# 混合式進位及其應用

## 國中組應用科學科第三名

臺北市立誠正國民中學　　作　　者：陳天任
指導教師：徐則林

## 一、研究動機

有一天我想寫一個會讓電腦玩猜數字的遊戲，就是出四位數字（更多更少位也行），每個位的數字互不相同，然後由玩者（可以是人或電腦）猜數字，由出題者告訴玩者幾個數正確，及幾個數有在四位數內，卻位置不對。

## 二、研究目的

在最初的電腦猜測程式中是用四個迴圈在計算，還要檢查是否有重複的數字，這樣就多了　許多檢查的步驟，而拖累執行的速度。並大大的減少程式的活性，所以，我打算在程式中用第X組排列的四位數來代表那個四位數，做出一對一的編碼，這樣子的話在設計迴圈時較簡單，並且活性也較強，現在的程式也可以玩五個數字、六個數字但原本的並不行，這就是活性的差異所在。

如：0123即第一種排列　　S=1
　　0124即第二種排列　　X=2
　　……………
　　0132即第八種排列　　X=8

但是當數字很大時就不是這樣數一數就可以了。這樣直接的轉換怎麼簡單做到呢？像是5392是第幾種排列？或是第兩千種排列是？

前面所講的原始程式並不會比較笨，猜比較多次，而是它的迴圈會跑到像是1111這樣的數字，所以要多一道檢查手續來檢查是否有重複的數字，這樣就會浪費很多時間，我希望有更好的程式，所以才會研發新方法。

如果讓原先的程式和改進的程式比較，你就會發覺新方法好多了：同樣只猜一次，但是舊方法還要跑到好幾個迴圈。

同時新的程式換成猜五個、六個甚至十個數字都可以，舊的卻需要大量修改程式。而且在數字越多時新的程式比舊的程式快越多，因為數字越多舊的程式檢

查步驟就得執行越多次，相較起來新的程式轉換步驟的執行次數卻沒有增加很快。兩個程式在數字可重複的狀況下都只需稍微修改便可正常執行。

在由第X種排列與數字X之間的轉換，並沒有想像中那麼容易，讀者可以用讀者自己的方法來試試看。在第X種排列與數字X之間的轉換我發現用混合式進位是最方便不過的了，如果不用混合式進位做一對一的編碼就會是很辛苦的一件事。

有了在猜數字上很成功的應用，我認爲混合式進位法對於一般排列組合問題應亦可以應用上（其實猜數字遊戲中就是用到排列組合），所以我又做了電腦上撥鼠湊解及求出所有正因數的應用，證明混合式進位法的可取之處。另外理論上混合式進位法在資料壓縮上也有運用的可能性。

## 三、研究原理

所謂混合式進位就是每個位不一定有相同的底。

一般常看到的進位法有十進位、十六進位、二進位、八進位………各種進位法都有自己專門的用途，像是十六進位和二進位就常用於電子計算機。

我們現在來看看混合式進位換算成十進位的例子吧！

底：49536

數：14213

混合式進位的換算方法也和基本式進位一樣，第一個位就是其數值本身的值，第二位因爲第一位要滿六才能進第二位，所以第二位應是1乘以6，第三位因爲第二位要滿3才進第三位，而每1的第二位又要第六個第一位，換句話說就是第三位要18個第一位才會進1！所以，第三位轉十進位應是2乘以18（3乘6），所以第四第五位也一樣，所以十進位應是：

(1x9x5x3x6)+(4x5x3x6)+(2x3x6)+(1x6)+(3)=1215

第5位　　第4位　　第3位　　第2 第1位

時、分、秒就是日常生活中混合式進位的例子，舉例來說三天又五小時三十七分四十秒是幾秒？

(3*24*60*60)+(5*60*60)+(37*60)+40=279460秒

混合式進位除了時分秒的換算，是否還有別的用途呢？

## 四、研究結果

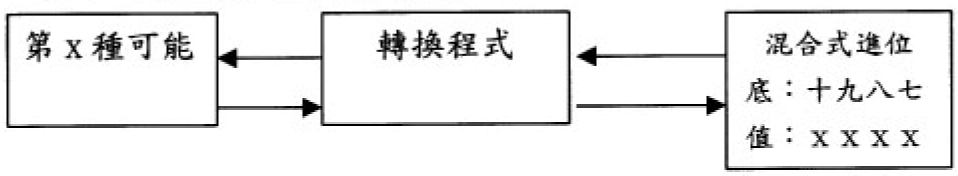
在前面已說過第X組排列轉爲不重複的數字的重要性，現在已經介紹過混合

式進位了，但是我們還沒有說明混合式進位和找第X組排列有什麼關係，所以我們利用猜數字遊戲來說明它們之間的轉換關係。並將這個方法應用在土撥鼠遊戲求解及求解正因數的題目上。

