# 二次函數中一個命題的推廣與研究

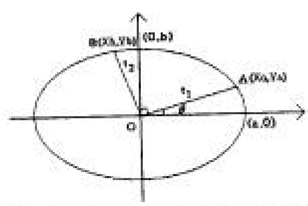
## 高中組數學科第一名

建國高中　　作　　者：趙之昊、蔡濬帆、魏銘延、魏銘良
指導教師：李　瑞

## 一、研究動機

在課堂上教到第三冊數學的「二次曲線」時，我們的數學老師提到一個相當有趣的性質：在一個橢圓中，若是以此橢圓之中心點O為起點，向橢圓的圓周做兩條互相垂直的線段OA、OB交橢圓圓周於點A、B。

如下圖：




無線段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$如何旋轉，交於此一橢圓圓周上的點A′、B′，恆存在有下面的性質：$\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}=K$　　（K為定值）

於是我們就很好奇，如果放寬了原有的條件，此一性質是否仍然成立呢？而開始了這一次的研究。

## 二、研究目的

探討定值K

各條件之間的關係，及定值K的一般式。

（一）橢圓

1. 橢圓中心。　　2. 橢圓中心三等分。
3. 橢圓中心多等分。　　4. 橢圓焦點多等分。
5. 橢圓內任意一點多等分。

（二）二次曲線

1.二次曲線焦點。

2.二次曲線中心。

3.二次曲線內任意一點。

4.二次曲線外任意一點。

5.二次曲線上任意一點。

6.二次曲線一般式。

（三）二次曲面

1.對定軸旋轉。

2.正多面體。

3.阿基米德多面體。

4.多面體通式。

## 三、研究器材

（一）個人電腦一台。

（二）Borland C++。

（三）紙筆若干。

（四）人腦四顆。

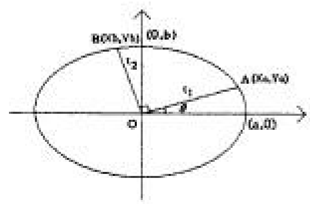
（五）Mathematica 2.2.3。

## 四、研究過程

（一）橢圓

1.橢圓中心：

我們最出先證明「基本型」。




已知一橢圓O，以XY座標平面原點為其橢圓中心；其長軸沿X軸方向，短軸沿Y軸方向。如圖所示：

無論線段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$如何旋轉，交於此一橢圓圓周上的點A'、B'，恆存在有：

$$\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}=K \qquad \text{（K為定值）}$$

2.橢圓中心三等分：

由以上之證明，我們將原圖形猜想為二條線段所交成的圖形；故第一步將原圖形拓展為「三條等分圓周角的線段」。

※在此我們為了不在圖形進一步發展時被「幾條線段」的名詞所混淆，所以

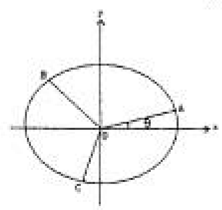
針對此下定義：自此行以下的橢圓內部，均使用「線段」之數目，所以基本型之證明 ，可以視為二條「線段」(交角90° ) 所畫出的圖形，而推展成由三條線段(等分圓周角) 所決定的圖形。

在研究三等分時，我們在由電腦所跑出的結果中發現到，以橢圓中心點為線段起點時，畫出的圖形以線段數目( n )為操縱變因，恰巧可畫成一漂亮直線。

對於此結果我們猜想並嘗試證明得到：

$$k=\frac{a^2\left(\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin^2\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)\right)+b^2\left(\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)\right)}{a^2b^2}$$

為一不隨角度改變的定值。




我們並沒有找出三角函數公式，可以直接把所有會影響k值的變數$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$……等完全消去。但是我們將k值帶入各項測試，卻發現k仍呈一定值；湊巧的是 ，k值恰好為 $\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ 即3條線段為2條時的 $\frac{3}{2}$ 倍。

