從布落卡點談起──
三角形中所有的類布落卡點的探討

國中組數學科第二名

基隆市立中正國民中學　　　　　　作　　者：張成偉、林一帆

指導教師：林耀南、張淑敏

一、研究動機

在一次數學課時老師提到從直角三角形的頂點開始，連續往三邊作垂線，垂足點會逼近同一點如圖(1)，P_1，P_2，P_3，P_4……P_n，我們將此趨近點P與三頂點A，B，C連接後發現$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$將P點的周角分成三對與原三角形內角相等的角，如圖(2)，∠1=∠A，∠2=∠B，∠3=∠C，這很神奇，我們從老師口中約略的知道，此點叫布落卡點，但對一般三角形卻不知要怎麼去作出該點，這引起我們想要深入的去探討其中道理的興趣，老師也鼓勵我們去研究。

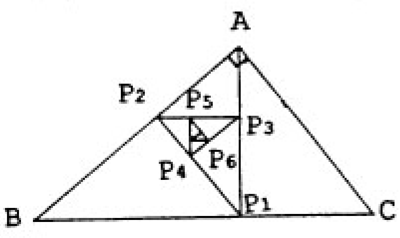


圖 (1)

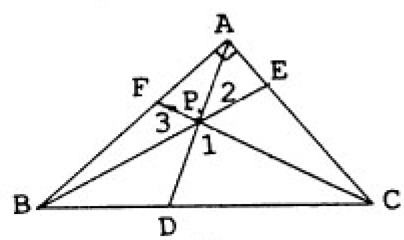


圖 (2)

二、研究目的

（一）尋找布落卡點的尺規作圖法。

（二）探討布落卡點的性質及與外心的關係。

（三）尋找「類」布落卡點的位置與性質。

三、研究過程

爲了研究圖(2)中的$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$三塞瓦線的存在性，我們查遍了學校圖書館中

有關數學的書，結果都找不到，到外面大型書店找了好久都沒有關於P點的文章，令我們都很失望，還好我們看到了另一種作圖法叫阿基米德紙條作圖法，它被用於將一個角三等分。我們利用這種作圖法先將三角形的P點畫出，以便我們刺探它所具有的性質。

已知：△ABC

求作：作三條塞瓦線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於P，使∠CPD=∠A，∠APE=∠B，∠BPF=∠C

作法：⑴在平面上作三直線$\overleftrightarrow{XY}$、$\overleftrightarrow{ST}$、$\overleftrightarrow{MN}$交於O使∠YOT=∠A，∠NOX=∠B，∠SOM=∠C

⑵取另一張紙，描下△ABC，並將△ABC剪下。

⑶將△ABC套在三直線上，使點B在$\overleftrightarrow{ST}$上，點A在$\overleftrightarrow{XY}$上，分別沿$\overleftrightarrow{ST}$、$\overleftrightarrow{XY}$調動A、B，使點C恰巧落在$\overleftrightarrow{MN}$上，如圖⑶。

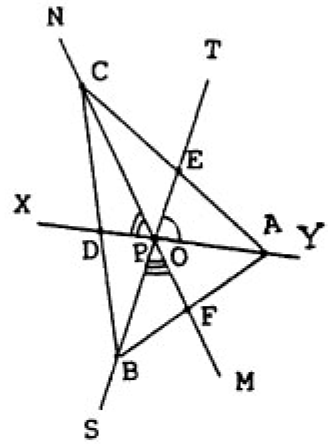


圖 ⑶

⑷將$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$畫回原△ABD上，設交於P，則點P即爲所求。

上述作法中，三直線$\overleftrightarrow{XY}$、$\overleftrightarrow{MN}$、$\overleftrightarrow{ST}$亦可變動爲使∠YOT=∠A，∠SOM=∠B，∠NOX=∠C，且令交點爲Q，觀察得Q爲順時針交點，P爲逆時針交點。在正△中P、Q重合並與內心、外心、重心、垂心共點，因此把此點暫稱爲「角心」，若P點稱爲「逆角心」，則Q點稱爲「順角心」。

性質一：

逆角心的三個逆偏角皆相等，如圖⑷。順角心亦同，且順偏角恆等於逆偏角。

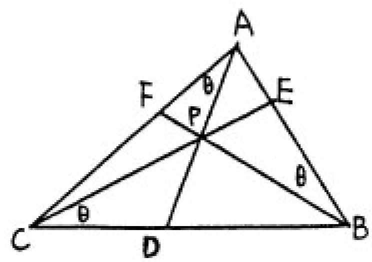


圖 ⑷

觀察直角△中的P點發現，P點的垂足△與原△相似。但依斯蒂瓦特(B.M.Stewart)的發現：任意n邊形的第n個垂足n邊形與原n邊形是相似的。依此說法，第三個垂足△才與原△相似，而我們的P點竟然在第一個垂足△即與原△相似，是湊巧嗎？不是的。

