內外擺線的切線、法線及面積

高中組數學科第三名

省立新竹高中

作　　者：全明道、許宸睿

指導教師：謝坤家

一、研究動機

我們在網路上看到一些用GSP所繪出的內外擺線圖形，因此引發我們對這些圖形的好奇心。我們試著用GSP
一些性質，例如外擺線外切多邊形面積不變、切線及法線共點等等。

二、研究目的

以下便是本作品內容的主要大綱（符號見圖一）：

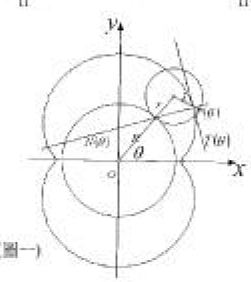
（一）研究切線所圍區域圖形的性質。

（二）研究法線所圍區域圖形的性質進而由其切線及法線發現

（三）研究以 $P(\theta)$、$P(\theta+\frac{2\pi}{n})$、$P(\theta+\frac{4\pi}{n})$、…、$P(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$ 爲頂點的n邊形的性質。

（四）求擺線圖形面積。

（五）研究法線 $N(\theta)$、$N(\theta+\frac{2\pi}{n})$、$N(\theta+\frac{4\pi}{n})$、…、$N(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n})$ 的共點性質。



（圖一）

三、研究器材及設備

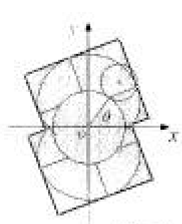
（一）電腦。

（二）軟體The Geometer's Sketchpad。

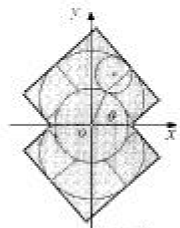
四、研究內容及結果

引理：$\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left[a\left(\theta+\frac{2i\pi}{n}\right)+b\right]=0$

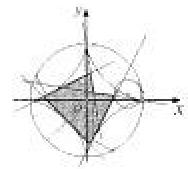
的充要條件爲n不整除a。（其中 $i=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$，$a\theta+b\neq 0$，$a\in N$，$b\in R$）



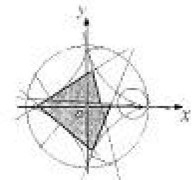
(圖二)



(圖三)



(圖四)



(圖五)

(一) 在圖二、圖三中，當 n 個等分點在固定圓上轉 動時，外擺線之切線所圍成的圖形會改變，但圖形的面積為一定值！由圖四及圖五可知內擺線和外擺線情況相同 。

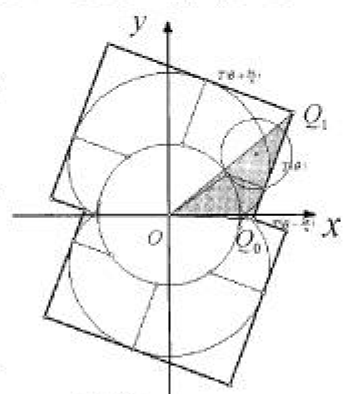
設 $Q_i\ (i\in N, 0\le i\le n-1)$ 為兩切線 $T(\theta+\frac{2i\pi}{n})$、$T(\theta+\frac{2(i-1)\pi}{n})$ 的交點。我們欲求圖形面積，使用 的方法是先用 θ 表示出以 $T(\theta)$、$T(\theta-\frac{2\pi}{n})$ 之交點 Q_0 及 $T(\theta+\frac{2\pi}{n})$、$T(\theta)$ 之交點 Q_1 及原點為三頂點的小三 角形面積，然後把 θ 用 $\theta+\frac{2\pi}{n},\theta+\frac{4\pi}{n},\ldots,\theta+\frac{2i\pi}{n}\ (i=1,2,\ldots,n-1)$ 代入得到其他小三角形 的面積，接著將所有小三角 的面積相加即為整個 n 邊形的面積。(圖六)

我們由外擺線的參數方程式

$$\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta \\ y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

，推出 $T(\theta)$ 的方程式為

$\sin\frac{R+2r}{2r}\theta\, x-\cos\frac{R+2r}{2r}\theta\, y=(R+2r)\sin\frac{R}{2r}\theta$。



(圖六)

1. n 不整除 $\dfrac{R+2r}{r}$ 時，經過複雜的計算我們得小三角形面積分別為

$$\frac{(R+2r)^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}\left[1-\cos\frac{R}{r}(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right],$$