（一）電腦猜數字遊戲：（Master Mind）

轉換原理：我們用到混合式進位法是因為它可以每個各有一個底，而轉換為什麼會用到多底呢？因為每個數都要不重複！第一個位有零到九，十個數字可以用，這點應該沒問題，第二位有幾個數字可以用呢？只有九個！因為第一位已經用掉了一個數字，而每個數字不能重複。同理，第三、四位也不能用先前已用的數字，分別可用八和七個數字而已。所以在猜不重複的四個數字時在混合式進位中應以十九八七為底，五個數字時底就應是十九八七六。

所以，本程式中需要的轉換方法是：




我將程式碼分為A部分和B部分，這兩部分各有其用途，圖中的轉換程式就是A部分！

A的用途就是將X（十進位）轉成混合式進位，假設我讓這段程式算出第十種組合（程式中是第九種），當A處理完後是：0012

以混合式進位的方式存在！讓我們驗算看看！

0*9*8*7=1*7+2=0+0+7+2=9

咦？不應該是十嗎？九是沒有錯的，因為：在程式中第一種組合算是第零種！

當輪到B部分處理時又會對0012做一次處理，B的任務則是要找出來對應於混合式進位法的數字組合：第四位是零，所以代表在不重複數中的第一位是還沒用過的數字中的第一個，也就是0；第三位也是零，就代表在不重複數中的第二位是還沒用過的數字中的第一個，因為0已用過，所以第二位是1；第二位是1代表這一位是尚未用過的數字中的第二個，也就是3，第一位是2，就是未使用的數中的第三個，013已用過，所以我們數數看第三個未使用的數是幾：2～4～5！就是5！這樣就找到了對應的組合！

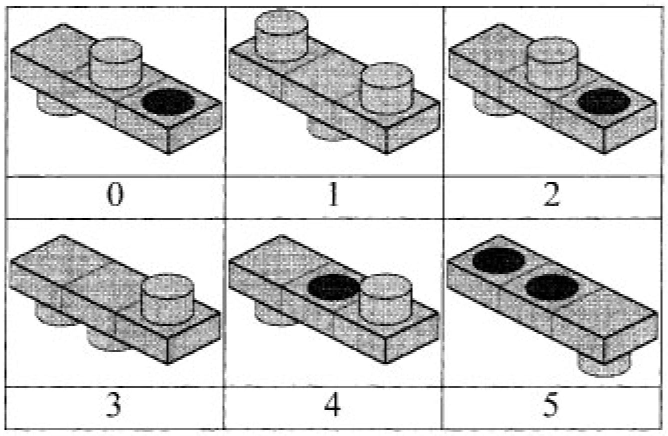
第十種（混合式進位第0012種）組合就是0135！

也就是混合式進位是第X種組合的數字與X之間最好的橋樑，因為他和不重複

數組合有直接意義上的關鍵，又和十進位很好轉換。

（二）土撥鼠遊戲湊解：

土撥鼠遊戲是一個在手上玩的小玩具，由BINARY ART S[R]製 造。現在我們有兩塊3X3的板子，各有挖九個洞在其上，每行三個，每列三個。我們現在要把下圖中六片有突出（土撥鼠頭）或洞的1X3板子夾在兩塊3X3的板子中間（可以旋、翻轉，但不能突出），形成一塊3X3X4的六面體。我的目的就是讓電腦來湊解。




