立體撞球檯

國中組數學科第三名

新竹市立光華國民中學　　　　作　　者：吳衍宣、林家華
指導教師：李俊坤、郭素妙

一、研究動機

繼去年我們以長、寬分別為a、b的平面撞球檯，在新竹市參加展覽之後。今年我們想更進一步的將其推廣成長、寬、高分別為a、b、c的立體撞球檯，並嘗試用新的方法推導研究平面（二維）及立體（三維）撞球移動情況及相關的數學結果。

二、研究目的

(一) 平面撞球檯：

在長為m、寬為n（其中m、m皆為正有理數）的平面撞球檯中，四個角落為球洞，於其中一個角落置一撞球，分別以：

(A)向量(1,1)，(B)向量(x,y)（其中x、y皆為正整數）的方向發射，討論以下的情況：

⑴球需反彈幾次才能進洞？

⑵球進洞時，在平面上共行進了多遠？

⑶球會進那個球洞？m、n之間的關係是否影響到球會射入那個球洞？

(二) 立體撞球檯：

在長為m、寬為n、高為h（其中m、n、h皆為正有理數）的立體撞球檯中，八個角落為球洞，若於其中一個角落置一撞球，分別以：(A)向量(1,1,1)(B)向量(x,y,z)（其中x、y、z皆為正整數）的方向發射，討論以下的情況：

⑴球需反彈幾次才能進洞？

⑵球進洞時，在立體球檯上共行進了多遠？

⑶球會進入那個球洞？m、n、h之間的關係，是否影響到球會射入那個球洞？

立體撞球檯

國中組數學科第三名

新竹市立光華國民中學　　作　者：吳衍宣、林家華
指導教師：李俊坤、郭素妙

一、研究動機

繼去年我們以長、寬分別為a、b的平面撞球檯，在新竹市參加展覽之後。今年我們想更進一步的將其推廣成長、寬、高分別為a、b、c的立體撞球檯，並嘗試用新的方法推導研究平面（二維）及立體（三維）撞球移動情況及相關的數學結果。

二、研究目的

（一）平面撞球檯：

在長為m、寬為n（其中m、m皆為正有理數）的平面撞球檯中，四個角落為球洞，於其中一個角落置一撞球，分別以：

(A)向量(1,1)，(B)向量(x,y)（其中x、y皆為正整數）的方向發射，討論以下的情況：

⑴球需反彈幾次才能進洞？

⑵球進洞時，在平面上共行進了多遠？

⑶球會進那個球洞？m、n之間的關係是否影響到球會射入那個球洞？

（二）立體撞球檯：

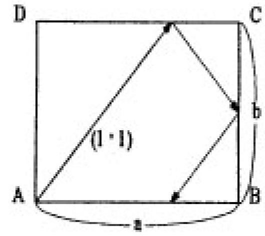
在長為m、寬為n、高為h（其中m、n、h皆為正有理數）的立體撞球檯中，八個角落為球洞，若於其中一個角落置一撞球，分別以：(A)向量(1,1,1)(B)向量(x,y,z)（其中x、y、z皆為正整數）的方向發射，討論以下的情況：

⑴球需反彈幾次才能進洞？

⑵球進洞時，在立體球檯上共行進了多遠？

⑶球會進入那個球洞？m、n、h之間的關係，是否影響到球會射入那個球洞？

三、研究過程與結果



圖(一)

（一）平面撞球檯：

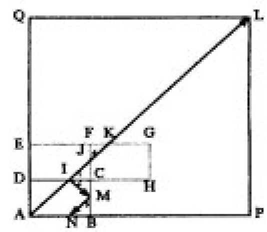
(A)在長a，寬b（其中a、b皆為正整數）的矩形撞球檯ABCD中，四個角落為球洞、如圖（一），於A角落置一撞球，以向量(1,1)發射，設$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$。如圖（二），在座標(0,0)的A點置一球以向量(1,1)發射，球在撞到I點後，反彈至M點，再反彈到N點。

⑴將平面撞球檯延伸，以$\overline{CD}$為邊，作一與ABCD全等的矩形DCEF，延長$\overline{AI}$交$\overline{CF}$於J。在△IJC和△IMC中：

