公主如何救王子

高小組數學科第二名

台北市立師院附設實驗國民小學　　作　　者：楊皓琮、翁郁婷

指導教師：許仟幸、蔡淑英

一、研究動機

今天上自然課，老師要我們作科展，我回家後就開始找題目來做，因爲可以做的時間不多。我忽然想到參觀前年本校校內科展時，一個有趣的問題，裡面的內容大約是這樣的：

有一位落魄的王子在別國做錯事，那裡的國王要殺掉他，就爲他出了一個難題，要王子和另外八個死刑犯站在一起，讓一位公主來數，從第一個開始，數到七，就殺死那個人，一直數，數到就殺，但如果最後剩下王子沒死，王子就可以回國。最後公主用智慧救了王子回國了。

當時我覺得他們解決這問題，如果犯人的人數隨便改，或改成不是七個一數呢？我記得他們每次都要從新算，而且要算很久，因此我認爲他們並沒有研究出這類問題的一些關係，所以我就決定用這個題目來做這次科展的問題。

二、研究目的

（一）探討解決上述問題的一般情形（即「七個一數」與「總人數」可以變動）的規律與關係。

（二）上述問題如更改成公主也參與排隊，當公主與王子是最後被殺的兩人時，則可以活命。那麼這兩個人的位置有怎樣的關係？

三、研究設備

1.計算紙。2.筆（含色筆）。3.電腦。4.印表機。

四、研究過程與結果

爲解決這個問題，我們首先畫9個圈圈代表九個人，再每7個一數，就畫去一

個圈圈，表示此人被殺死，最後發現王子要排在第二個就不會死。

接著我們想說，解決這種問題是不是有一些規律可循？我們就改變一下總人數，試試看王子要在哪一位置才不會死，得到如下的結果：

總人數	2	3	4	5	6	7	8	9
王子的位置	2	3	2	4	5	5	4	2

我們從解決這問題的過程中發現如下的規律：

假設已知總人數有□人，王子的位置是在第△位位置就不會被殺死，則總人數爲□＋1人時，設（△＋7）÷（□＋1）的餘數爲r，

⑴當r≠0，則王子的位置是在第r的位置就不會被殺死。

⑵當r＝0，則王子的位置是在第□＋1的位置就不會被殺死。

且此規律也可類似地推廣到任意「m個一數」，即：

假設原問題改成m個一數，且已知總人數有□人，王子的位置是在第△位置就不會被殺死，則總人數爲□＋1人時，設（△＋m）÷（□＋1）的餘數爲：

⑴當r≠0，則王子的位置是在第r的位置就不會被殺死。

⑵當r＝0，則王子的位置是在第□＋1的位置就不會被殺死。

接著，我們沿用上述類似的想法，思考所有人被殺的順序關係，當然排在最後被殺的人，依照問題的遊戲規則是可以活命的。我們利用符號來幫助思考這問題。設有n個人，第1個人是第a1個被殺死，第2個人是第a2個被殺死，…，第n個人是第a_n個被殺死那麼n+1個人時，設第1個人是第b_1個被殺死，第2個人是第b_2個被殺死，…，第n+1個人是第b_n+1個被殺死，即如下圖。

n 個人	1	2	3	………	n	
第幾個被殺	a_1	a_2	a_3	………	a_n	

n+1 個人	1	2	3	………	n	n+1
第幾個被殺	b_1	b_2	b_3	………	b_n	b_{n+1}

我們推知兩者的關係是：

⑴當n≧6時，則：

$$\boxed{\begin{array}{l} b_7=1，b_8=a_1+1，\ldots，b_n=a_{n-7}+1，b_{n+1}=a_{n-6}+1， \\ b_1=a_{n-5}+1，b_2=a_{n-4}+1，\ldots，b_6=a_n+1。\end{array}}$$

(2)當n＜6時，設7÷(n+1)的餘數爲r，則：

$$b_r=1，b_{r+1}=a_1+1\quad，\ldots，b_{n+1}=a_{n+1-r}+1，$$
$$b_1=a_{n+2-r}+1，\ldots，b_{r-1}=a_n+1。$$

我們利用上述這種關係，從總人數最少的情形開始（即n＝2的情形），逐一得到總人數＝2,3,4,⋯，20的各情形下被殺的順序，如下表：

人	1	2																		
被殺的順序	1	2																		
人	1	2	3																	
被殺的順序	1	2	3	…																
人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
被殺的順序	16	17	5	3	14	7	1	11	10	12	9	4	6	2	15	13	8			
人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
被殺的順序	5	7	3	16	14	9	1	17	18	6	4	15	8	2	12	11	13	10		
人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
被殺的順序	9	3	13	12	14	11	1	6	8	4	17	15	10	2	18	19	7	5	16	
人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
被殺的順序	3	19	20	8	6	17	1	10	4	14	13	15	12	2	7	9	5	18	16	11