問題：

我們發現以下問題會產生結構相同的情形，影響湊解速度，並會產生過多結構相同的解，需要避免。

1.編號爲0的那一塊與編號爲2的那一塊型狀完全相同。

2.編號爲1的那一塊旋一旋轉並無差別。

3.編號爲4的那一塊旋、翻轉中只需考慮一種情形。

4.對稱問題，對稱問題分爲上下、左右、前後對稱，上下對稱就是：上爲第012塊，下爲第345塊與上爲第345塊，下爲第012塊的狀況應視爲相同的組合。左右對稱是：下（上）排爲012與爲2100的狀況應視爲相同。而前後對稱是三塊皆有旋轉與三塊皆無旋轉應算是相同組合，原本決定三塊是否旋轉的組合方式有8種，現只剩下下列四種：（○旋轉　X不旋轉）

XXX（○○○），○XX（X○○）

○○X（XX○），X○X（○X○）

問題解決：

1.編號爲0在那一塊與編號爲2的那一塊型狀完全相同。只要考慮第0塊順序在第2塊前面的就可以了。

2.編號爲1的那一塊旋不旋轉並無差別。我們跳過第1塊旋轉的狀況即可。

3.編號爲4的那一塊旋、翻轉中只需考慮一種情形。我們只需考慮其旋轉的情形即可。

4.上下對稱的解決方法和上一頁列出所有旋轉可能的方法一樣，我們暫時不考慮順序，先選出三塊在下面的那一排，剩下三塊必然會在上面那一排，如我們選出0,0,2在下面，3,4,5必定會在上面，和選出3,4,5在下面，0,1,2在上面是一樣的，所以我們只需考慮以下十種情形：0,1,2(3,4,5)；0,1,3(2,4,5)；0,1,4(2,3,5)；0,1,5(2,3,4)；0,2,3(1,4,5)；0,2,4(1,3,5)；0,2,5(1,3,4)；0,3,4(1,2,5)；0,3,5(1,2,4)；0,4,5(1,2,3)。

5.消除左右對稱於下面那三塊選好時，我們要考慮它們的順序是0,1,2或2,1,0或1,0,2或2,1,1或1,2,0或0,2,1但這六種組合中，有左右對稱的，如1,2及2,1,0，扣除對稱的，只剩下三組：1,0,2(2,0,1)；0,1,2(2,1,0)；0,2,1(1,2,0)。

6.消除前後對稱我們與(4.5.)用一樣的方法，只考慮：

XXX（○○○）；○XX（X○○）；○○X（XX○）；X○X（○X○）

（○旋轉　X不旋轉　即可消除）

其他人腦代替電腦分析的部分：

上下兩排一定垂直，因如平行第1,3塊一定要跟第5塊在同一排，所以1,3塊會衝突。

使用混合式進位的地方：

在程式設計的時候，爲了達到以上要求，如果不用混合式進位對各種可能做一對一的編碼，將會使迴圈變得很複雜，可讀性降低，所以我們會用到混合式進位，因爲這樣迴圈必須多底，不然無法達到以上目的。

| 程式中決定下面三塊旋轉、翻轉、順序的迴圈的底 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 底 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 用途 | 順序 | 翻轉 3 | 翻轉 2 | 翻轉 1 | 旋轉 2 | 旋轉 1 |

如果我們用A代表第一塊；B第二塊；C第三塊向前向後；+正面；—反面

迴圈跑到0時就是(B↑+)(A↑+)(C↑+)

迴圈跑到5時就是(B↓+)(A↑+)(C↑+)

迴圈跑到95（最後一組）時就是(A↓−)(C↓−)(B↓−)

我們在先前有十組下排三塊的抽法，只要將三塊帶入A,B,C，就可以工作。

結果：

用附錄一的程式我花了十五分鐘，湊出兩組不重複解，計算了$10\times3\times8\times4\times6\times8\times8\div8=46080$種排列

但是，沒有經過分析的程式花了近兩個小時，湊出一百多組大多重複解，計算了$6\times5\times4\times3\times2\times2\times2^{12}=5898240$種排列

（三）用於求正因數：

我在做數學題目時，看到有一題，算出一個數的所有正因數，常會漏掉一些解答，我就想：難道除了一二三四慢慢的試驗難道沒有別的方法嗎？我就想到我在做的科展，也的確可以利用混合式進位來算，我們用3684來試試看。首先我們先求出標準分解式：