∵∠1=45° =∠2，∠ICJ=90° ∠=ICM，

$\overline{IC}=\overline{IC}$ 故△IJC≅△ICM（ASA全等性質）

∴$\overline{IJ}=\overline{IM}$



圖(二)

⑵再將平面撞球檯以$\overline{CF}$為邊延伸，作一與ABCD全等的矩形CHGF，延伸$\overline{AJ}$交$\overline{FG}$於K。

∵∠3=45° ∠=4，∠MBN=90° =∠JEK，

$\overline{MB}=\overline{CB}-\overline{CM}=\overline{CF}-\overline{CJ}=\overline{JF}$ 故△MBN≅△JFK（ASA全等性質） ∴$\overline{MN}=\overline{JK}$

⑶同理，若反彈路徑還沒撞進角落之前，每反彈一次，便可再仿造⑵、( )的方法複製全等矩形，其中有一延伸的三角形與之全等。即在複製全等矩形中有一線段長等於此次反彈的線段。所以當球進洞時，也就是A點連到L點時，又以(1,1)向量發射，故APLQ必為一正方形，其邊長=[a,b]，而必能以ABCD大小的矩形舖滿，所以AL所相交矩形的次數，便是反彈的次數。則

☆$\overline{AL}$和矩形相交垂直方向的線和水平方向的線皆共有 $\frac{[a,b]}{2}$ 條。

又因兩次都重複計算了終點相交的線故必須將次數減2，即撞球反彈次數

$=\frac{[a,b]}{2}+\frac{[a,b]}{2}-2[a,b](\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{[a,b]})$

⑷同理，AP=AQ=[a,b]，所以：球所行進的路徑長=$\overline{AL}=\sqrt{2}\times[a,b]$

⑸由 $\frac{[a,b]}{a}$ 的式子中，我們發現撞球在$\overline{AD}$之間來回所彈撞的次數：

☆$I=\frac{[a,b]}{a}$ 為奇數，球最後碰到矩形ABCD的右邊（即$\overline{BC}$）。

為偶數，球最後碰到矩形ABCD的左邊（即$\overline{AD}$）。

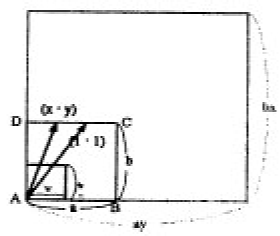
☆$J=\frac{[a,b]}{b}$ 為奇數，球最後碰到矩形ABCD的上邊（即$\overline{CD}$）。

爲偶數，球最後碰到矩形ABCD的下邊（即$\overline{AB}$）。

也就是球進那一個洞的判斷方法：

	I	J	結　　果
情況(A)	偶數	偶數	進左下角的 A 洞
情況(B)	奇數	偶數	進右下角的 B 洞
情況(C)	奇數	奇數	進右上角的 C 洞
情況(D)	偶數	奇數	進左上角的 D 洞

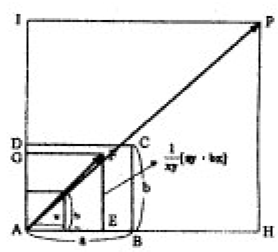
(B)如圖（三），於座標(0,0)的A角落置一撞球，以向量(x,y)發射（其中x、y皆爲正整數)。



圖(三)

⑴我們將向量(x,y)看成以向量(1,1)發射的結果，則長變爲 $\frac{a}{x}$，$\frac{b}{y}$ 其撞球反彈的次數並不改變，但若 $\frac{a}{x}$、$\frac{b}{y}$ 代入以向量(1,1)發射的公式，則結果可能會出現分數。又因x，y皆爲正整數，所以邊長同乘以xy，則邊長變爲ay、bx，於是得到撞球反彈的次數爲：$[ay,bx](\frac{1}{ay}+\frac{1}{by}-\frac{2}{[ay.bx]})$

⑵利用相同的技巧，我們也可以求出行進的路徑長：如圖（四），以矩形ABCD爲原平面撞球檯，$\overline{AB}$=a，$\overline{AD}$=b，以向量(x,y)爲發射的角度，仿造以向量(1,1)並排矩形的方式去疊，當並排的長：寬等於x：y時，正方形AEFG即爲由 $\frac{a}{x}$、$\frac{b}{y}$ 爲邊長所並排之正方形



圖(四)