性質二：

逆角心的垂足△必與原△相似，順角心亦同。

我們把內接相似△先區分爲順時針、逆時針、完全倒反相似。而在逆時針內接相似△群中，P點是它們每個△的逆角心，眞奇妙。

性質三：

所有同逆偏角的內接相似△與原△共用逆角心P點，順角心Q點亦同。

性質四：

在任意△中，共用逆角心P點的整群內接相似△中，周長最短的是P點所在的垂足△，Q點亦同，且P點和Q點所造成的兩個垂足△是全等的。

緊接著要介紹「垂線△」，在三角形的三邊上各任取一點，並分別對該點作該邊的垂線，此三垂線所形成的△被稱爲垂線△，我們發現垂線△必與原△相似。現在若我們對共用P點的整群內接相似△的三頂點皆作出它們的垂線△，我們會發現整群的垂線△位似，也就是說諸垂線△的對應頂點共線且指向同一投影中心點，這中心點就是P點，Q點也有相同的現象。到此我們已找到了角心P或Q的初步尺規作圖法，操作大綱如下：

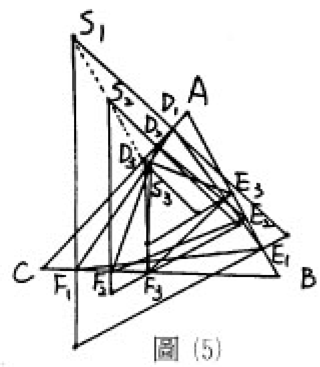


圖 (5)

步驟一：在最大角上先定出同一方向內接相似△的局部範圍。

步驟二：在上述局部範圍內任意作出兩個內接相似△。

步驟三：分別作出上述兩△的垂線△，如圖(5)。

步驟四：分別連接兩垂線△的對應頂點，則交點即爲所求。

上述作法可作出P點或Q點，依你取的局部範圍來決定。若假設逆偏角爲θ，則P點的垂足△與原△的邊長比爲$\sin\theta$，而θ與原△的三邊長a、b、c的關係式爲

$$\tan\theta=\frac{4\cdot\triangle ABC}{a^2+b^2+c^2}$$

我們更進一步的發現在P點處的相似內接△的垂線△亦共用逆角心P，也因此我們發現了一種更快速有效的P點作圖方式：

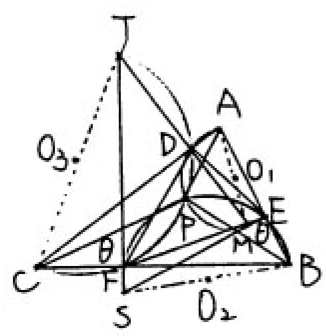


圖 (6)

步驟一：在P點群的局部範圍內任作一個內接相似△DEF

步驟二：作△DEF的垂線△MST

步驟三：連接三對對應點$\overline{AM}$、$\overline{BS}$、$\overline{CT}$

步驟四：分別以$\overline{AM}$、$\overline{BS}$、$\overline{CT}$爲直徑作半圓，交於一點P，點P即爲所求。如圖(6)。

經由上述討論，我們也發現外心O亦爲完全倒反內接相似△群的不動點，且

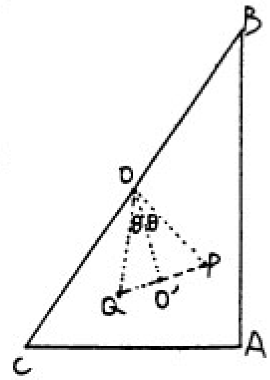
O點的垂足△也是諸同群內接相似△中邊長最小者。針對O、P、Q三點我們發現了下列性質：

性質五：

（一）P點到原△三頂點距離和等於Q點到原△三頂點的距離和。

（二）P點到三垂足距離和等於Q點到三垂足距離和。

（三）P點到三垂足距離和與P到原△三頂點距離和比值恆等於sin θ 。



圖（7）

性質六：

任意△的外心O與P，Q兩點恆形成一個等腰△或重合，其中$\overline{OP}=\overline{OQ}$，且頂角∠POQ恆等於兩倍的偏角θ 。如圖(7)。

