7＝3×5－3－5、11＝3×7－3－7、13＝3×8－3－8、17＝3×10－3－10，11＝4×5－4－5。

若（m，n）≠1，則m、n所能組成的數恰好是m、n的最大公因數的倍數及m的倍數、n的倍數，當然就沒有最大不能了。

若（m，n）＝1，則m、n的最大不能爲m×n－m－n。

但是爲什麼m、n的最大不能爲m×n－m－n呢？

四、爲什麼會有最大不能組成的數？

先用3和8做研究；我發現只能組成3的倍數、8的倍數及3和8的倍數和，所以想到用倍數來分類。利用較小的3來分類，任意整數可以分成：3k＋1、3k＋2、3k三類：

3k＋1類　1、4、7、10、13、16、19、22、…16以上的3k＋1類，k≧5；∵3k＋1＝3（k－5）＋3×2＋1＝3（k－5）＋8×2，∴都可以用3、8組成。

3k＋2類　2、5、8、11、14、17、20、23、…8以上的3k＋2類，k≧2；∵3k＋2＝3（k－2）＋3　＋2＝3（k－2）＋8×2，∴都可以用3、8組成。

3k類　3、6、9、12、15、18、21、24、…任何3的倍數都可以用3組成。

不能組成的數用____表示。最大不能用□表示。

所以，在16以上的所有整數之中，包含了8以上的3k＋2類、16以上的3k＋1類及所有的3k類，它們都可以用3和8組成；而16以下較小的連續兩個數15、14，又分別是3k類、3k＋2類之中用3和8可以組成的數；但是再小的13這個數雖然是屬於3k＋1類卻不滿16，所以不能用3和8組成。因此13就是3和8的最大不能。

再以4和9爲例，我用較小的4來分類，同樣的可以分成：4k＋1、4k＋2、4k＋3、4k四類：

4k＋1類　1、5、9、13、17、21、25、29、33、…9以上的4k＋1類，k≧2；∵4k＋1＝4（k－2）＋4×2＋1＝4（k－2）＋9×1，∴都可以用4、9組成。

4k＋2類　2、6、10、14、18、22、26、30、34、…18以上的4k＋2類，k≧4；∵4k＋2＝4（k－4）＋4×4＋2＝4（k－4）＋9×2∴都可以用4、9組成。

4k＋3類　3、7、11、15、19、23、27、31、35、…27以上的4k＋3類，k≧6；∵4k＋3＝4（k－6）＋4×6＋3＝4（k－6）＋9×3，∴都可以用4、9組成。

4k類　4、8、12、16、20、24、28、32、36、…任何4的倍數都可以用4組成。

不能組成的數用____表示。最大不能用□ 表示。

所以，在27以上的所有整數之中，包含了9以上的4k＋1類、18以上的4k＋2類、27以上的4k＋3類及所有的4k類，它們都可以用4和9組成；而27以下較小的連續三個數26、25、24，又分別是4k＋2類、4k＋1類、4k類之中用4和9可以組成的數，但是再小的23這個數雖然屬於4k＋3類卻不滿27，所以不能用4和9組成。因此23就是4和9的最大不能。

因此，任何數若以m分類可以有m個類，分別是mk＋1類、mk＋2類、mk＋3類、…、mk＋（m－1）類和mk類；因爲（m，n）＝1，所以在這每一個類之中，一定都可以有一些數是n的倍數。而這每一個類之中，n的倍數也一定有一個最小的n的倍數，又因爲（m，n）＝1，所以n・m一定會落在類之內；其他的n・1、n・2、n・3、……、會跳動式的平均分配在這m－1個類之中。

因爲在每一個類之中，以n的最小倍數爲首項，公差爲m的數列都可以用m、n的倍數組成。另外，在這幾個首項當中，最大的首項（m－1）×n以上的所有整數都可以用m和n的倍數組成。而在這個最大的首項（m－1）×n以下的連續m－1個數：（m－1）×n－1、（m－1）×n－2、...、（m－1）×n－（m－1），都分別屬於m分類的各個類中用m、n的倍數可以組成的數；也就是說，這連續的m－1個數都可以用m、n的倍數組成，但是再小的數，（m－1）×n－（m－1）－1，也就是（m－1）×n－m並不在這些用m、n的倍數可以組成的數之中，所以，若（m，n）＝1，則以下的第m個數，也就是說m×n－m－n就成爲互質數對m、n的最大不能。

