

# 凌波微步 - 電磁波干涉現象的電腦模擬實驗

高中組 第三名

縣市：新竹市

校名：新竹高中

作者：蔡松芳

指導教師：謝迺岳



蔡松芳，十八歲，新竹人，畢業於新竹國小、建華國中，目前就讀於新竹高中數理資優班二年級，水瓶座，喜好電腦與自然科學，87年獲甄選參加清大物理系「高中生理化資優輔導實驗計劃」，將來希望從事自然科學研究。

## 一、研究動機

物理學上，在處理眾多波動現象時(特別像是電磁波干涉繞射)，目前大多是用Huygen's 理論來解釋波前的內涵意義與各種干涉現象，而這個理論的方法是在波前上放上很多個點波源來解釋。這裡牽涉到一個困難→極限。現有理論是以數學上積分的方法把結果導出來。但是，對於某些可能遇到的實際狀況遠比理想中的複雜許多，精密理論推導的過程往往變的繁複與困難，所付出的心力是事倍功半；因此我希望能透過電腦快速計算及強大的繪圖能力，來探討與比較物理學上電磁波干涉繞射的種種現象，以彌補實驗室不易實驗的遺憾。

## 二、研究目的

利用電腦快速計算，將各種型態的光源(繞射孔)切割成眾多點波源(wavelet)，分別計算其到某距離外的屏上時所造成的電場相位與強度，然後對屏上各點統計來自各個點波源的電場，合成並計算其照度及強度分布，最後依計算所得之數值繪製成圖，觀察比較各種光源繞射之波形及圖樣，在免除實驗不易的困擾下，加以探討電磁波的種種干涉現象。

## 三、原理

(一)Huygen's Principles：在同一波前上的每一點都各自是一個新波源。

(二)光是電磁波，具有偏振性，以電場來討論，可分為兩方向(X、Y)的分量，

若任一方向分向量為0或相位差為 $0^\circ$ 或 $180^\circ$ ，則為線偏振光；若振幅相等且相位差為 $90^\circ$ 或 $270^\circ$ 則是圓偏振；振幅、相位均不相等則是橢圓偏振。對於光在螢幕上干涉與繞射圖樣，可以對於螢幕上每一點電場的向量和來分析(如圖1)。(雖然光波理論應是正(餘)弦波，但由於變動極快，肉眼無法分辨，討論時應以積分計算其能量之平均值，而其結果與振幅(E)平方成正比，故可以以向量和討論，其和之長度正是振幅)

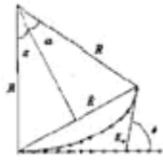
(三)分析時，假設光源為單色(如常用之He-Ne雷射 波長632.8nm)且波前平行於繞射孔道。若把電場以自然對數 e 來表示，則 $E=e^{i\omega t}$ ，其絕對值即為振幅。對單狹縫而言，則螢幕上的電場可寫成下列之關係：

$$E(\theta) = \frac{1}{a} \int_0^a e^{i \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \theta} dx = \frac{e^{i \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta} - 1}{i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}} = \frac{e^{i\beta} - 1}{i\beta}$$
$$\text{照度 } I = I_0 (|E|)^2 = E \cdot \bar{E} = \frac{1}{4a^2 \beta^2} ((\cos 2\beta - 1)^2 + (\sin 2\beta)^2)$$
$$= \frac{\sin^2 \beta}{a^2 \beta^2} \propto \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}, \text{ 其中 } \beta = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta, a \text{ 是狹縫寬, } \lambda \text{ 是波長,}$$

$\theta$  是屏幕上某一點與光源之連線與中心線之夾角。

則屏幕上照度分布如圖(2)：

而雙狹縫干涉可視為二單狹縫繞射相堆疊的結果，由干涉效應及繞射效應可得屏幕上照度分布如圖(3)：



圖(1)



圖(2)



圖(3)

