

正方體展開圖的探討

高小組 第一名

縣 市：花蓮縣

校 名：國立花蓮師範學院附設實驗國民小學

作 者：陳彥齊、董昱志、陳賢任

指導教師：潘純芳、林華峰



陳彥齊，民國77年1月19日生，現就讀國立花蓮師範學院附設實驗國民小學六年級，曾擔任副班長、風紀股長及全校模範生，喜好電腦、運動及研究，未來希望能在數理方面能有更深入的研究成果發表。

董昱志，民國76年9月15日生，現就讀國立花蓮師範學院附設實驗國民小學六年級，曾擔任班長、自治市副市長等，喜好電腦、畫畫及閱讀課外讀物，未來希望能進入理想的高中、大學，將來出國深造，學成歸國為社會服務，貢獻綿薄之力。

陳賢任，民國77年3月31日生，現就讀國立花蓮師範學院附設實驗國民小學六年級，曾任服務股長、組長等，喜好數學演算、珠算、自然科學、鋼琴、繪畫等，未來希望能像媽媽一樣，做個受人敬愛的好老師。

關鍵詞：六格骨牌，相對面，全等形，展開圖

壹、研究動機

今年（88年）春假，閒來無聊，順手翻出四下（第八冊）的數學，回想當時在學習第七單元—「長方體與正方體」中；有一種「下列各展開圖中，何者可折回正方體？」的題目；面對這一種題目，老師總是要我們實際操作後，再圈選出來正確的答案。如此一來每一次做一題題目總是會花費了我不少的時間，因此我才想找出更好更快的方法，來解決這一個問題。爲了找出更好更快的方法，我找了幾位志同道合的同學展開了以下一連串的研究，並且隨時請教爸媽和老師。

貳、研究目的

- 1、找出所有六格骨牌的排列方式，並實際操作那些六格骨牌是可以折回正方體的。
- 2、從可以折回正方體的六格骨牌中，找出它們的共通性。

參、研究的問題

- 1、什麼「多格骨牌」呢？又什麼叫作「多格骨牌」的全等形呢？
- 2、二格、三格、四格、五格、六格骨牌各有幾種的排列方式？
- 3、在所有「六格骨牌」的排列方式中，那一些是不可以折回正方體的？
- 4、不能折回正方體的「六格骨牌」中，有那些共同性？
- 5、在正方體的展開圖中，可以是『相對面』的情況有那些呢？
- 6、能不能利用正方體展開圖中「相對面」的關係，來研判「六格骨牌」中，那一些是可以折回正方體的？並且這一種方法所得到的結果與【問題四】的結果是不是相同？
- 7、在能夠折回正方體的所有六格骨牌中，是以那一種應用在剪裁紙張上所消耗的面積會最少呢？也就是1.如果只包裝一個正方體的時候，是使用那一種六格骨，最節省紙張？2.在裁剪大小相同，數量一定的正方體時，又是以使用那一種六格骨牌來裁剪，可以最節省紙張？
- 8、在能折回長方體的所有六格骨牌中，是以那一種應用在剪裁包裝上所耗費的紙張面積爲最少，也就是在剪裁包裝一個長方體時，要如何裁剪才能最節省紙張？爲什麼呢？

肆、研究的過程和方法

問題一

什麼是「多格骨牌」？又什麼叫作「多格骨牌」的全等形呢？

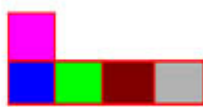
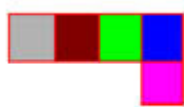
【過程一】：

a.依據美國數學教授——所羅門·葛羅勃創造了多格骨牌這個英文字，它就是指多個同樣大小正方形的邊緣連在一起的骨牌。例如：三格骨牌↓



b.假如一個多格骨牌的圖形經過翻轉之後能與另一個多格骨牌圖形完全疊合，那麼這兩個圖形在數學上被視為相同，也就是多格骨牌的全等形。

例：



問題二

二格、三格、四格、五格、六格骨牌各有幾種排列方式？

【過程一】：利用方格紙實際操作，可以得到：

- a.二格骨牌只有1種排列方式
- b.三格骨牌有2種排列方式
- c.四格骨牌有5種排列方式
- d.五格骨牌有12種排列方式
- e.六格骨牌依「一列最多有幾個」的規則，可產生35種的排列方式