性質七：

任意△的偏角θ的範圍恆爲0°＜θ ≦30° 。

性質八：

P或Q點處的最小內接相似△恆小於或等於外心O點處的最小內接相似△，但在正△中兩者相等。

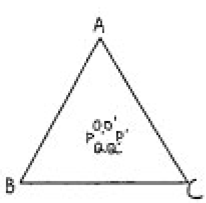
由上述性質來看，任何△中的P、Q、O三點之間有著密不可分的關係，而O點是那麼的出名，反觀P、Q兩點卻被冷落了好幾百年，公平嗎？

由以上總括看來，O，P，Q是三角形中內接相似三角形的旋轉中心，但三角形中，是否只有O，P，Q三個旋轉中心呢？關鍵應在內接相似三角形群到底有多少群？當在不等邊三角形中，我們發現另外三群互換左右邊的內接相似三角形，且進一步的發現各垂線△的旋轉中心點，分別爲O'，P'，Q'三點，因此在三角形中，內接相似三角形旋轉中心的個數可分爲三類：如圖(8)，(9)，(10)。

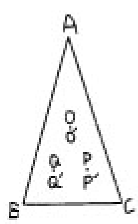
第一類：正三角形中六個旋轉中心共點。

第二類：任意等腰△中，六點兩兩共點，僅剩O，P，Q三點。

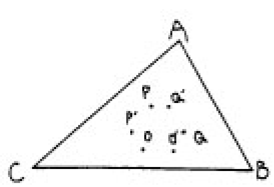
第三類：在不等邊△中，六個旋轉中心O，P，Q，O'，P'，Q'同時存在。



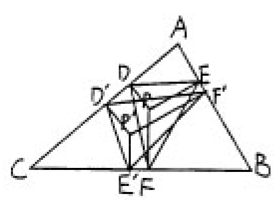
圖（8）



圖（9）



圖（10）



圖（11）

上述文章中的O'，P'，Q'的位置，我們以P，P'爲例，如圖K ，其中△DEF、△D'E'F'各爲P，P'點的垂足△，∠D=∠D'=∠A，$\overline{DE}$：$\overline{DF}$=$\overline{D'F'}$=$\overline{AB}$：$\overline{AC}$而O'、P'、Q'又具有那些性質呢？

性質九：

在原△中，P'點的三塞瓦線，可將三內角的每一內角分割成兩種偏角；而這兩偏角與垂足△對應角被分割的兩偏角位置相反，角度相等，同時在此P'點處的周角被原△三塞瓦線分割成三對對頂角，其中兩對對頂角相等，角度爲兩偏角和，另一對對頂角角度與兩偏角角度和兩倍互補。Q'，O'點亦有相同的現象。

性質十：

若原△的三內角中有一個角爲60°時，則在P'點處的三塞瓦線必將其周角六等分，反之亦然。O'、Q'點有同樣的現象。

最後我們想去探討一件最有趣的現象，那就是六個類布落卡點是否會共圓？首先觀察圖(8)，在正△中六個類布落卡點共度，點是圓的縮影，因此六點有可能共圓。再觀察圖(9)，等腰△中六個類布落卡點兩兩重合形成三點，三點當然共圓。而如圖(10)，在不等邊的三角形中，六類布落卡點分散在大約同一圓周上，這加強了我們的信心。

爲了證明六個類布落卡點共圓，我們嘗試了各種方法，難度非常高，花了很長的時間，我們取易於觀察及計算的直角三角形來說明，如圖(12)，設A(0,0)，B(0,b)，C(c,o),$\overline{BC}$=a

$\overleftrightarrow{bc}$方程式爲$y=-\frac{b}{c}x+b$

在直角△ODE中，$\overline{OD}=\frac{b}{2}$，$\overline{OE}=\frac{c}{2}$

∵△O'FG～△ODE

∴令$\overline{O'F}=k\,\overline{OD}=\frac{b}{2}k$，$\overline{O'G}=k\,\overline{OE}=\frac{b}{2}k$

∴得$O(\frac{c}{2},\frac{b}{2})O'(\frac{b}{2}k,\frac{c}{2}k)$代入$\overleftrightarrow{BC}$