其中 $i=0,1,\ldots,n-1$。

(1) 若 n 不整除 $\dfrac{R}{r}$，則由引理 1 可知 $\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{R}{r}\left(\theta+\frac{2i\pi}{n}\right)=0$，所以 n 邊形面積

$$A(\theta)=\frac{n(R+2r)^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}$$ 為一定值。

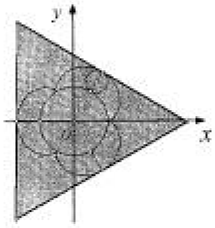
(2) 若n整除$\frac{R}{r}$，$A(\theta)=\frac{n(R+2r)^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}\left(1-\cos\frac{R}{r}\theta\right)$隨$\theta$

而改變。其範圍為$0<A(\theta)\le\frac{2n(R+2r)^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}$。(圖七)

(3)n整除$\frac{R+r}{r}$是n不整除$\frac{R+2r}{r}$的特例，

n邊形面積為0，不論θ如何變動，所有

切線保持共點。(圖八)

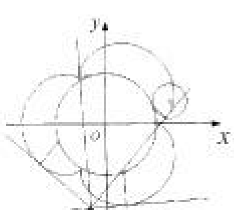


(圖七)

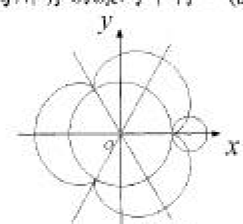
(4)$1-\cos\frac{R}{r}\theta=0$為$n$整除$\frac{R}{r}$的特例。此時$\theta=\frac{2mr\pi}{R}$(其中$m\in Z$)，所有

切線共點。(圖九)

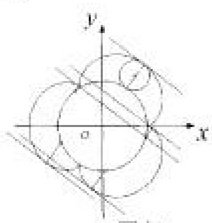
2. n整除$\frac{R+2r}{r}$時，設$\frac{R+2r}{r}=kn$，$k\in N$。此時切線$T(\theta+\frac{2i\pi}{n})$ ($i=0,1,2...,n-1$)的斜率$\tan\left[\frac{R+2r}{2r}(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right]=\tan\left[\frac{R+2r}{2r}\left(\theta+\frac{2ikr\pi}{(R+2r)}\right)\right]=\tan(\frac{R+2r}{2r}\theta+ik\pi)=\tan\frac{R+2r}{2r}\theta$。這表示切線$T\left(\theta+\frac{2i\pi}{n}\right)$的斜率一起隨著$\theta$改變而同為$\tan\frac{R+2r}{2r}\theta$，其幾何意義為所有切線均平行。(圖十)



(圖八)



(圖九)



(圖十)

內擺線的情形如下：先推出其切線$T(\theta)$的方程式為$\cos\frac{R-2r}{2r}\theta\, x+\sin\frac{R-2r}{2r}\theta\, y=(R-2r)\sin\frac{R}{2r}\pi$，然後用和外擺線一樣的方法，得到以下結果。

1.n不整除$\frac{R-2r}{r}$：

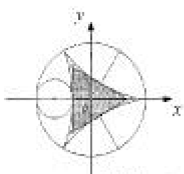
(1)若n不整除$\frac{R}{r}$且n不整除$\frac{R-r}{r}$，n邊形面積$=\frac{n(R-2r)^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}$

為一定值。

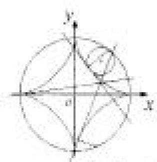
(2)若n整除$\frac{R}{r}$且$1-\cos\frac{R}{r}\theta\neq 0$，$n$邊形面積

$A'(\theta)=\frac{n(R-2r)^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}\left(1-\cos\frac{R}{r}\theta\right)$隨$\theta$而改變，範圍為

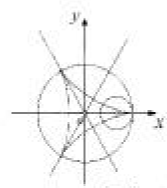
$0<A'(\theta)\leq\frac{2n(R-2r)^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}$。(圖十一)



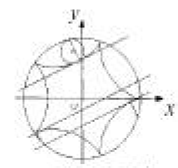
(圖十一)



(圖十二)



(圖十三)



(圖十四)

(3)n整除$\frac{R-r}{r}$算是n不整除$\frac{R-2r}{r}$的特例，n邊形面積$=0$，不論θ如何變動，所有切線保持 共點。(圖十二)

(4)$1-\cos\frac{R}{r}\theta=0$則為$n$整除$\frac{R}{r}$的特例。這時的$\theta=\frac{2mr\pi}{R}$(其中$m\in Z$)，所有切線共點。 (圖十三)

2.若n整除$\frac{R-2r}{r}$，所有切線均平行。(圖十四)