但是，如果隨便給一個數，則能不能找到一組互質數對，使得這一組互質數對的最大不能就是這個數呢？

五、如果任意給一個數，則它是那一組互質數對的最大不能？

若（m，n）＝1，利用m、n的最大不能爲m×n－m－n來推算。

先找原來2和5的數對試試看，

若m×n－m－n＝3，利用等量公理，

∵（n－1）×m－n＋1＝3＋1，∴（n－1）×（m－1）＝1　＝2　，

∵nm，∴n－1＝1且m－1＝4，n＝2且m＝5，驗算符合。

再找m×n－m－n＝5

∵（n－1）×（m－1）＝1　＝2　，∴n＝2且m＝7，又n＝3且 m＝4

顯然會得到最大不能爲5的數對，有（2，7）、（3，4）兩組；

另外，再找100計算，

若m×n－m－n＝100

則（n－1）×（m－1）＝1　，∵（2，102）≠1，∴找不到。

所以，若某些數要當做一組互質數對的最大不能，有時候不一定只有一組，而有時候還找不到呢！

我只好從1開始討論起，

(1)若m×n－m－n＝1，則（n－1）×（m－1）＝1　∴只有（2，3）一組。

(2)若m×n－m－n＝2，則（n－1）×（m－1）＝1　∵（2，4）≠1，∴找不到。

(3)若m×n－m－n＝3，則只有（2，5）一組。

(4)若m×n－m－n＝4，則（n－1）×（m－1）＝1　∵（2，6）≠1，∴找不到。

(5)若m×n－m－n＝5，則（n－1）×（m－1）＝1 ＝2 ∴有（2，7）（3，4）二組。

(6)若m×n－m－n＝6，則（n－1）×（m－1）＝1 ∵（2，8）≠1，∴找不到。

所以除了2之外的質數；我發現在質數的前一個數，也就是所有的質數減1都無法找到一組互質數對，使得質數減1是這一組數對的最大不能。

其他的偶數計算之後，我發現都無法當做互質數對的最大不能。

再細心的研究之後我發現，因爲偶數加1＝奇數，只能分解爲奇數×奇數，這兩個奇數因數個別加1之後又都變成偶數，就不能互質了。所以任意偶數確實都無法當做某一組互質數對的最大不能。

接著再找奇數試試看：

1 →2＝1x2 →（2，3）一組

3 → 4＝1x4＝2x2 →（2，5）一組

5 →6＝1x6＝2x3 →（2，7），（3，4）二組，

7 → 8＝1x8＝2x4→ （2，9），（3，5）二組

9 → 10＝1x10＝2x5 →（2，11）一組，（3，6）≠1不行，

11→ 12＝1x12＝2x6＝3x4 （2，13），（3，7），（4，5）三組，

13 → 14＝1x14＝2x7 →（2，15），（3，8）二組，

15 → 16＝1x16＝2x8→ （2，17）一組，

所以每一個奇數都至少可以找到一組互質數對，使得這個奇數當做這一組互質數對的最大不能。再細心的觀察之後我發現。

因爲奇數加1＝偶數，可以分解爲奇數×偶數和偶數×偶數兩類，然後再個別加1之後就變成偶數×奇數和奇數×奇數。

雖然（奇數，奇數）可能會不互質，但是分解之後一定有一組1×偶數，再個別加1之後就一定有一組2×奇數，而（2，奇數）＝1，所以任何奇數都至少可以找到一組互質的數對，使得這個奇數做爲這一組互質數對的最大不能。

也就是說，每一個偶數都無法當做某一組互質數對的最大不能。但是任何奇數都至少可以找到一組互質的數對，使得這個奇數做爲這一組互質數對的最大不能。而且某些奇數，有時候還可以是好幾組互質數對的最大不能。例如：

11 →12＝1x12＝2x6＝3x4 （2，13），（3，7），（4，5）三組，

23→ 24＝1x24吔＝2x12＝3x8＝4x6 （2，25），（3，13），（4，9），（5，7）四組，

但是，若想用一組互質的數對組合成某一個數時，則必須怎麼分才可以比較快？

六、如何很快的把一個數分成一組互質數對的倍數和？

我想到利用分類的方法，先以這一組數對中較小的數來分類。

例如：想用（3，8）組成38，先以較小的3來分類可以分成：3k＋1、3k＋2、3k三類，因爲38和8都屬於3k＋2類，所以38＝30＋8＝3吘＋8　。另外計算，當然38也可以由2個3和4個8組成。

另外的，若想用（3，8）組成100，因爲100屬於3k＋1類，而3k＋1類中，8的倍數最小的是16，所以100＝84＋16＝3x28＋8x2。

所以，若想要很快的把一個數a分成以m、n來組成。m＜n且（m，n）＝1則先以較小數m來分類，然後看看a是m分類的那一類，再找出這一類中n的倍數最小的數是多少，然後就可以很快的把a分成m和n的倍數和。