得$k=\frac{2bc}{a^2}$，$O'(\frac{b^2c}{a^2},\frac{bc^2}{a^2})$，

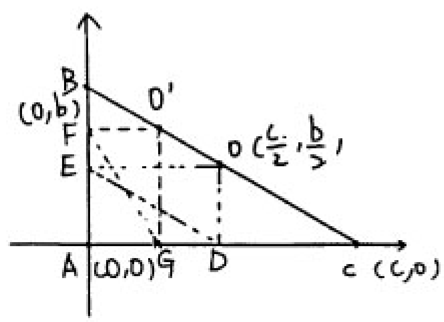


圖 (12)

△O'FG邊長：△ABC邊長=$\frac{bc}{a^2}$

而△ODE邊長：△ABC邊長=$\frac{1}{2}$

由$(b-c)^2\geqq 0$ 恆成立，知$b^2-2bc+c^2\geqq 0$，$b^2+c^2\geqq 2bc$，

∴$\frac{1}{2}\geqq\frac{bc}{b^2+c^2}$，∴$\frac{1}{2}\geqq\frac{bc}{a^2}$，表示O'點的最小內接相似△恆小於或等於O點處

的最小內接相似△。

接下來要計算Q點坐標，設兩塞瓦線$\overline{AH}$、$\overline{CI}$交於Q，使∠BAH=∠ACI=θ，而 $\tan\theta=\frac{4\triangle ABC}{a^2+b^2+c^2}=\frac{bc}{a^2}$，如圖⒀。

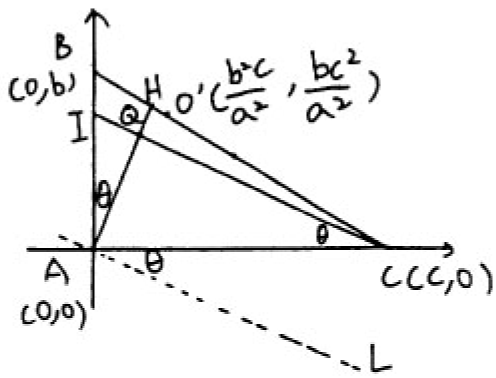


圖 ⒀

$\overleftrightarrow{AH}$：$y=\tan(90°-\theta)X=\cot\theta\cdot X$

設L過A且平行$\overline{CI}$，則L：$y=\tan(-\theta)\cdot X=-\tan\theta\cdot X$

令$\overleftrightarrow{CI}$：$y=-\tan\theta\cdot X+K$，(K為常數)

將C(c,0)代入，得$K=c\tan\theta$，∴$\overleftrightarrow{CI}$：$y=-\tan\theta\cdot X+c\tan\theta$

再求$\overleftrightarrow{AH}$與$\overleftrightarrow{CI}$的交點Q

$$\begin{cases} y=\cot\theta\ X \\ y=-\tan\theta\cdot X+c\tan\theta \end{cases}$$

解得$Q(c\tan\theta/\cot\theta+\tan\theta, C/\cot\theta+\tan\theta)\rightarrow Q(c\sin^2\theta, c\sin\theta\cdot\cos\theta)\rightarrow Q(\frac{b^2c^3}{a^4+b^2c^2}, \frac{a^2bc^2}{a^4+b^2c^2})$

到此，我們可以先證出O、O'、P、Q四點共圓。

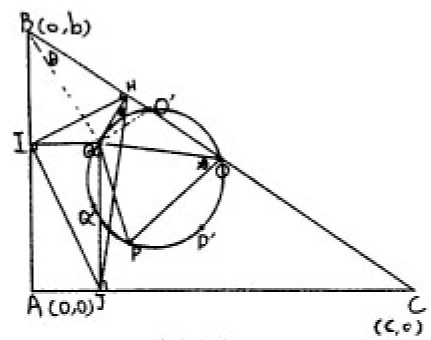


圖 ⒁

如圖⒁，$\overline{O'B}=\sqrt{(b^2c/a^2)^2+(b^2c/a^2-b)^2}=b^2/a$

而$\overline{O'Q}=\sqrt{(b^2c/a^2-c\sin^2\theta)^2+(bc^2/a^2-c\sin\theta\cdot\cos\theta)^2}$

$=(bc\cos\theta-c^2\sin\theta)/a$

由$\overline{O'Q}/\overline{O'B}=\sin\theta$ 得證∠BQ'O為直角

∴$\angle BQH+\angle HQO'=\theta+\angle BQH=90°$

又$\angle HQO'=\theta$，$\angle HQJ=\theta$，∴$\angle HO'Q=90°-\theta=\angle QPO=\frac{180°-2\theta}{2}=90°-\theta$