邊長：$[\frac{a}{x},\frac{b}{y}]=\frac{1}{xy}[ay,bx]$所以，

$\overline{AF}=\frac{\sqrt{2}}{xy}[ay,bx]$又因$\overline{AH}$：$\overline{AI}$=x：y

所以，$\overline{AH}$=x．$\overline{AE}$、$\overline{AI}$=y．$\overline{AG}$，

即$\overline{AP}$（所行進的路徑長）可表示成：$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}[ay,bx]$。

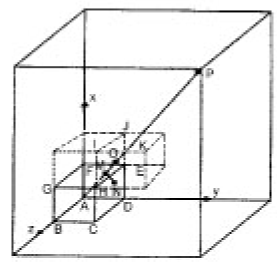
⑶球進那個洞的的判斷方法，我們也可以用$\frac{a}{x}$取代原先的a，$\frac{b}{y}$取代原先的b，即$I=\frac{[\frac{a}{x},\frac{b}{y}]}{\frac{a}{x}}=\frac{[ay,bx]}{ay}$　　$J=\frac{[\frac{a}{x},\frac{b}{y}]}{\frac{b}{y}}\quad\frac{[ay,bx]}{bx}$

也就是球進那個洞的判斷方法：

	I	J	結　　果
情況(A)	偶數	偶數	進左下角的 A 洞
情況(B)	奇數	偶數	進右下角的 B 洞
情況(C)	奇數	奇數	進右上角的 C 洞
情況(D)	偶數	奇數	進左上角的 D 洞

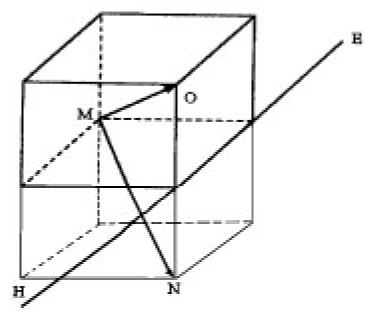
（二）立體撞球檯：

(A)在長a（即$\overline{AB}$）、寬b（即$\overline{AD}$）、高c（即$\overline{AF}$）其中a，b，c皆爲正整數的立方體ABCDEFGH撞球檯中，八個角落爲球洞，如圖（五），於座標(0,0,0)的A點置一球，以向量(1,1,1)發射。



圖(五)

⑴假設先彈到EFGH面上的M點後，反彈到CDEF面上的N點。從EFGH面上疊一個大小相等的長方體，延長AM交此長方體的EHIJ面上於O點。



圖(六)

⑵將反彈的路線放大，如圖（六），因撞球是以向量(1,1,1)發射，若以MO，MN爲對角線所做出的正立方體，設其邊長爲x，即得$MO=\sqrt{3}\times=\overline{MN}$

⑶當撞球反彈進洞時，$\overline{AM}$也會射入某個長方體的角落，又發射的角度爲向量(1,1,1)，則連續相同方向長方體所疊成的形狀，就是一個由原立體撞球檯所成的最小正方體，此最小正方體邊長爲[a,b,c]。

⑷撞球反彈次數必須計算$\overline{AM}$所碰到的平面及邊的個數，其反彈的平面數有

$$\frac{[a,b,c]}{a}+\frac{[a,b,c]}{b}+\frac{[a,b,c]}{c}$$ 個。

若反彈到邊上，會使兩平面重覆計算一次，故必須扣掉，即扣除碰到與z，x，y軸相同方向的$\frac{[a,b,c]}{[a,b]}$、$\frac{[a,b,c]}{[b,c]}$、$\frac{[a,b,c]}{[a,c]}$、重複計算的次數。（進洞時，原應扣除三次，但已經在計算「邊」時扣掉，所以並不影響結果）即撞球反彈次數爲：

$$\frac{[a,b,c]}{a}+\frac{[a,b,c]}{b}+\frac{[a,b,c]}{c}-\frac{[a,b,c]}{[a,b]}-\frac{[a,b,c]}{[b,c]}-\frac{[a,b,c]}{[c,a]}$$

$$=[a,b,c]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{[a,b]}-\frac{1}{[b,c]}-\frac{1}{[c,a]}\right)$$