(四)對於方形孔繞射方面，我們可以把它視為兩單狹縫繞射垂直疊加的效果。故寬度為 $a$ ，長度為 $b$ 的方形孔繞射圖案強度

$$I(x,y) = I_{\max} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \left( \because \text{單狹縫之} I \propto \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta_x, \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta_y$$

$x,y$ 代表距中央亮點兩垂直方向的長度。故可在屏幕上觀察到『紅十字形』(用He-Ne雷射時)(請參考 六、實驗結果 圖四一)。

#### 四、研究設備器材

(一)個人電腦(主要為Intel Pentium III)

(二)Microsoft Visual Basic v5.0

(三)Borland C++ Builder v3.0

(四)彩色繪圖機

#### 五、研究方法

(一)模擬電磁波繞射的部分

- 1.利用Borland C++ Builder v3.0等撰寫軟體作為模擬工具。
- 2.在同一波前上放置許許多多的小光源(Wavelet)。
- 3.以螢幕作為屏幕，在螢幕上各點利用向量和計算其電場 $E$ 之總和及振幅。
- 4.利用照度 $I$ 正比於電場振幅 $E$ 平方的關係可算出各點之 $I$ 值。
- 5.以電腦中之RGB三原色亮度值來表示照度 $I$ ，在電腦螢幕或繪圖機等輸出設備畫出該圖之干涉圖樣。製作方法是以軟體把螢幕上各個圖素(pixels)映對到屏幕的上的各個格子點，然後將各個格子點的 $I$ 值算出；換句話說，其方法是把屏幕分成一格一格的，取其各格中央之點作為此格的代表。
- 6.模擬一波形顯示器，可將屏幕中任何一條直線上照度分布曲線描繪出來。

(二)本研究的模擬實驗範圍：

- 1.繞射孔的條件：使用者可在模擬實驗時作任何必要的改變包括：
  - (1)繞射孔的形狀：方形、圓形、三角形、六邊形、或各種形狀的繞射孔。
  - (2)wavelet的點數或密度：可依實際實驗需要隨時調整。
- 2.繞射孔至屏幕的距離亦可任意調整(在電腦數值分析系統能負荷的前提下)，操作上只需更改一下數字。
- 3.繞射孔與屏幕可做任意角度之旋轉。
- 4.電場強度、屏幕、波形之顯示範圍可依實際需要作調整，結果也可以隨時儲存，提供觀察與比較。

(三)另外，為求精確，由於各小光源間對於屏幕上各點的角度關係不是平面的，所以對於電場在各方向的分量需以向量旋轉的方式來處理。

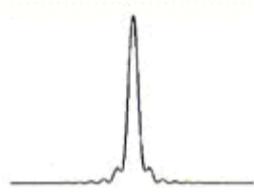
(圖十八)縫徑為10，波長為0縫寬0.25WO電場強度：EO

## 六、研究結果

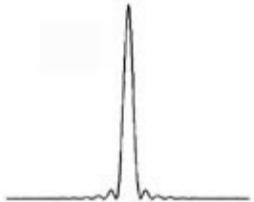
(一)以下是單狹之模擬圖縫徑：0.016cm模擬點數：400波長632.8nm

橫軸為屏上取樣點與中心點之距離，以中央為原點(0)

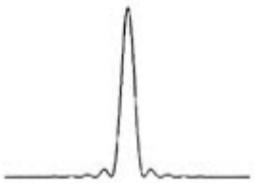
縱軸代表照度大小I



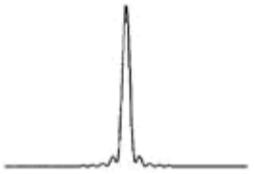
(圖一)遠距繞射模擬範圍： $\pm 10\text{cm}$  距離：250cm