同樣的，也可以用較大數n來分類，再看看a是n分類的那一類，而且找出這一類中m的倍數最小的數是多少，然後也同樣的可以分出來。

若想分的數a夠大，則組成的方法還不只一種。例如：

100＝84＋16＝3x28＋8x2＝60＋40＝3x20＋8x5＝36＋64＝3x12＋8x8＝12＋88＝3x4＋8x11。一共有四種組成方法。

我發現，這顯然是求二元一次方程式的整數解。

七、二元一次方程式在什麼條件下有解？

先用，a=1、2、3、…代入計算。發現當a≦13，不一定有解。但是當a＞13時，x和y就會有0以上的整數解。

同樣的，再以計算。發現當a≦23，也不一定有解。但是當a＞23時，x和y就會有0以上的整數解。

比較一下；原來13就是3和8的最大不能，所以在a＞13時，x和y一定就會有0以上的整數解。23就是4和9的最大不能，所以在a＞23時，x和y一定就會有0以上的整數解。

將前面研究所獲得的結果加以整理。

我發現，若（m，n）＝1，則二元一次方程式必須在a＞時，x和y才會有0以上的整數解；當a＞6時，不一定有0以上的整數解。

若（m，n）≠1，則二元一次方程式必須在m、n的最大公因數是a的因數時，x和y才可能會有0以上的整數解；至於想計算它的解，就必須先利用等量公理消去m，n的最大公因數之後，才能按照（m，n）＝1的二元一次方程式mxx＋nxy＝a討論。

看來這裡面還有不少的內容可以繼續再討論的。希望將來在國中的數學課能多學習一些新的知識，繼續玩數學。

伍、結論

一、因爲1是最基本的整數，所以1和任何整數所組成的任何一組數對都可以組成所有的整數。

二、想用一組數對去組成其它整數時，若它的最大公因數不是1，則只能組成這兩個數的最大公因數的倍數。若這兩個數互質，則一定有一個最大的不能組成的數，簡稱爲最大不能，在這個最大不能以下的數，有些可以被組成，有些不能被組成。所有比這個最大不能還大的數都可以用這一組互質數對組成。

三、若（m，n）≠1，m、n不互質，則m、n所能組成的數恰好是m、n的最大公因數的倍數及m的倍數、n的倍數，當然就沒有最大不能了。

四、若（m，n）＝1，m＜n；則利用較小的m把所有的整數分類之後，可以知道在（m－1）×n以上的數一定都可以用m、n組成。另外（m－1）以下的連續m－1個數：（m－1）×n－1、（m－1）×n－2、……、（m－1）×n－（m－1）都可以用m、n組成，但是再小的（m－1）×n－M不能用m、n組成。所以，若（m，n）＝1，則m、n的最大不能爲m×n－m－n。

五、因爲偶數加1＝奇數，只能分解爲奇數×奇數，這兩個奇數因數個別加1之後又都變成偶數，就不能互質。所以任意偶數都無法當做某一組互質數對的最大不能。

六、因爲奇數加1＝偶數，分解之後一定有一組1×偶數，再個別加1之後就一定有一組2×奇數，而（2，奇數）＝1。所以任何奇數都至少可以找到一組互質的數對，使得這個奇數做爲這一組互質數對的最大不能。

七、如果想把較大的數a分成以m、n來組成，（m，n）＝1。若m＜n，則先以較小數m來分類，然後看看a是m分類中的那一類，而且找出這一類中n的倍數最小的數是多少，然後就可以很快的把a分成m和n的倍數和。同樣的，也可以用較大數n來分類，而求出a被m、n組成的另一種方法。

八、若（m，n）＝1，則二元一次方程式m×x＋n×y＝a必須在a＞m×n－m－n時，x和y才會有0以上的整數解；當a×m×n－m－n時，mx＋n×y＝a不一定有0以上的整數解。若（m，n）≠1，則二元一次方程式m×x＋n×y＝a必須在m、n的最大公因數是a的因數時，x和y才可能會有0以上的整數解；至於想計算它的解，就必須先利用等量公理消去m，n的最大公因數之後，才能按照（m，n）＝1的二元一次方程式m×x＋n×y＝a討論。

陸、討論

真高興！原來只是媽媽給我的零用錢，竟然可以學到這麼多的學問。看來在生活中，數學真的是無所不在呢！只是我覺得，某些奇數可以是好幾組互質數對的最大不能，而這些互質的數對，可能找出來的組數有多少？有沒有規則？另外，二元一次方程式之中，x和y的解有何規則？也盼望評審老師能多多指導。

柒、參考資料

一、國民中學數學課本第一冊國立編譯館

二、奇數和偶數漢聲精選世界兒童數學叢書第2冊

三、看圖學數理漢聲精選世界兒童數學叢書第12冊

四、國民小學數學課本第十冊國立編譯館

評語

本作品探討給定二整數的線性組合（係數為非負整數），所能組合出的數之變化。題材適合小學生程度，能使學生了解因數倍數的內涵，亦可學到解不定方程式的問題，作品文字流暢，作者表達能力亦佳。

回到目錄頁../Index.htm