⑸球所行進的路徑長，等於以$[a,b,c]$爲邊長之正立方體的對角線長，即$\sqrt{3}[a,b,c]$

⑹球進那個洞的判斷方法，可分別由：

☆$I=\dfrac{[a,b,c]}{a}$，在a邊上來回彈撞的次數，

爲奇數時，表示撞球最後停在平面BCHG上，

爲偶數時，表示撞球最後停在平面ADEF上，同理。

☆$J=\dfrac{[a,b,c]}{b}$，表球進洞時，在b邊上來回彈撞的次數。

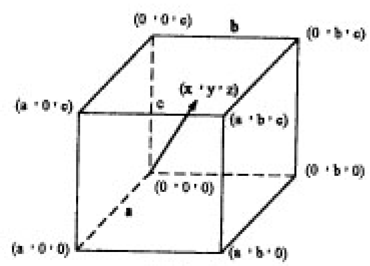
☆$K=\dfrac{[a,b,c]}{c}$，表球進洞時，在c邊上來回彈撞的次數。

可由J，K的奇，偶數來判斷球最後進那個洞。

即

	I	J	K	結　果
情況(A)	偶數	偶數	偶數	進坐標 A (0，0，0)的洞
情況(B)	奇數	偶數	偶數	進坐標 B (a，0，0)的洞
情況(C)	奇數	奇數	偶數	進坐標 C (a，b，0)的洞
情況(D)	偶數	奇數	偶數	進坐標 D (0，b，0)的洞
情況(E)	偶數	奇數	奇數	進坐標 E (0，b，c)的洞
情況(F)	偶數	偶數	奇數	進坐標 F (0，0，c)的洞
情況(G)	奇數	偶數	奇數	進坐標 G (a，0，c)的洞
情況(H)	奇數	奇數	奇數	進坐標 H (a，b，c)的洞

(B)如圖（七），於(0,0,0)置一撞球以向量(x,y,z)發射（其中x,y,z爲正整數）。



圖(七)

⑴球反彈的次數：我們將向量(x,y,z)視同向量(1,1,1)發射的結果則邊長變爲$\frac{a}{x}$，$\frac{b}{y}$，$\frac{c}{z}$，其撞球反彈次數並不改變，但若以$\frac{a}{x}$，$\frac{b}{y}$，$\frac{c}{z}$，代入以向量(1,1,1)的公式，可能會出現分數，故邊長同乘以xyz，則邊長變爲ayz,bxz,cxy,於是得球反彈次數爲：$[ayz,bxz,cxy]\times\left(\frac{1}{ayz}+\frac{1}{bxz}+\frac{1}{cxy}-\frac{1}{[ayz,bxz]}-\frac{1}{[bxz,cxy]}-\frac{1}{[cxy,ayz]}\right)$

⑵如圖（八），若以長、寬、高分別爲a，b，c的立體撞球檯，以向量(x,y,z)爲發射的角度，仿造以向量(1,1,1)並排長方體（如圖中藍色的立方體）的方式去疊，當並排的「長：寬：高」之比爲「x：y：z」時，則正方體即爲由$\frac{a}{x}$、$\frac{b}{y}$、$\frac{c}{z}$爲邊長所並排而成正方體（如圖中紅色的立方體），其邊長爲：[

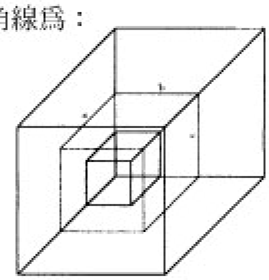
$\frac{a}{x},\frac{b}{y},\frac{c}{z}] = \frac{1}{xyz}[ayz,bxz,cxy]$

而藍色的長寬高分別爲紅色的x倍y倍2倍。紅色的對角線爲：

$\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{xyz}[ayz,bxz,cxy]$

而藍色的對角線（即球所行的路徑長）爲：

$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{xyz}[ayz,bxz,cxy]$



圖(八)