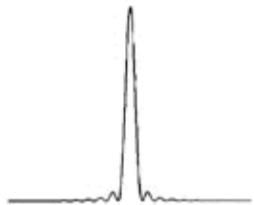
(圖一·理論圖)本圖為依照理論繪製之同條件強度圖條件與左圖完全一樣，作為比較之用



(圖二)遠距繞射極限範圍： $\pm 3\text{cm}$  距離：10cm



(圖三)範圍： $\pm 2\text{cm}$  距離：4cm



圖四)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離：2.5cm



(圖五)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離：1cm



(圖六)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離：0.95cm



(圖七)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離：0.9cm



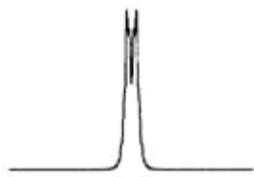
(圖八)範圍： $\pm 0.1\text{cm}$  距離： $0.85\text{cm}$



(圖九)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.8\text{cm}$



(圖十)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.7\text{cm}$



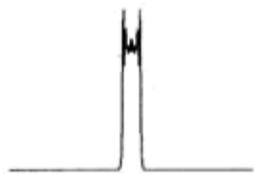
(圖十一)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.5\text{cm}$



(圖十二)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.4\text{cm}$



(圖十三)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.25\text{cm}$



(圖十四)範圍： $\pm 1\text{cm}$  距離： $0.025\text{cm}$



(圖十五)明顯的Fresnel繞射範圍： $\pm 0.1\text{cm}$  距離： $0.0025\text{cm}$

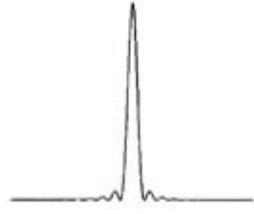
(二)以下單狹縫改變縫寬、電場強度、波長所產生的波形比較

橫軸為屏上取樣點中心點之距離，以中央為原點(O)

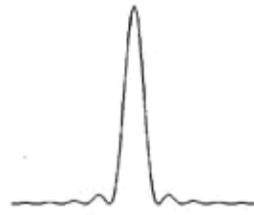
縱軸代表照度大小I

範圍： $\pm 10\text{cm}$  距離： $250\text{cm}$ ，令 $I_0=0.016\text{cm}$ ， $\sigma=632.8$ ， $W_0=0.016\text{cm}$

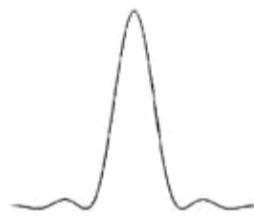
模擬點數：400點



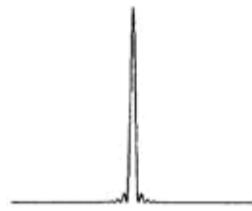
(圖十六)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $W_0$  電場強度：設為 $E_0$



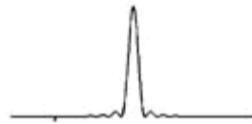
(圖十七)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $0.5W_0$ 電場強度： $E_0$



(圖十八)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $0.5W_0$ 電場強度： $E_0$



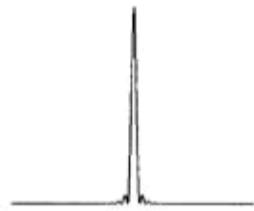
(圖十九)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $2W_0$  電場強度： $E_0$



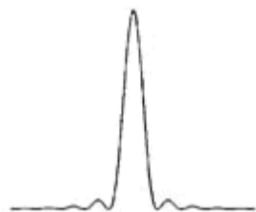
(圖二十)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $W_0$  電場強度： $0.75E_0$



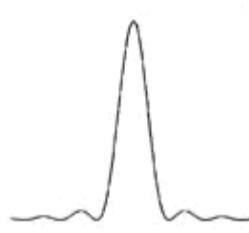
(圖二一)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $\lambda_0$ 縫寬 $W_0$  電場強度： $0.5E_0$