3.橢圓中心多等分：

在三等分的討論中，所得到的常數 $\frac{3}{2}$，使我們嘗試增加等分角個數。而增加線段數之後產生的新定值，恰成一簡單整數比。

由電腦的實驗可以看出，在以橢圓中心為線段起點所產生的命題，存在有

$$k_n=\frac{n}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

kn：由n條線段將2π均分為n等分時，
繪出命題之後，得到的「定值」。
a：半長軸。
b：半短軸。

於是我們嘗試對此證明：

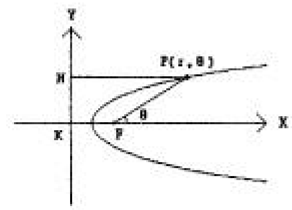
$$K_n=\frac{1}{a^2b^2}\left[a^2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+0i\right)+\frac{b^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+0i\right)\right]$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

故命題以橢圓中心為線段起點時成立。

4.橢圓焦點多等分：

在橢圓內我們所猜想的第一個特殊點是焦點。

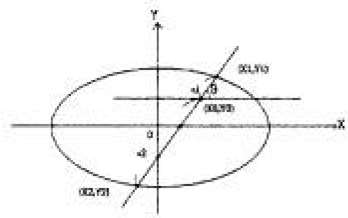



如圖所示：

我們證得「以橢圓焦點爲線段起點作等分周角交橢圓的線段之長度倒數平方和」爲一定值。

5.橢圓內任意一點多等分：

對於橢圓內的任意一點，我們首先嘗試以電腦實驗。我們以電腦實驗出，在偶數條線段時，命題成立；但是在命題爲奇數條線段時，命題不成立。奇數條線段的情形下不成立，我們可以找出反例來證明。



在此之後，我們針對四條以上的偶數條線段的命題證明出：橢圓內四條以上的偶數條線段之長度倒數平方和恆爲定值。

※從橢圓到二次曲線：

橢圓是二次曲線中的一種，那既然橢圓可以，其餘的二次曲線可以嗎？從這個簡單的聯想，我們便開始著手嘗試二次曲線的相關研究。

（二）二次曲線

（爲了方便起見，我們將二次曲線在平面上所分隔出之區域加以命名。焦點所在之區域命名爲「內」；區域中無焦點者命名爲「外」。）

在橢圓的證明中，我們使用了極座標、根與係數等方法。我們留意到，其實換一個角度來看，我們的研究其實就是一種「直線與二次曲線的關係」。（也就是說，其實大多數的情形是偶數等分會成立，只有少數幾個特殊點對稱或其他因素，而使得奇數等分也成立。）

起初，我們對於直線與二次曲線的交點個數感到苦惱。但是整理之後發現：

過二次曲線內一點的直線，和二次曲線所相交之點數：

| | 交於2個點 | 交於1個點 |
|---|---|---|
| 橢圓 | 全部情形 | |
| 拋物線 | 多數情形 | 直線平行於主軸 |
| 雙曲線 | 多數情形 | 直線平行於漸進線 |

我們猜想：交於兩個點的情形，和橢圓看起來差不多。至於交於一個點的情形 ，或許可視為另一點交於無窮遠處吧。

1.二次曲線焦點：

在前面橢圓焦點的證明裡，我們用離心率 e 與正焦弦長來表示角度與線段長度的關係。所以當我們以焦點做為各線段起點（旋轉直線中心）的時候，原命題可以推廣到平面上所有非退化的二次曲線皆會有相同的性質。不過要特別注意到用極座標表示時所選的左右準線要分開作討論。

2.二次曲線中心：

在二次曲線的焦點已經符合了這個性質之後，我們試著想找出類似橢圓中心的證明，但是我們發現，其實中心的定義並不相同。像雙曲線中的貫軸和共軛軸交點 ，並不會符合所要求的性質。在拋物線及雙曲線之內，我們還沒找出一個像橢圓中心一般，符合性質的所謂「中心」。

3.二次曲線內任意一點：

在前面的證明中，我們將參數形式的直線與橢圓聯立後，得到一個t的二次方程式。當每條旋轉直線與橢圓相交後所解出來的根，皆為兩相異實根時，我們知道不論起始直線與x軸的夾角為何，所求的線段長度之倒數平方和皆為定值。當旋轉線段的中心位在拋物線或雙曲線焦點所在的一側，原來偶數條線段的命題在這裡似乎都有成立的可能，但有一些特別的地方要重新考慮（參考橢圓內任意一點的證明）。