問題三

在「六格骨牌」所有排列方式中，那一些是不可折回正方體的？

【過程一】：因為正方體展開圖一定是一個「六格骨牌」，經過我們利用方格紙，實際操作的結果；得到在「六格骨牌」中，不能折回正方體，有24種

問題四

在不能折回正方體的「六格骨牌」中，它們有那一些共同性？

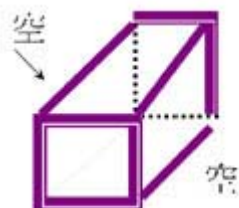
【過程一】：我們觀察【問題三】，將不可以折回正方體的「六格骨牌」加以整理，發現了「六格骨牌」中不能折回正方體的共同性，如下：它可以分為

- a.以『字型』推論知道：
 - (1)「六格骨牌」中有五格成『一』字型；或『L』（橫三豎二或橫二豎三）字型；或『ㄦ』字型；
 - (2)「六格骨牌」中有四格成『田』字型；或成『一』字型且另兩格在同一側；
 - (3)「六格骨牌」中有三格成『一』字型而另三格在同一側；但c-3例外。以上三種，都

不可能拼回正方體。這是因為這些情形都無法使骨牌轉折或者會使骨牌產生兩面重疊；見所附的操作拼盤（附件一）。

b.以『直線型』來研判：

我們將六格骨牌中所有可以折回正方體的圖形集中在一塊，知道所有可以折回方體的「六格骨牌」，除了在一直線上的骨牌外，剩餘的骨牌都應該在直線上的兩側（但c-3例外）。那是因為「六格骨牌」中能折回正方體的，最多可以四格成一直線。而在四格成一直線時，可以得到直線骨牌的折回圖，如下：（上、下兩面是空的）



（可由方格拼盤得知）。因此如果另兩格在同一側或者和四格直線再連成一線（即五格或六格一線），那就必然造成至少會有一面重疊，而無法補齊不足的上下兩面，所以也就沒有辦法折回正方體了。又假如是三格骨牌成一直線時，那麼折回時，就只能完成環繞四面中的三面，所以另外三格要少應具有完成上、下兩面的能力；但是這時候剩下的三格，如果在同一側，那麼仍然還是無法折回正方體的。

問題五

在正方體的展開圖中，可以是『相對面』的情況有那幾種？

【過程一】：在【問題四】中，雖然可以由『字型』、『直線型』發現了一些解決問題的規則，但在每一規則都有例外的情形發生（即c-3）。因此我們再產生了另外一種想法：是不是可以以一個『正方體有八個頂點、十二個邊、六個面（三組相對面）』的觀念，來解決這個問題呢？

首先，我們幾位同學分析了，所有可以折回正方體的展開圖，發現了它們都具有三格骨牌成



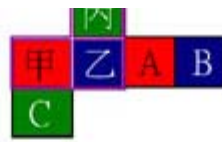
的特色。我們將它們分別定為甲、乙、丙（如上），再利用『相對面』使用同顏色的拼盤來實際操作（如附件二），結果得到可以折回正方體的展開圖中會是『相對面』呈現的情形，有如下四種：（甲→A，乙→B，丙→C）

1、



2、

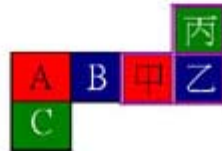




3、



4、

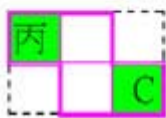
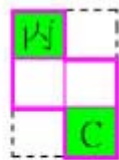