(圖二二)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $0.5\lambda_0$ 縫寬 $W_0$  電場強度： $E_0$



(圖二三)縫徑為 $I_0$ ，波長為 $2\lambda_0$ 縫寬 $W_0$  電場強度： $E_0$



(圖二四) 縫徑為  $10\lambda$ ，波長為  $3\lambda$ ，縫寬  $W_0$  電場強度： $E_0$

(三) 以下是多個狹縫互相干涉的波形圖

橫軸為屏上取樣點中心點之距離，以中央為原點(O)

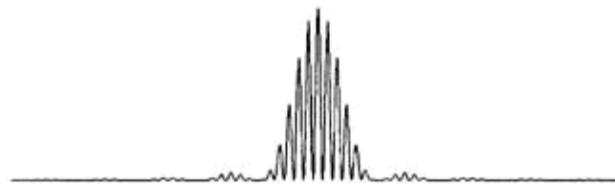
縱軸代表照度大小  $I$

範圍： $\pm 5\text{cm}$  狹縫間距： $0.1\text{cm}$  各狹縫寬： $0.016\text{cm}$

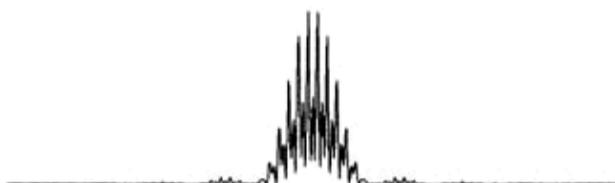
波長  $632.8\text{nm}$  距離： $250\text{cm}$  模擬點數： $200$ 點



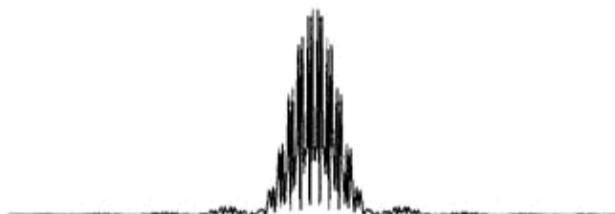
(圖二五) 左圖為狹縫數為： $1$



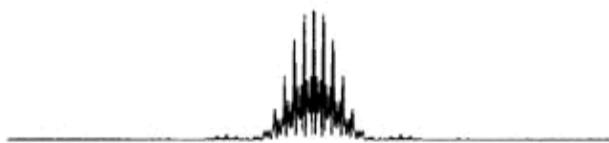
(圖二六) 左圖為狹縫數為： $2$



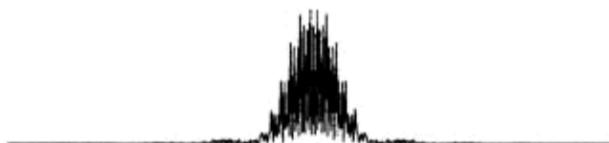
(圖二七) 左圖為狹縫數為： $3$



(圖二八) 左圖為狹縫數為： $4$



(圖二九) 左圖為狹縫數為： $5$



(圖三十) 左圖為狹縫數為： $6$



(圖三一) 左圖為狹縫數為： $7$

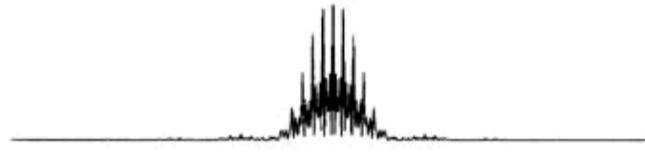
(四) 以下是五狹改變其間距與縫寬產生的波形比較

橫軸為屏上取樣點中心點之距離，以中央為原點(O)