也就是說外角等於內對角，得證O'，Q，P，O四點共圓。

緊接著我們也可以算出P點坐標，如圖⒂。

$\overleftrightarrow{AP}$：$y=\tan\cdot X$，過A，作$L'//\overline{BP}$

L'：$y=\tan(90°+\theta)\cdot X=-\cot\theta\cdot X$

令$\overleftrightarrow{PB}$：$y=-\cot\theta\cdot X+K$，K為常數

將(o,b)代入得b=K

∴$\overleftrightarrow{PB}$：$y=-\cot\theta\cdot X+b$

由$y=-\cot\theta\cdot X+b$

　$y=-\tan\theta\ X$

得P($b\sin\theta\cos\theta$，$b\sin^2\theta$)

此時P點處的最小內接相似△與原△的邊長比為$\sin\theta$

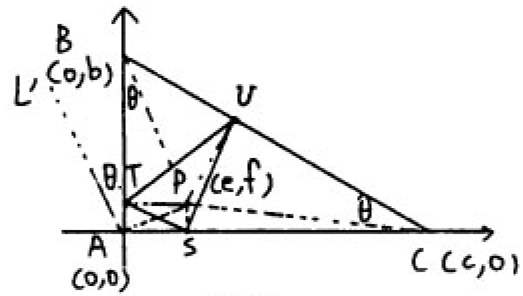


圖 ⒂

而$\sin\theta=\dfrac{bc}{a^4+b^2c^2}<\dfrac{bc}{a^2}$ 恆成立，知P點恆小於O'點。

又△OPQ的外接圓半徑$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overline{PQ}}{\sin2\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\theta\cdot\sqrt{a^2-4bc\sin\theta\cdot\cos\theta}}{\sin2\theta}$

$=\sqrt{b^4-b^2c^2+c^4}/4a$

下一步我們要算Q'點的坐標，如圖⒃。

設Q'(m,n)，垂足各為M(m,0)，N(0,n)，L(t,(bc-bt)/c)

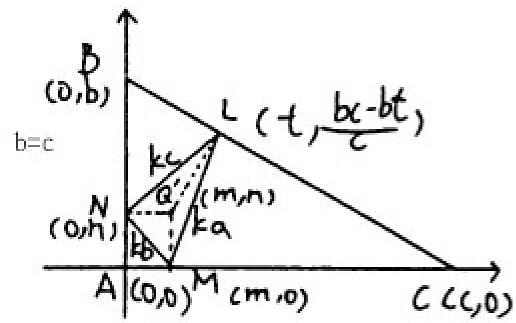


圖 ⒃

$\overleftrightarrow{BC}$：$y=-\dfrac{b}{c}x+b$

$\overleftrightarrow{NL}$：$[n-(bt-bc)/c]X+ty=tn$

$\overleftrightarrow{NM}$：$nx+my=m\cdot n$

$\overleftrightarrow{QL}$：$(cn-bc+bt)x-m(cn-bc+bt)=(cm-ct)y-n(cm-ct)$

由 $\begin{cases}\overline{NM}=kb & \text{(k為常數)}\\ \overline{NL}=kc & \\ \overleftrightarrow{NL}\perp\overleftrightarrow{NM}\text{，斜率乘積}=-1 & \\ \overleftrightarrow{Q'L}\perp\overleftrightarrow{BC}\text{，斜率乘積}=-1 & \end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\sqrt{m^2+n^2}=kb\\ \sqrt{t^2+[n-(bc-bt)/c]^2}=kc\\ bnt+cn^2-bcn=-mct\\ bcn-b^2c+b^2t=c^2m-c^2t\end{cases}$

經過複雜的計算得Q'($b^2c/4b^2+c^2$，$2b^3/4b^2+c^2$)，並得$k=b/\sqrt{4b^2+c^2}$

那麼Q'點的最小內接相似△邊長與P點的大小關係如何呢？

設Q'的$k_1=b/\sqrt{4b^2+c^2}$，而P的$k_2=bc/\sqrt{a^4+b^2c^2}$

令$k_1=k_2$來觀察　$b/\sqrt{4b^2+c^2}=bc/\sqrt{a^4+b^2c^2}$　得$a=\pm\sqrt{2c}$，代入$a^2=b^2+c^2$知　b=c 成立，也就是說△ABC為等腰△。

又當$b \neq c$時，$k_1=b/\sqrt{4b^2+c^2}=bc/\sqrt{4b^2c^2+c^4}$，$k_2=bc/\sqrt{a^4+b^2c^2}$的分子化為相同後比較分母，$k_1$分母$-k_2$分母$=4b^2c^2+c^4-a^4-b^2c^2=b^2(c+b)\cdot(c-b)$知道它的正負是由$c-b$來決定。