(二)當切線可圍出一 n邊形時，這些切線所對應之法線也將圍出一個n邊形。我們推出法線方程式為

$$\cos\frac{R+2r}{2r}\theta\,x+\sin\frac{R+2r}{2r}\theta\,y=R\cos\frac{R}{r}\theta，$$

然後用和切線情形同樣 的方法求其面積。

面積不為定值：

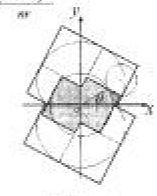
外擺線：面積函數$A(\theta)=\frac{nR^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}\left(1-\cos\frac{R}{r}\theta\right)$。

內擺線：面積函數$A(\theta)=\dfrac{nR^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}\left(1-\cos\frac{R}{r}\theta\right)$。

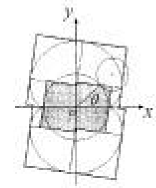
面積為定值時，兩者面積分別為$\dfrac{nR^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}$、

$\dfrac{nR^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}$。

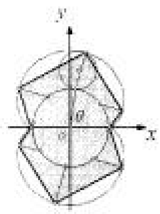
又由面積函數我們可以同理地推出法線平行、共點的條件和切線的情形一樣。(圖十五、圖十六)



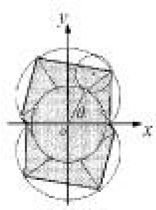
(圖十五)



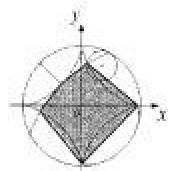
(圖十六)



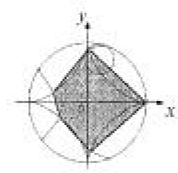
(圖十七)



(圖十八)



(圖十九)



(圖二十)

(三)在圖十七、圖十八中，n個等分點在固定圓上轉動時，這些外擺線上的點所構成的圖形會改變，但是圖形的面積為一定值！由圖十九、圖二十可知內擺線和外擺線情況相同。欲求n邊形面積，先求相鄰兩頂點和原點所成小三角形的面積，得出小三角形的面積函數為

$F(\theta+\frac{2i\pi}{n})=\dfrac{1}{2}\left\{(R+r)^2\sin\frac{2\pi}{n}-2(R+r)\lambda\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}\cos\left[\frac{R}{r}\left(\theta+\frac{2i\pi}{n}\right)+\frac{R\pi}{nr}\right]+\right.$

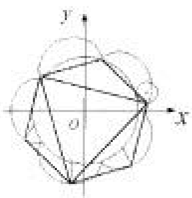
$\left.\lambda^2\sin\frac{2(R+2r)\pi}{nr}\right\}$，其中$i=0,1,\dots,n-1$。

1. n不整除$\dfrac{R}{r}$時，由引理1知$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left[\frac{R}{r}\left(\theta+\frac{2i\pi}{n}\right)+\frac{R\pi}{nr}\right]=0$，故多邊形面積$A(\theta)=\dfrac{n}{2}\left[(R+r)^2\sin\frac{2\pi}{n}+\lambda^2\sin\frac{2(R+r)\pi}{nr}\right]$為一定值。其中當$n$整除$\dfrac{R+r}{r}$時，不論$\theta$為何，這$n$個點構成一正$n$邊形。(圖二十一)

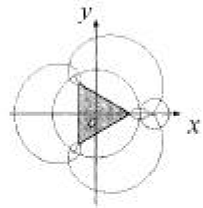
2. 當n整除$\dfrac{R}{r}$時，面積$=\dfrac{n}{2}\left[(R+r)^2\sin\frac{2\pi}{n}-2(R+r)\lambda\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}\cos\left(\frac{R}{r}\theta+\frac{R\pi}{nr}\right)\right.$

$\left.+\lambda^2\sin\frac{2(R+r)\pi}{nr}\right]$隨著$\theta$值而改變。最小值為$\dfrac{n(R+r-\lambda)^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，最大值為

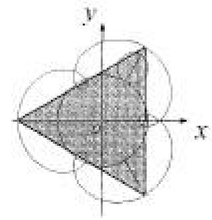
$\dfrac{n(R+r+\lambda)^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$。(圖二十二、圖二十三)



(圖二十一)



(圖二十二)

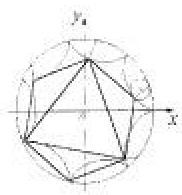


(圖二十三)