現在我們注意一下，先前所提到的直線與二次曲線的交點，對於平行於雙曲線的漸近線或拋物線主軸的直線來說，在平面上和原來的圖形只會得到一個交點。在這裡如果假設一點交於無窮遠處，其長度倒數平方便為零，其值不影響命題中所求的定值K，而以根與係數的關係所計算出的實交點，就是圖上所見的交點了。

4.二次曲線外任意一點：

線段起點在二次曲線外的情況，由於直線和二次曲線之實交點數目，會隨著

旋轉而有變化，而且許多的情形下二次曲線和直線是沒有實交點的。我們嘗試了許多假設，但是都沒有什麼特別的發現。在眾多假設之中，或許「虛交點」的假設是比較令我們感到樂觀的。

※虛交點：

因為以上論證並未實際求出交點，而是利用根與係數的關係，並不一定要為實交點。所以線段起點0在二次曲線內及二次曲線外時，線段長度的倒數平方和和k恆為定值。也就是：

$$\frac{1}{\overline{op_1}^2}+\frac{1}{\overline{op_2}^2}+\cdots+\frac{1}{\overline{op_{2n}}^2}=k \qquad \text{（k為定值）}$$

其中$p_1$、$p_2$……$p_{2n}$為二次曲線與直線之交點，包括實交點與虛交點。

5.二次曲線上任意一點：

至於線段起點在二次曲線上的特殊情況，我們認為可以輕易地看出它的定值比較特殊，甚至於可視定值K＝∞。例如將橢圓上某一點之座標，代入我們所推導出的定值公式，將使得定值K之分母為0。在此我們不特別加以討論。

6.二次曲線一般式：

現在我們試著整合所有的二次曲線。我們可以令直線通過原點，帶入二次曲線一般式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，再配合棣美弗定理，可求得定值為：

$$\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{d^2+e^2}{2f^2}-\frac{a+c}{f}\right) \qquad \text{（n為等分數目）}$$

※從二次曲線到二次曲面：

研究了平面中的二次曲線之後，我們希望能夠進展到空間中的二次曲面或是更廣的範圍。由於過橢球中心的平面所截圖形皆為橢圓（事實上，過橢球的平面所截圖形皆為橢圓），給了我們一些啟示。

（三）二次曲面

在討論了二次曲線的證明之後，我們準備向更廣的方向發展。我們把討論的方向朝向空間延伸。在討論的開始，先朝向長度或面積與二次曲面的關係作研究。很快的，我們選擇橢球來思考接下來的研究。

1.對定軸旋轉：

研究過同一個直線且以此軸為旋轉軸旋轉的平面與橢球所圍面積的關係。

旋轉角$\theta$的定義：在空間中選定一條直線L，做一平面E包含此直線，以直線L為旋轉軸旋轉，使新平面E'和E夾$\theta$角。

※在這裡，我們仍然沿用先前的等分角的定義，只要沒有特別說明，後面的

證明都指等分360°角的 t 個平面。

(1)空間中對 x 軸旋轉：

$$\frac{2}{2}\cdot\frac{m^2+n^2}{k^2m^2n^2\pi^2}$$ （k、m、n分別為橢球的三個半軸）

兩垂直平面和橢球所交出的橢圓之面積倒數平方和。

t個平面和橢球所交出的橢圓之面積倒數平方和。

$$\frac{t}{2}\cdot\frac{m^2+n^2}{k^2m^2n^2\pi^2}$$ （k、m、n分別為橢球的三個半軸）

(2)空間中對平行座標軸之直線旋轉：

兩垂直平面和橢球所交出的橢圓之面積倒數平方和。

$$\frac{1}{k^2m^2n^2\pi^2}\cdot\frac{\left(n^2\cos^2\theta+m^2\sin^2\theta\right)^3}{\left[n^2\cos^2\theta+m^2\sin^2\theta-\left(p\sin\theta-g\cos\theta\right)^2\right]^2}$$

$$+\frac{1}{k^2m^2n^2\pi^2}\cdot\frac{\left(m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta\right)^3}{\left[m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta-\left(p\cos\theta+g\sin\theta\right)^2\right]^2}$$