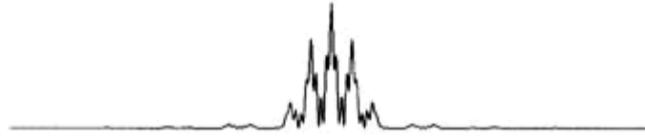
縱軸代表照度大小  $I$

範圍： $\pm 5\text{cm}$  波長  $632.8\text{nm}$  距離： $250\text{cm}$  模擬點數： $200$ 點

設 $d=0.1\text{cm}$   $w=0.016\text{cm}$



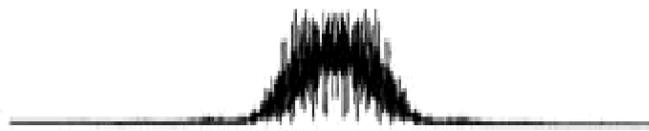
(圖三二) 狹縫間距： $d$ 縫寬： $w$



(圖三三) 狹縫間距： $0.5d$ 縫寬： $w$



圖三四)狹縫間距： $2d$ 縫寬： $w$



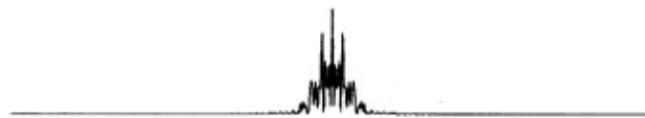
(圖三五) 狹縫間距： $3d$ 縫寬： $w$



(圖三六)狹縫間距： $d$ 縫寬： $0.25w$



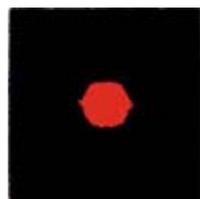
(圖三七) 狹縫間距： $d$ 縫寬： $0.5w$



(圖三八) 狹縫間距： $d$ 縫寬： $2w$

(五)以下是繞射孔各種形狀繞射圖樣之模擬圖

波長 $632.8\text{nm}$  距離： $250\text{cm}$ ，中央為螢幕正中心

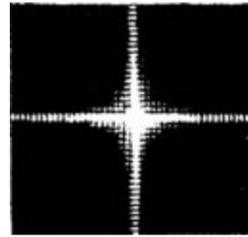
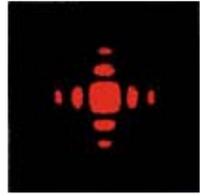


(圖三九)三角形孔的繞射圖樣之一繞射孔形狀：正三角形(如右之黑色部分)

大小： $0.016\text{cm} \times 0.016\text{cm}$ (外框) 取點數： $48\text{pts} \times 48\text{pts}$ (外框) 螢幕範圍： $10\text{cm} \times 10\text{cm}$

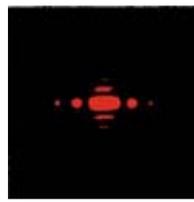


(圖四十)三角形孔的繞射圖樣之二繞射孔形狀：等腰直角三角形(如右之黑色部分)

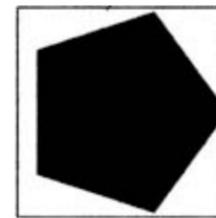


左圖為經過實驗出來的方形繞射孔參考圖。(可作為腦模擬的參考比較)

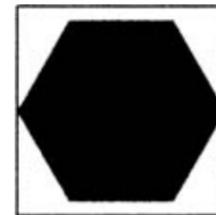
(圖四一)正方形孔繞射孔形狀：正方形大小：0.016cm × 0.016cm 取點數：50pts × 50pts  
螢幕範圍：10cm × 10cm



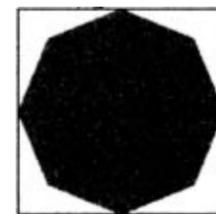
(圖四二)長方形孔的繞射圖樣繞射孔形狀：長方形大小：0.016cm × 0.032cm點數：50pts × 100pts  
螢幕範圍：10cm × 10cm