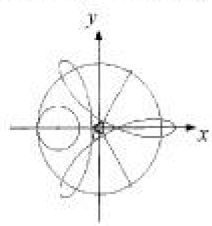
內擺線的情形如下：

1. n不整除$\dfrac{R}{r}$時，多邊形面積$A(\theta)=\dfrac{n}{2}\left[(R-r)^2\sin\frac{2\pi}{n}+\lambda^2\sin\frac{2(R-r)\pi}{nr}\right]$為一定值。其中特別當$n$整除$\dfrac{R-r}{r}$時，不論為何，這$n$個點恆構$\theta$成個正$n$邊形。(圖二十四)

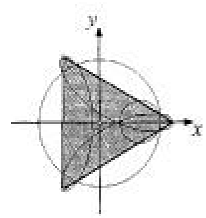
2. 當n整除$\dfrac{R}{r}$時，面積$=\dfrac{n}{2}\left[(R-r)^2\sin\frac{2\pi}{n}-2(R-r)\lambda\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}\cos\left(\frac{R}{r}\theta+\frac{R\pi}{nr}\right)+\lambda^2\sin\frac{2(R-r)\pi}{nr}\right]$隨著$\theta$值而改變。最小值為$\dfrac{n(R-r-\lambda)^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，最大值為$\dfrac{n(R-r+\lambda)^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$。(圖二十五、圖二十六)



(圖二十四)



(圖二十五)



(圖二十六)

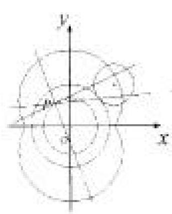
(四)求擺線圖形的面積

求標準外擺線圖形面積可求當n趨近無限大時，函數

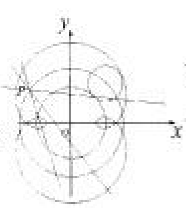
$\frac{n(R+2r)^2}{\sin\frac{(R+2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R+r)\pi}{nr}$以及$\frac{n}{2}\left[(R+r)^2\sin\frac{2\pi}{n}+r^2\sin\frac{2(R+r)\pi}{nr}\right]$的極限值。我們利用了$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$的觀念來求極限值，求得外擺線圖形的面積為$(R+r)(R+2r)\pi$。

同理，欲得內擺線圖形的面積可求當n趨近無限大時，$\frac{n(R-2r)^2}{\sin\frac{(R-2r)\pi}{nr}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(R-r)\pi}{nr}$或$\frac{n}{2}\left[(R-r)^2\sin\frac{2\pi}{n}-r^2\sin\frac{2(R-r)\pi}{nr}\right]$的極限值。其結果為$(R-r)(R-2r)\pi$。

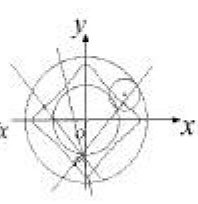
(五)對任意外(次)擺線而言，若n整除$\frac{R+r}{r}$，或者對任意內(次)擺線而言，若n整除$\frac{R-r}{r}$，則所有法線共點，且法線交點P位在一個以原點為圓心，半徑$\frac{R\lambda}{r}$的圓上，亦即$\frac{\overline{OP}}{R}=\frac{\lambda}{r}$。(圖二十七、二十八、二十九、圖三十)



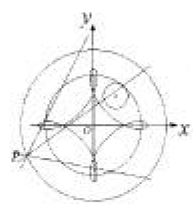
(圖二十七)



(圖二十八)



(圖二十九)



(圖三十)

五、未來展望

1.雖然我們已探討研究出了內、外擺線之切線、法線在某些情況下所圍面積爲一定値，但推廣到了次擺線時，由於其切線或法線的方程式更複雜很多，因此我們在研究上遇到很大的障礙，由軟體GSP我們粗略了解其面積不爲定値，這是我們尚待突破研究的目標！

2.我們另外曾經考慮過由橢圓在橢圓上所滾出來類似擺線的圖形，並嘗試求

其參數方程式，這將是我們未來繼續努力的方向之一。

六、參考資料

(1)中學百科全書——數學卷，北京師範大學出版社，華北師範大學出版社，東北師範大學出版社

(2)簡明數學百科全書，九章出版社

(3)C.Zwikker, The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications, Dover, 1963.

(4)網頁：www.math.nthu.edu.tw/gc

評語

作者由內外擺線的幾何問題，由參數的變動，考慮外切多邊形面積。作者利用電腦繪圖軟體的輔助，觀察到有意思的幾何性質且予以嚴謹證明。作者由此尋求新的問題，尤其應用電腦的優勢，經由觀察，發掘未知的性質，展現出豐富的創作能力。

回上一層