(3)球進那個洞的判斷方法，可分別由：

☆ $I=\frac{[ayz,bxz,cxy]}{ayz}$ ：球進洞時，在a邊來回彈射的次數。

☆ $J=\frac{[ayz,bxz,cxy]}{bxz}$ ：球進洞時，在b邊來回彈射的次數。

☆ $K=\frac{[ayz,bxz,cxy]}{cxy}$ ：球進洞時，在c邊來回彈射的次數。

即

	I	J	K	結　果
情況(A)	偶數	偶數	偶數	進坐標 A (0，0，0)的洞
情況(B)	奇數	偶數	偶數	進坐標 B (a，0，0)的洞
情況(C)	奇數	奇數	偶數	進坐標 C (a，b，0)的洞
情況(D)	偶數	奇數	偶數	進坐標 D (0，b，0)的洞
情況(E)	偶數	奇數	奇數	進坐標 E (0，b，c)的洞
情況(F)	偶數	偶數	奇數	進坐標 F (0，0，c)的洞
情況(G)	奇數	偶數	奇數	進坐標 G (a，0，c)的洞
情況(H)	奇數	奇數	奇數	進坐標 H (a，b，c)的洞

※　我們將平面撞球檯及立體撞球檯撰寫成電腦動畫模擬。

四、研究討論

（一）假設球的大小可視成一個很小的質點在平面或空間中移動。

（二）每一個撞球在發射後具有無限能量在平面或空間中移動，均不受每次碰撞產生的摩擦力或空氣阻力的影響，一直到進洞爲止。

（三）當撞球檯的邊長爲有理數時，也可仿造研究過程中的方法，將有理數化成最簡分數的形式，而將有理數同乘各最簡分數的分母乘積代入各公式，推導出撞球的反彈次數及最後將進那個洞公式不變，而行進路徑長必須除以各最簡分數分母的乘積，將公式整理如下：

A.平面撞球檯：

在長m（化爲最簡分數 $\frac{m_2}{m_1}$）寬n（化爲最簡分數 $\frac{n_2}{n_1}$）（其中m、n皆爲正有理數，而m_1,m_2,n_1,n_2皆爲正整數）的平面撞球檯ABCD如圖（九），以向量(X,Y)發

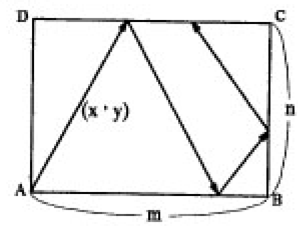
射：

(1)球反彈次數爲 $[m_2n_1y，m_1n_2x](\frac{1}{m_2n_1y}+\frac{1}{m_1n_2x}-\frac{2}{[m_2n_1y，m_1n_2x]})$

(2)行進的路徑長爲 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xym_1n_1}\times[m_2ny，m_1n_2x]$

(3)球進那個洞判斷方法，計算

$I=\frac{[m_2n_1y，m_1n_2x]}{m_2n_1y}$　　　$J=\frac{[m_2n_1y，m_1n_2x]}{m_1n_2x}$



圖(九)

即

	I	J	結　　果
情況(A)	偶數	偶數	進左下角的 A 洞
情況(B)	奇數	偶數	進右下角的 B 洞
情況(C)	奇數	奇數	進右上角的 C 洞
情況(D)	偶數	奇數	進左上角的 D 洞

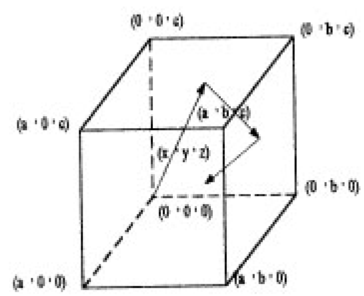
B.立體撞球檯：

在長m，寬n，高h的立體撞球檯中，

(m,n,,h皆爲正有理數且 $m=\frac{m_2}{m_1}$, $n=\frac{n_2}{n_1}$, $h=\frac{h_2}{h_1}$)

(m_1,m_2,n_1,h_1,h_2 皆爲正整數，如圖（十）於

(0,0,0)的角落置一球以向量(x,y,z)發射：



圖(十)

(1)撞球反彈的次數爲：

$$[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]\times(\frac{1}{m_2n_1h_1yz}+\frac{1}{m_1n_2h_1xz}+\frac{1}{m_1n_1h_2xy}-\frac{1}{[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz]}-\frac{1}{[m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]}-\frac{1}{[m_1n_1h_2xy，m_2n_1h_1yz]})$$

(2)行進路徑長爲： $\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{xyzm_1n_1h_1}\times[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]$