$2_2\times3\times307=3684$

於是我們得到一組混合式進位的底：322前面的第一個三是代表。

說這組正因數中可以有零個一個或兩個二相乘，是從上面分解出的質因數得來的，兩個二則代表三與三百零七都只可以有零個或一個三或三百零七相乘。然後我們可以知道總共有12個正因數：

| | |
|---|---|
| 000 | $2^0\times3^0\times307^0=1$ |
| 001 | $2^0\times3^0\times307^1=307$ |
| 010 | $2^0\times3^0\times307^0=3$ |
| 011 | $2^0\times3^0\times307^1=921$ |
| 100 | $2^1\times3^0\times307^0=2$ |
| 101 | $2^1\times3^0\times307^1=614$ |
| 110 | $2^1\times3^1\times307^0=6$ |
| 111 | $2^1\times3^1\times307^1=1842$ |
| 200 | $2^2\times3^0\times307^0=4$ |
| 201 | $2^2\times3^0\times307^1=1228$ |
| 210 | $2^2\times3^1\times307^0=12$ |
| 211 | $2^2\times3^1\times307^1=3684$ |

（四）多維座標的應用：

我們有一個分成6X7的方塊，我們需要用兩個數字(0,0)，(0,1)，……(6,5)表達這些方塊，但如果我們用混合式進位以6,7爲底，就可以只用一個數字0,1,2...41表達。

（五）用於資料壓縮：

資料壓縮最常的方法是分支法，他的原理是將出現頻率高的資料用較短的空間存放，而較少出現的資料則用較長的空間來表示。如：01213141567用二進位表示要用33單位的空間，但是，如果整理出來就發現1出現的頻率較高。

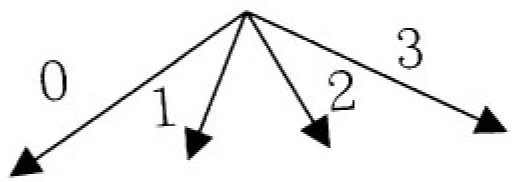
數字：01234567

次數：141111111

用到四次的可用二個碼來表示，只用一次的就用三或四個碼表示，所以用新方法可以表示爲：0100001100100001010

011011101111用了三十一個空間！節省了兩個空間！

上面的例子是用二進位處理的，所以只能分岔0或1，但是如果用混合式進位就有可能出現各種五花八門的分岔，如下圖：




可是，用混合式進位壓縮有何好處？我記得有一個公式可以計算佔總資料量多少百分比的資料最好用幾個二進位的位來表示，其中有用到Log所以可能它最佳的資料量是小數，只好四捨五入，但是用混合式進位就可以稍微趨近一點，雖然可能比較複雜，但是應該可以提高壓縮率。

不過這只是理論，以我的程式能力還不足以將其實現，所以沒有什麼附屬資料。

## 五、結論

以上是幾個混合式進位法的應用例子，我認爲混合式進位法在排列組合問題上應該都很好用，剩下來的就是由大家憑想像力來想出更多的用途。

在壓縮處理上面，我覺得這種方法不一定是空前的，我想也有很多壓縮程式是利用類似的方法來達到壓縮的目的，但是這也是用自我自己的腦袋瓜子想出來的，我更希望有功力高深的程式設計師來幫我實現這個計畫。

在猜數字方面，我覺得有空時可以再加上經驗與智慧型的分析方式，讓它可以在不同狀況下能分析出可能獲得最高的提示量的猜法，使程式的猜測技巧更強。

在求正因數的方面，我覺得已經是非常偷懶的方式，只要將所有質因數分解出來，就可以將所有正因數列出，比一個一個試快多了！在湊土撥鼠時，如沒用混合式進位，花了兩個小時，湊出數百組結構大多相同、對稱繁多的解，使用了混合式進位，只用了十五分鐘，湊出了兩組結構完全不同、沒有對稱的解。

## 評語

從一個遊戲出發，猜四個數字，互不相同，由電腦來猜。作者利用混合式進位法的特性（數字可以不重複）來解決此一問題，而且相當有效。此外，用同樣的方法，找出解土撥鼠遊戲的方法，使電腦程式由兩小時（一般搜尋法）加快為15分鐘，可找出結構不同，沒有對稱的兩組解。此做法突破傳統，非常有創意，故推薦之。

回上一層