（k、m、n分別為橢球的三個半軸，p、q為平移向量）

在這裡所求得的面積倒數平方和並沒有原來命題中面積倒數平方和為定值的關係。我們用電腦對這個結果繪出 $\theta$ 對面積倒數平方和的圖形，結果是一個週期函數圖形。並且在當p、q恰有一個為0時，由所得出的圖形，猜想其函數為：

$$A\pm\frac{p^2B+q^2C}{D}\cdot\cos2\theta$$ 的形式。

我們學到了許多在空間中證明的運算技巧。原本下一個目標是旋轉軸傾斜的證明，但是我們推論此證明也將會面臨相似的結果。在化簡了面積倒數平方和的多項式之後，接下來我們向正多面體的方向發展。

※我們另外再用微積分的觀點去分析，發現到在這裡需要用虛交點的觀念去解釋。簡單的說，實數部分及虛數部分的和為定值。平移之前(p＝q＝0)，實數部分和虛數部分是可以各自獨立的，所以我們所要的面積（實數部分）是個定值。但是經過平移之後，實數部分和虛數部分的和為定值，但是並不保證面積（實數部分）就是個定值。這或許就是我們得到週期函數圖形的原因。

2.正多面體：

平面中的等分角，讓我們聯想到空間中的正多面體。正多面體的對角線（指過正多面體之形心的對角線），就像是空間中的等分角吧。從標準化之後的橢球與形心在座標軸原點的正八面體，得到線段長度倒數平方和也為一個定值（旋轉

的定義似乎可以改爲任意擺設）。即使將正八面體之形心平移至橢球內任意一點，也可以輕易的證明出線段長度倒數平方和爲一個定值。

由於正多面體形心與頂點所形成的向量，必須使用兩個角度來表示，而各條向量之間並沒有簡單的關係。我們改採用固定直線向量，而將橢球對 x 軸和 y 軸旋轉　，再加以平移。觀察旋轉不同角度時，向量和橢球交點的距離倒數平方和是否是定值。

⑴正八面體：

我們注意到由正八面體形心與頂點所成的6條向量，兩兩成對，在同一條直線上。所以我們可以用其中三條向量作爲直線帶入橢球方程式，並利用根與係數關係　，求得兩個交點與原點距離的倒數平方和，得到定值如下：

$$\frac{2a^2b^2c^2\cdot\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-2a^2b^2c^2q^2\left(c^2+a^2\right)-2a^2b^2c^2p^2\cdot\left(b^2+c^2\right)}{(b^2c^2p^2+a^2b^2r^2+a^2c^2q^2-a^2b^2c^2)^2}$$

$$+\frac{-2a^2b^2c^2r^2\cdot\left(a^2+b^2\right)-a^4c^4q^2-b^4c^4p^2-a^4b^4r^2}{(b^2c^2p^2+a^2b^2r^2+a^2c^2q^2-a^2b^2c^2)^2}$$

將p=q=0代入，也就是沒有平移時的情況，得到定值：

$\frac{6}{3}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$　（a、b、c分別爲橢球的三個半軸）

※在正八面體的研究中，我們也試著將定義改爲以「任兩條對角線所決定之平面與橢球」截出之橢圓的面積（因爲所截圖形爲封閉的二次曲線，所以爲一橢圓）　，代替前述的線段，竟然也是一個定值。

⑵正六面體：

由於正六面體的形心與頂點所成的8條向量，兩兩成對，在同一條直線上。運用正八面體的證明方式，用其中四條向量作爲直線帶入橢球方程式，並利用根與係數關係，求得兩個交點與原點距離的倒數平方和，得到定值如下：

$$\frac{8a^4b^4c^2+8a^4b^2c^4+8a^2b^4c^4+8a^4b^4r^2+8a^4c^4q^2+8b^4c^4p^2}{(b^2c^2p^2+a^2c^2q^2+a^2b^2r^2-a^2b^2c^2)^2}$$

$$+\frac{-8a^2b^4c^2p^2-8a^2b^2c^4p^2-8a^4b^2c^2q^2-8a^2b^2c^4q^2-8a^4b^2c^2r^2-8a^2b^4c^2r^2}{(b^2c^2p^2+a^2c^2q^2+a^2b^2r^2-a^2b^2c^2)^2}$$

將p=q=0代入，也就是沒有平移時的情況，得到定值：

$\frac{8}{3}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$　（a、b、c分別爲橢球的三個半軸）