也就是說，如果我們以丙、C這組相對面來看，『相對面』呈對應的狀況，不外乎下列四種情況：

a.在直線中成跳格（中間隔一實格），那麼左、右兩格就為相對面。如： 前圖1



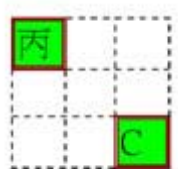
b.在六方格中其中四方格為『Z』字型或『N』字型中的對角格，如：前 圖2



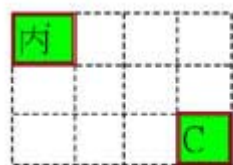
但不可是「L」字型（三橫一豎或一橫三豎）如：



c.正方形九方格中的對角格為相對面，如：圖3



d.長方形十二方格中的對角格是相對面，如：前圖4



問題六

能不能利用正方體展開圖中「相對面」的關係，來研判「六格骨牌」中，那一些是可以折回正方體的？又這一種方法所得到的結果與【問題四】的結果是不是相同？

【過程一】：我們把【問題五】的觀察結果，應用在「六格骨牌」的35種排列上；結果發現它與【問題四】所得到的結果完全相同且較【問題四】的方法來得簡捷。也就是說每一組『相對面』按照【問題五】中的結論，依照a規則填完後，換填b規則；b規則填完後，換填c規則；c規則填完後，換填d規則。如此在填完最後一組（即第三組）仍然符合【問題五】的結論，那麼就表示這種「六格骨牌」一定是可以折回正方體的。

問題七

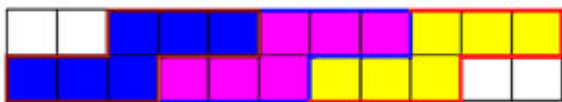
能夠折回正方體的所有六格骨牌中，是以那一種應用在剪裁上所耗費的面積為最少，也就是1.如果只包裝一個正方體的時候，是使用那一種六格骨牌，最節省紙張？2.在裁剪大小相同，數量一定的正方體時，又是以使用那一種六格骨牌來裁剪，可以最節省紙張？（也就是說在長或寬大得可以一次剪裁完成時）

【過程一】：我們把【問題六】所得到的結論應用在紙張的剪裁上；剪裁線就如圖(九)上的虛線，在虛線內所框起來的面積就是要剪裁的大小。

【過程二】：我們研究發現了，在圖(九)的六格骨牌中，除了c-3外，其他可以折回正方體的六格骨牌裡，都須要剪裁12格1平方單位的正方形才可以得到想要折回正方體的六格骨牌，但是c-3只要剪裁10格1平方單位的正方形就可以得到折回正方體的六格骨牌了。所以在包裝紙上要剪裁包裝一個正方體時，是以使用c-3的長5單位寬2單位的裁法，最為節省紙條了。

【過程三】：我們從圖(六)中所有能折回正方體的六格骨牌，兩兩嵌合，可以得到66種變化；而且在這66種嵌合中，除了c-3與c-3的橫向連接嵌合，可以使用到2列，並且在這兩列中，只有最前面和最後面各浪費掉2方格外；其餘的嵌合，不管是橫向連接嵌合、交叉連接嵌合或縱向連接嵌合，不但最少要使用到三列，並且最少也會浪費了6方格(浪費6方格的，如：c-18與c-18作橫向連接)。所以在裁剪大小相同又數量一定的正方體時，是以使用c-3六格骨牌作橫向連接來裁剪，才可以

最節省紙張。如下圖：



問題八

能折回長方體的所有六格骨牌中，以那一種應用在剪裁上所耗費的面積為最少，也就是在剪裁包裝一個長方體時，要如何裁剪最節省紙張？為什麼呢？

【過程一】：我們將能折回長方體的所有六格骨牌加以整理得到了54種的變化，而應用在剪裁上；大致可以分成下面幾類：(其中邊長：甲>乙>丙)

$$(1)(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{乙} + 2 \times \text{丙})$$

$$(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (2 \times \text{甲} + \text{乙})$$