(圖四三)正五邊形孔的繞射圖樣繞射孔形狀：正五邊形(如右之黑色部分)  
大小：0.016cm × 0.016cm(外框)取點數：48pts × 48pts(外框)  
螢幕範圍：10cm × 10cm左圖為經過實驗出來的方形繞射孔參考圖。  
(可作為電腦模擬的參考比較)



(圖四四)正六邊形孔的繞射圖樣 繞射孔形狀：正六邊形(如右之黑色部分)  
大小：0.016cm × 0.016cm(外框) 取點數：48pts × 48pts(外框) 螢幕範圍：10cm × 10cm



(圖四五)正八邊形孔繞射孔形狀：正八邊形(如右之黑色部分)

大小：



(圖四六)圓形孔的繞射圖樣 繞射孔形狀：圓形半徑：0.016cm  
取點數：48pts × 48pts(直徑) 螢幕範圍：10cm × 10cm

## 七、討論

### (一) 單狹縫距離改變之照度分布變化

1. Fresnel diffraction(近距)的過程，兩側的暗紋處逐漸升高，吞沒中央亮紋，然後形成兩側高聳尖銳的盆狀圖形。
2. 在屏與狹縫距離1cm附近變化極快，0.7cm以內幾乎都是Fresnel繞射了（兩側明顯可見類似刀鋒狀的強度分布），10cm以上則是常見之Fraunhofer繞射，10~1cm時是夾在兩者之間中距繞射。
3. 本模擬實驗因模擬系統的能力限制，距離最長限制約在 $2.5 \times 10^9$  cm，最短則限制約在 $10^{-5}$  cm左右，再下去圖形誤差會漸漸擴大，因為主要考慮到電腦數值系統的分析能力，在某些極小數值運算時會產生捨入(Round-in)誤差，以及在極大值時會產生溢位(Over-flow)錯誤等等所致。

### (二) 單狹縫改變縫寬、電場強度、波長部分

1. 對模擬軟體所實驗出來的結果，可以很自然的發現：

(1) 亮帶寬  $\propto \frac{1}{\text{縫寬}}$

(2) 亮帶照度之最大值  $\propto \frac{1}{\text{電場強度}^2}$

(3) 亮帶寬  $\propto \text{波長}$

以上模擬實驗結果與實際理論完全相符

### (三) 多狹縫干涉

1. 由狹縫數為1~7之多狹縫干涉圖可明顯的看出它們波形的包跡（趨勢）是相同的，並且與單狹縫之波形符合，也就是說多狹縫之波形為多個單狹縫之波形的疊合。
2. 在雙狹縫干涉中每一個起伏都很完整，頂端必碰到包跡，往下必到0。狹縫數在三以上，就可觀察到其漸漸地產生一些變化。三狹縫是2個強亮紋中間夾1個弱亮紋。四狹縫亮紋似乎是成雙的出現。五狹縫則是「1弱+1強+1弱」的亮紋為一組。六狹縫看起來是三個幾近同強度的亮紋為一個單元。七狹縫干涉則是「強、次強、極弱」之亮紋組合而成。

### (四) 在五狹縫干涉中改變其間距與縫寬

1. 大致上可看出

(1) 亮紋密度  $\propto \text{狹縫間距}$

(2) 縫寬  $\propto \frac{1}{\text{亮紋可見範圍}}$

### (五) 繞射圖樣部分

1. 根據電腦模擬實驗出來的圖，可以看出大致上是孔越窄則繞射與干涉的現象越明顯，方形孔的圖可以看出其水平與垂直兩方向單狹縫疊合的作用，與實驗室的實驗圖樣非常相似。
2. 繞射孔的形狀之探討：
  - (1) 正三角形孔：往六個方向散射，方向平行正三角形的三條中垂線。
  - (2) 等腰三角形孔：往六個方向散射，方向平行二股與斜邊上的中垂線。
  - (3) 正方形孔：呈『紅十字形』，在中央處附近可看出有比較暗之小正方形出現。