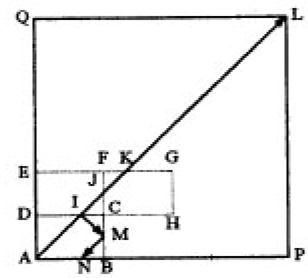
(3)進那個洞判斷方法，計算：　$I=\frac{[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]}{m_2n_1h_1yz}$

$J=\frac{[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]}{m_1n_2h_1xz}$　　$K=\frac{[m_2n_1h_1yz，m_1n_2h_1xz，m_1n_1h_2xy]}{m_1n_1h_2xy}$

即

	I	J	K	結　　果
情況(A)	偶數	偶數	偶數	進坐標 A (0，0，0)的洞
情況(B)	奇數	偶數	偶數	進坐標 B (a，0，0)的洞
情況(C)	奇數	奇數	偶數	進坐標 C (a，b，0)的洞
情況(D)	偶數	奇數	偶數	進坐標 D (0，b，0)的洞
情況(E)	偶數	奇數	奇數	進坐標 E (0，b，c)的洞
情況(F)	偶數	偶數	奇數	進坐標 F (0，0，c)的洞
情況(G)	奇數	偶數	奇數	進坐標 G (a，0，c)的洞
情況(H)	奇數	奇數	奇數	進坐標 H (a，b，c)的洞

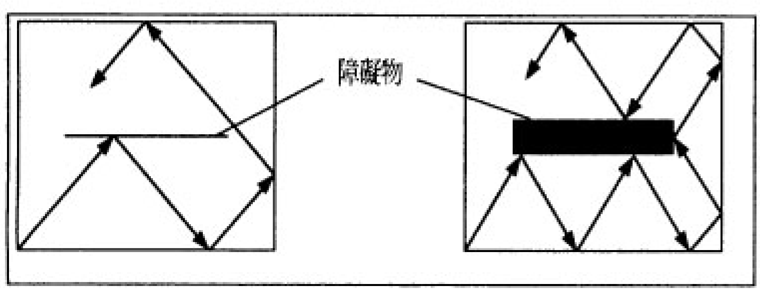
（四）無論是平面或是立體撞球檯，以情況(A)而言最後進入(0,0)或(0,0,0)的洞是永遠不會發生的情況，其原因是：（以下圖(十一)爲例）若 $I=\frac{[a,b]}{a}$，$J=\frac{[a,b]}{b}$，皆是偶數；按事理應是進左下角的A洞，但這是不成立的，因若 $\frac{[a,b]}{a}$ 爲偶數，則代表正方形邊長 $\overline{AP}$ 爲a的偶數倍，則此正方形就不是以[a,b]爲邊長，而是以[a,b]的倍數爲邊長，所以進左下角的A洞是不成立的，同理以向量(x,y)發射和立體撞球檯中以向量(1,1,1)、向量(x,y,z)發射的撞球，也是一定不會進原發射角落的那個洞。



圖(十一)

（五）帶平面二維的撞球檯中，若x、y（或 $\frac{x}{y}$）皆爲無理數時，球將永遠不會進洞，且其路徑將均勻的遍佈整個球檯。而立體三維的撞球檯中，若x、y、z皆爲無理數時，球亦永遠不會進洞，且其路徑亦均勻的遍佈整體立體球檯。

（六）本文所討論的內容，可再加入阻擋物，即在撞球檯中放入障礙板或障礙檯，討論其影響進洞及路徑的結果，如下圖：此可作爲日後再研究推廣的方向。



五、結論

（一）本研究立體撞球檯設計理念爲平面撞球檯的延伸，將二維的平面空間推展爲三組的立體空間，以期眞實的模擬出球在球檯中的運動情形，結果顯示球在立體球檯中的反彈次數，行進路線以及進洞情形和平面撞球檯的分析結果相關。

（二）本研究探討出球發射向量(X,Y,Z)、球檯幾何性質（長、寬、高）和進洞結果的關係，並發現當球無論朝何個方向發射，都絕不會進原發射角落的洞。

（三）本研究發現無論是平面球檯或是立體球檯，當球發射向量爲無理數時，理論上球的路徑會分佈於整個球檯中，並會發生球不進洞的現象。

評語

本件作品主要探討在長方體中球之碰撞，反射進洞（即進入長體之頂點位置），且探求進洞前碰撞之次數等，整個問題相當完整。