綜合上述討論，歸納如下：

在直角△中，兩股b、c的大小與Q'點，P'點的大小關係為：

(1)若$b=c$時，Q'點邊長恆等於P點邊長，也就是△ABC的最小內接相似△出現在P，P'，Q，Q'中的任一點。

(2)若$b>c$時，k_1分母＜k_2分母，得$k_1>k_2$，∴Q'點大於P點，

(3)若$b<c$時，k_1分母＜k_2分母，得$k_1<k_2$，∴Q'點小於P點。

同樣的方法，我們可計算出P'點的坐標及其K值。如圖[17]

P'$(2C/b^2+4c^2，bc^2/b^2+4c^2)$，$k=C/\sqrt{b^2+4c^2}$

經與P點的k值比較發現，

(1)當$b=c$時，P'點的邊長等於P點邊長。

(2)當$b>c$時，P'點的邊長小於P點邊長。

(3)當$b<c$時，P'點的邊長大於P點邊長。

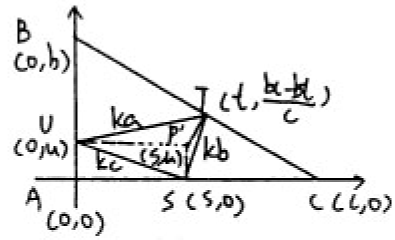


圖 [17]

到此我們可以整理六個類布落卡點的K值如下：

（甲）若$b=c$時，O=O'>P=Q=P'=Q'，即P，Q，P'，Q'處皆為最小內接來△產生點。

（乙）若$b>c$時，O=O'>O'>P=Q>P'，即P'處有最小內接相似△。

（丙）若$b<c$時，O>O'>P'>P=Q>Q'，即Q'處有最小內接相似△。

由O，O'，P，Q四點共同可算出其外接圓的圓心，再由圓心，半徑即可確定P'，Q'皆在此外接圓上，因此得證這六個類布落卡點共圓。對於一般性的任意△，由於計算相當複雜，我們想留待以後再研究，本研究到此打住。

四、結論

1.正逆布落卡點的垂足△與原△相似，順偏角等於逆偏角，偏角Q與原△的關係為$\tan=\dfrac{4\triangle ABC}{a^2+b^2+c^2}$，而Q的範圍恆為$0°<\theta\leqq 30°$。

2.任何△的外心O與P，Q三點，恆形成一個等腰△或重合成一點，其中$\overline{OP}=\overline{OQ}$，且頂角∠POQ恆等於兩倍的偏角$\theta$。

3.任意△的布落卡點可利用兩個內接相似△及其垂線△畫出或更改進為只用

一個內接相似△及其垂線△有效率的畫出。

4.一般△共有六群的內接相似△，而各群內接相似△的垂線△組成一群位似△，每群位似△各有一個投影中心點，其中兩個即爲布落卡點P，Q，而另外四點分別叫O，O'，P'，Q'。在正△中六點重合，在等腰△中，O=O'，P=P'，Q=Q'，在一般△中，六點分散。

5.直角△中，六個類布落卡點共圓，且設兩股長各爲b，c，則

(1)當b=c時，△ABC的最小內接相似△出現在P，P'，Q，Q'中的任一點。

(2)當b>c時，△ABC的最小內接相似△出現在P'點處（靠小邊處）

(3)當b<c時，△ABC的最小內接相似△出現在Q'點處（靠小邊處）

6.直角△中，六個類布落卡點的垂足△邊長與原△邊長的比值k，列出如下表。（b，c爲兩股長，a爲斜邊長）

類布落卡點 / 比值	O	O'	P	Q	P'	Q'
K	1/2	$2bc/a^2$	$bc/\sqrt{a4+b^2c^2}$	$bc/\sqrt{a4+b^2c^2}$	$c/\sqrt{b^2+4c^2}$	$b/\sqrt{4b^2+c^2}$

五、參考資料

1.國中數學選修上、下冊（國立編譯館）。

2.高中數學一、二冊（國立編譯館）。

3.幾何學的新探索（凡異出版社）。

4.100個著名初等數學問題歷史和解答（凡異出版社）。

評語

本件作品是在探討布落卡點，文中討論相當嚴謹與完整，組織亦嚴密，發表能力強，特予以推薦。

回上一層