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{乙})$$

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$$

$$(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{乙}) \times (2 \times \text{乙} + \text{丙})$$

$$(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{乙}) \times (2 \times \text{甲} + \text{丙})$$

；等六種情形，將被乘數相同部分歸為一組，比較乘數部分大小；可以得到剩下的三種： $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{乙} + 2 \times \text{丙})$ 與 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 和 $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{乙}) \times (2 \times \text{乙} + \text{丙})$ ；其中 $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{乙}) \times (2 \times \text{乙} + \text{丙})$ 又較 $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{乙} + 2 \times \text{丙})$ 來得大。所以只須比較 $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{乙} + 2 \times \text{丙})$ 與 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的大小就可以了。我們利用分配律展開得到 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) = 2 \times \text{甲} \times \text{乙} + 4 \times \text{乙} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{甲} + 4 \times \text{丙} \times \text{丙}$ ；而 $(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{乙} + 2 \times \text{丙}) = 2 \times \text{甲} \times \text{乙} + 4 \times \text{甲} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{乙} + 4 \times \text{丙} \times \text{丙}$ ；再比較 $(4 \times \text{乙} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{甲})$ 和 $(4 \times \text{甲} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{乙})$ 的大小；利用結合律可以得到 $(4 \times \text{乙} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{甲}) = 2 \times \text{丙} \times (2 \times \text{乙} + \text{甲})$ 及 $(4 \times \text{甲} \times \text{丙} + 2 \times \text{丙} \times \text{乙}) = 2 \times \text{丙} \times (\text{乙} + 2 \times \text{甲})$ ；因為 $(\text{乙} + 2 \times \text{甲}) > (2 \times \text{乙} + \text{甲})$ ，所以此六種情形以 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的面積為最小。

$$(2)(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(2 \times \text{甲} + 2 \times \text{乙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

；等三種情形，其中在被乘數部分以 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙})$ 為最小，而乘數部分都是 $(\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$ ，所以此三種情形以 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$ 的面積為最小。

$$(3)(2 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(\text{甲} + 2 \times \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(\text{甲} + \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

；等三種情形，其中在被乘數部分以 $(甲 + 乙 + 2 \times 丙)$ 為最小，而乘數部分都是 $(甲 + 乙 + 丙)$ ，所以此三種情形以 $(甲 + 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 乙 + 丙)$ 的面積為最小。

$$(4)(2 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (乙 + 2 \times 丙)$$

$$(甲 + 2 \times 乙 + 丙) \times (甲 + 2 \times 丙)$$

$$(甲 + 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 2 \times 乙)$$

$$(甲 + 乙 + 2 \times 丙) \times (2 \times 甲 + 乙)$$

$$(2 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (2 \times 乙 + 丙)$$

$$(甲 + 2 \times 乙 + 丙) \times (2 \times 甲 + 丙)；等六種情形，$$

將被乘數相同部分歸為一組，比較乘數部分大小；可以得到剩下的三種： $(2 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (乙 + 2 \times 丙)$ 與 $(甲 + 2 \times 乙 + 丙) \times (甲 + 2 \times 丙)$ 和 $(甲 + 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 2 \times 乙)$ ；其中 $(2 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (乙 + 2 \times 丙)$ 又較 $(2 \times 甲 + 2 \times 丙) \times (乙 + 2 \times 丙)$ 來得大；而 $(甲 + 2 \times 乙 + 丙) \times (甲 + 2 \times 丙)$ 又較 $(2 \times 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 2 \times 丙)$ 來得大；且 $(甲 + 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 2 \times 乙)$ 也較 $(2 \times 乙 + 2 \times 丙) \times (甲 + 2 \times 乙)$ 來得大；所以在此類型不可能是54種變化中面積最小的。