(3)正四面體：

由於正四面體的形心與頂點所成的4條向量，恰好是正六面體的8條向量的其中4條。若是橢圓的形心在原點（不平移）的情況下，由於直線與橢圓的兩交點的長度相同。所以可以運用正六面體的證明方式，將結果減半，得到定值如下：

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$ （a、b、c分別爲橢球的三個半軸）

3.阿基米德多面體：

我們以向量方式證明出部分阿基米德多面體可以符合本命題的研究，其餘部分有待驗證。得到的結果爲以下的形式：

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0$$ （此爲二次曲面通式）

$$k\cdot\frac{(g^2+h^2+i^2)-2(a+b+c)j}{j^2}$$ （k值會依不同阿基米德多面體而改變）

4.多面體通式：

我們發現只要多面體的形心到各頂點所成的向量$(p_i,q_i,r_i)$的各個分量符合以下兩點關係，則本命題成立。證明的結果請見研究結果。

## 五、研究結果

研究過程前半部分的證明結果請見研究過程。

在我們的研究結果中，我們證明出當形心到頂點發出射線所成集合中的任一元素（任一向量）$(p_i,q_i,r_i)$，均有集合中另一向量$(p_j,q_j,r_j)$，使得$(p_i,q_i,r_i)=-(p_j,q_j,r_j)$〔$i\neq j$，也就是有對稱的性質〕，且多面體的形心到各頂點所成的向量$(p_i,q_i,r_i)$的各個分量，符合以下的關係時，則本命題成立。

$$\sum p_i^2=\sum q_i^2=\sum r_i^2$$

$$\sum p_iq_i=0,\sum q_ir_i=0,\sum p_ir_i=0$$

## 六、討論與結論

在研究動機中，證明橢圓中心互相垂直的兩條線段長度的倒數平方和爲定值（橢圓參數式、三角函數恆等式）。然後想到橢圓中心四條線段的部分也是成立的（對稱）。接著用電腦實驗出橢圓中心多等分的結果仍然是定值。並且證明出橢圓中心三條線段（棣美弗定理）、橢圓中心n條線段（n等份）都會成立。接著在電腦計算的結果中，橢圓內一般點多等份的命題仍然成立（偶數條線

段)。

我們用極座標變換證明橢圓焦點n等份(焦點極座標)與橢圓內一般點n等(直線參數式、根與係數關係)依然成立。在焦點的證明中，我們注意到非退化的二次曲線都可以用極座標證明。

我們用類似的觀念確定了非退化二次曲線內一般點(拋物線、雙曲線)的命題 。接著又有了一個新的啓發，我們的證明似乎都可以視爲是直線與二次曲線的關係 ，從這裡延伸出向空間中證明的想法。又我們想到了證明中所用到的是根與係數關係，虛交點仍然有原來證明的性質。另外再利用矩陣作座標變換，表示出空間中的橢圓與旋轉平面相交所成面積間的關係(對軸與平行軸之直線旋轉)。

對於如何由一個點延伸出等分空間角的射線，我們先做對正八面體的討論。利用形心到頂點的向量作爲射線，發現這些線段長的倒數平方和爲定值。接著證明了正六、正四面體(並推廣至所有正多面體)及阿基米德多面體也有同樣的性質。

在證明阿基米德多面體的過程中，我們注意到由形心所發出的射線在符合某些條件的情況下，所求的值不會改變。最後，我們利用不變量找出了一個關於空間中多面體命題的充份條件。

## 七、參考資料

1.微積分Earl W.Swokowski　東華書局。

2.Solid Analytic Geometry by Adrian Albert University of Chicago。

3.大陸地區現行高中數學課本之平面解析幾何　九章出版社。

## 評語

(一)本作品作者藉由課堂上所學橢圓的一個性質出發加以推廣，由原先橢圓內兩條垂直線段長度倒數之平方和推廣到n條線段類似的性質。進而考慮一般二次曲線、曲面、多面體等。整個問題考慮的層面廣度及深度皆展現出作者的功力。他們所獲得的結果具學術價值且有創新性。

(二)作者處理的手法，證明所用的工具，都顯示作者的能力皆有不錯的水準 。

回上一層