(4)長方形孔：也呈『紅十字形』，構成元素是長方形為主。

(5)正五、正六、正八邊形孔：效果已漸漸與圓近似

(6)圓孔：圖樣明顯是由同心圓圈環所組成的。

3.由於電腦紅色的色階只有 $2^8=256$ 種，並且顏色值與亮度是否恰成正比也是未知數，因而繪出來的圖有時候會太暗，原本實驗上應該看到的在電腦上會因為顏色太暗而看不到，解決之道，就是把它振幅調大，但是中央部分與旁邊區隔會較不明顯。不過模擬之繞射圖樣形態大致是正確的，並無太大的差異。

4.在模擬繪製繞射圖時是以中央一點之照度代表整格之照度，如果在此格中I值變化太大，則取該格中央之點可能與實際上該格的平均值會有差距，這時模擬屏幕需取適當的解析度以為改善，也就是將格子縮小一點。

## 八、結論

(一)本模擬軟體的Compiler以Borland C++ Builder v3.0為主，程式平台是Intel-Based，若有必要，只要稍為修改軟體的Input/Output部分，即可在功能更強大的大型電腦上模擬實驗，其實驗效果將會更好。

(二)本模擬實驗對於單狹縫Fraunhofer繞射與Fresnel繞射、多狹縫干涉、各種任意形狀的繞射孔、在 $10^7\sim 10^{-7}$ m範圍之內的距離變化及屏幕與繞射孔以垂直和水平為兩軸作任意角度的旋轉.....等等的所有現象，皆能正確無誤的處理與表現出來，對於物理學上探討電磁波的干涉現象有莫大的助益。

(三)如前面所提，對於不規則(特殊的形狀)或複雜的繞射孔，理論上不易討論，實際實驗也不易，但是利用本模擬實驗，我們便可以逸待勞，把繞射孔的形狀以圖形檔(bmp)方式輸入實驗軟體中，實驗條件設定好後讓軟體去跑，便可輕輕鬆鬆的啜飲著一杯熱咖啡，翻翻報紙，然後就可看到完整的實驗結果，綜合各種結果加以比較觀察，印證物理學上的理論，不難瞭解複雜的各種電磁波繞射干涉現象，進而應用於實際的電磁波研究上，這也是本項研究的最終目的。

## 九、應用與展望

(一)透過電腦模擬實驗，我們可以將某些光波繞射行為讓軟體實驗去做，既迅速又正確，也可避免人為誤差；更不用為每一種形狀的光源都得去導一個理論、製造一種繞射孔來作實驗，甚至可以避免某些儀器製作完後才發現繞射影響過於嚴重而作廢，而這些優點只需點一下滑鼠就輕鬆入手，比7-11便利商店還方便，有助於教學與實驗。

(二)本研究實驗距離範圍暫訂在 $10^7\sim 10^{-7}$ m若要應用到更大的範圍如天文或原子領域則可去較大型的電腦上跑，以提昇其範圍限制。另外在原子領域時尚需考慮光的量子性，這也是本實驗的後續研究方向。

## 十、參考資料或其他：

### 參考資料

- 1.高級中學物理第三冊，國立編譯館，民84年
- 2.大學物理學第一冊、第四冊，李怡嚴編著，東華書局，民82年
- 3.二〇〇〇年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊選訓教材第二冊物理奧林匹亞國家代表隊選訓工作委員會，民88年
- 4.[高中理化資優學生輔導實驗計劃](物理組)上課講義及實驗講義，清華大學物理系，民88年

## 評語

本作品利用電腦精密計算有限面積之各種形狀及大小光源所發射光束所產生的繞射與干涉現象，求取其強度並與實驗結果比較，吻合程度很好，對於光干涉現象之印証有良好效果。且對不同色光產生之干涉條紋位置可精確定位，而可以在預定位置產生混合色光，亦具有應用潛力。

[回到目錄頁../Index.htm](#)