$$(5)(3 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (乙 + 丙)$$

$$(甲 + 3 \times 乙 + 丙) \times (甲 + 丙)$$

$$(甲 + 乙 + 3 \times 丙) \times (甲 + 乙)；等三種情形，$$

而它們三種乘積中，因為：

$$(3 \times 甲 + 乙 + 丙) \times (乙 + 丙)$$

$$= 3 \times 甲 \times 乙 + 3 \times 甲 \times 丙 + 乙 \times 乙 + 2 \times 乙 \times 丙 + 丙 \times 丙 \cdots \cdots (1)$$

$$\text{而}(甲 + 3 \times 乙 + 丙) \times (甲 + 丙)$$

$$= 3 \times 甲 \times 乙 + 2 \times 甲 \times 丙 + 甲 \times 甲 + 3 \times 乙 \times 丙 + 丙 \times 丙 \cdots \cdots (2)$$

$$(1) \text{式} - (2) \text{式}$$

$$= 甲 \times 丙 + 乙 \times 乙 - 甲 \times 甲 - 乙 \times 丙$$

$$= (甲 \times 丙 - 乙 \times 丙) + (乙 \times 乙 - 甲 \times 甲)$$

$$= 丙 \times (甲 - 乙) + (乙 - 甲) \times (乙 + 甲)$$

$$= 丙 \times (甲 - 乙) - (甲 - 乙) \times (乙 + 甲)$$

$$= (甲 - 乙) \times [丙 - (乙 + 甲)]$$

因為 $甲 > 乙 > 丙 > 0$ 所以 $甲 - 乙 > 0$ ， $丙 - (乙 + 甲) < 0$

因此 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙}) - (\text{甲} + 3 \times \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{丙}) < 0$

也就是 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的乘積比 $(\text{甲} + 3 \times \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{丙})$ 的乘積小。又比照上述的方法，我們得到 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的乘積也比 $(\text{甲} + \text{乙} + 3 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙})$ 的乘積來得小。所以 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的乘積最小

[綜合]

在(1)~(5)中，將每一類型最小的再作比較如下：

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$$

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(\text{甲} + \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$$

$$(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$$

其中 $(\text{甲} + \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$ 較 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$ 大；又 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} + \text{丙})$ 較 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 大。所以只剩下：

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$$

$$(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$$

我們再將上面的兩個式子，做了以下的比較：

$$(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$$

$$= 3 \times \text{甲} \times \text{乙} + 3 \times \text{甲} \times \text{丙} + \text{乙} \times \text{乙} + 2 \times \text{乙} \times \text{丙} + \text{丙} \times \text{丙} \cdots \cdots (1)$$

$$(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$$

$$= 2 \times \text{甲} \times \text{乙} + 2 \times \text{甲} \times \text{丙} + 4 \times \text{乙} \times \text{丙} + 4 \times \text{丙} \times \text{丙} \cdots \cdots (2)$$

$$(1) \text{式} - (2) \text{式}$$

$$= \text{甲} \times \text{乙} + \text{甲} \times \text{丙} + \text{乙} \times \text{乙} - 2 \times \text{乙} \times \text{丙} - 3 \times \text{丙} \times \text{丙}$$

$$= \text{甲} \times \text{乙} + \text{甲} \times \text{丙} + \text{乙} \times \text{乙} - 2 \times \text{乙} \times \text{丙} - 2 \times \text{丙} \times \text{丙} - \text{丙} \times \text{丙}$$

$$= \text{甲} \times (\text{乙} + \text{丙}) - 2 \times \text{丙} (\text{乙} + \text{丙}) + (\text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} - \text{丙})$$

$$= (\text{乙} + \text{丙}) \times [\text{甲} - 2 \times \text{丙} + (\text{乙} - \text{丙})]$$

$$= (\text{乙} + \text{丙}) \times (\text{甲} + \text{乙} - 3 \times \text{丙})$$

因為 $\text{甲} > \text{乙} > \text{丙} > 0$ 所以 $\text{乙} + \text{丙} > 0$ ，又 $(\text{甲} + \text{乙} - 3 \times \text{丙})$ 可以分為下列三種情形：

(1) $\text{甲} + \text{乙} > 3 \times \text{丙}$ ，即 $\text{甲} + \text{乙} - 3 \times \text{丙} > 0$ ；那麼 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的面積 $>$ $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的面積。所以 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的面積比較小。例如：在 $\text{甲} = 4$ ，

乙=3，丙=2時， $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) = 80$ 而 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙}) = 85$

(2)甲+乙=3×丙，即甲+乙-3×丙=0；那麼 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的面積= $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的面積。例如：在甲=5，乙=4，丙=3時， $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) = 154$ ， $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙}) = 154$

(3)甲+乙<3×丙，即甲+乙-3×丙<0；那麼 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的面積< $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$ 的面積。即 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$ 的面積比較小。例如：在甲=6，乙=5，丙=4時， $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) = 252 > (3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙}) = 243$

綜合以上討論，我們得到在包裝紙上要裁剪出一個能包裝長方體 而且要最省面積時，只要計算上面所列的兩個式子，找出結果較小的，再配合實際紙張的情況，選擇出最適合的一種。那麼就真的可以達到「物盡其用」，不浪費資源了。

伍、研究後的心得與結論

(一)「六格骨牌」中可否折回正方體的研判方法有三：

但以「六格骨牌」中的『相對面』論：

在「六格骨牌」中的每組『相對面』的規則是

- a.直線骨牌中成跳格（中間隔一實格）的兩張骨牌
- b.六方格長方形中的對角格且四格成『Z』字或『N』字的兩張骨牌
- c.九方格正方形中是對角格的兩張骨牌
- d.十二方格長方形中是對角格的兩張骨牌

在判別是不是可以折回正方體的時候，只要依照a規則填完後，換填b規則；b規則填完後，換填c規則；c規則填完後，換填d規則。如果在填完最後一組（即第三組）仍符合a、b、c、d的規則，那麼就表示這種「六格骨牌」一定可以折回正方體。

(二)在包裝紙上剪裁包裝一個正方體時，是以c---3的長5單位寬2單位的裁法，最為節省（註：正方體的邊長為一單位）。又在裁剪大小相同且數量固定的正方體時，是以使用c---3六格骨牌作橫向連接來裁剪，才可以最節省紙張。

(三)在包裝紙上要裁剪出一個能包裝長方體而且最節省紙張面積時，那麼只要計算出下面所列的四個式子，再比較它們的大小，就可以找出最省紙張的方法了。

計算式子如下：(甲>乙>丙)

(1)、 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙})$

(2)、 $(3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$

當(a)甲+乙>3×丙

那麼 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) < (3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$

當(b)甲+乙=3×丙

那麼 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) = (3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$

當(c) $\text{甲} + \text{乙} < 3 \times \text{丙}$

那麼 $(2 \times \text{乙} + 2 \times \text{丙}) \times (\text{甲} + 2 \times \text{丙}) > (3 \times \text{甲} + \text{乙} + \text{丙}) \times (\text{乙} + \text{丙})$

陸、參考資料

- 1、國立編譯館主編（87年），國小數學第八冊
- 2、「遠哲出版社會科學教育基金會」編譯（民87）—CatherineSheldvick著「快樂學習正方形」（初版）第42頁
- 3、「前程出版社」（86年第五版第8、9頁），萬國興編著，「趣味數學實驗」
- 4、「前程出版社」（88年再版），王登傳編著，「數學遊戲大觀(第三集)」～七、多元方格遊戲P147～150
- 5、「國立編譯館主編」（84年8月），「國民中學數學教科書第一、四冊」

評語

作者從所有可能的 6 格骨牌，理出可以決定可為正方體展開圖的一套有效程序，以相對面的決定為軸。

接著探討那種展開圖可以在裁剪時比較經濟材料，並順便探討長方體展開圖的情形，具有環保的意識。討論完整，書面和面談的表達清楚。

[回到目錄頁../Index.htm](#)