觀察上述的表格中，發現一個有趣的現象，最後被殺的兩人剛好是連號。這規律會一直成立嗎？或是上述問題想像改成公主也參與排隊，以及公主與王子是最後被殺的兩人，則可以活命。那麼這兩個人的位置有怎樣的關係？這時，我們形成以下三種猜測：

猜測１：「當總人數增加到某一大數時，這最後被殺兩個人的位置，會回到連在一起的情形。且這時又再隨著總人數的增加，又逐漸地開始慢慢分開，如此循環著這規律。」

猜測２：「隨著總人數的增加，這最後被殺兩個人的位置，會越離越遠。」

猜測３：「如果將7個一數就殺死那人，改成其他的“一數”就殺死那人，可能最後被殺死的兩個人的位置，不管總人數是多少都會一直連在一起。有這種“一數”嗎？」

爲研究這個問題，我們重新思考原問題，這時我們把第一個人與最後一個人

想像排成一圈，即說第一個人與最後一個人這兩個人是相鄰的。設最後被殺兩個人位置之間的距離，爲他們起初位置的差。例如若最後被殺兩個人是相鄰時，我們說他們之間的距離是１；若最後被殺兩個人中間有一位時，他們之間的距離是２。

如此「7個一數」，當總人數爲2到23個人時，最後被殺兩個人的位置是相鄰的，也就是說此時他們之間的距離是１。當總人數爲24到27個人時，最後被殺兩個人之間的距離是２。當總人數爲28到36個人時，最後被殺兩個人之間的距離是3。

這樣似乎指出，「7個人一數時，隨著總人數的增加，則最後被殺兩個人之間的距離會逐漸地增大。」然而，不同的"一數"時，是否也具有這樣的規律？因此我們就分別以「二個一數」、「三個一數」、「四個一數」、「五個一數」、…、「十個一數」、「十一個一數」等等來試試看最後被殺兩個人之間的距離到底是否會隨著總人數的增加而增大，還是會一直相鄰著？經我們分別對不同的「一數」試試看後，整理成10個表格。我們是利用第8頁中所找到的規律，完成這10個表格。從這10個表格中，發現它們也都具有：「隨著總人數的增加，則最後被殺兩個人之間的距離會逐漸地增大。」其中特別是「九個一數」直到總人數增加到92個人時，最後被殺兩個人才開始不相鄰。

因此，我們重新形成這個猜測：「隨著總人數的增加，則最後被殺兩個人之間的距離會逐漸地增大。」並證明於下。以下證明以「7個一數」的特例證明這個猜測，而一般情形（即其他一數的情形）也可以是類似的證明。

定理１：設有n個人，依序排成一環狀，從第１號編到第ｎ號。若從第１個開始數，數到7，就殺死那一個人，再一直數到7，就再殺死那個人，一直如此下去。設最後被殺兩個人原先位置間的距離爲Ｘ，則總總人數ｎ越來越大時，Ｘ的值也會隨著ｎ值逐漸地變大或不變，但不會縮小。〔證明：略〕。

因此，由定理１可知最後被殺兩個人的距離會隨著總人數增大或不變，但並不會產生前述猜測１的結果。爲解決猜測２與猜測３哪一個較正確？首先我們從「１個一數」的情形考慮，顯然最後被殺的兩人是排在最後兩個位置，也就是不管總人數爲多少，最後被殺的兩人會剛好是連號，即最後被殺的兩人不會分開。除了「１個一數」以外的其他個一數，是否也有可能發生這種情形，即最後被殺的兩人一直相鄰？

我們再回去研究「２個一數」、「３個一數」、「４個一數」、「５個一數」、…、「10個一數」、「11個一數」等這10 個表格。發現一個有趣現象：「2個

一數」、「5個一數」、「8個一數」、及「11個一數」在總人數爲4時，最後被殺的兩人都剛好分開。經我們研究發現這些一數在總人數爲3時的第1個被殺都是在第2個位置，因而最後被殺的兩個人一個是在最前面，一個是在最後面；而在總人數爲4時，這些一數最後被殺的兩人就自然就被分開。而「3個一數」與「10個一數」是在總人數爲4時，最後被殺的兩人都剛好一個是在最前面，一個是在最後面；且在總人數爲5時，最後被殺的兩人都剛好分開。這使得我們形成如下的定理２。

定理２：設k除以個一數，且ｋ≧2（如本文中的遊戲規則）。若在總人數爲ｎ時，最後被殺的兩人剛好一個是在最前面的位置，一個是在最後面的位置，則總人數爲n+1時，最後被殺兩人的距離爲2（即這時會分開）。〔證明：略〕。

由這定理指出，重要的是我們要找出哪些「幾個一數」及在總人數爲多少時，最後被殺的兩人剛好是一個在最前面的位置，一個在最後面的位置，這時總人數＋1時最後被殺的兩人就會分開而不會相鄰。首先考慮總人數爲3的情形，且最後後被殺的兩人剛好一個在最前面的位置，一個在最後面的位置，因而此時第1個被殺的人必須是在第2個位置。如下圖（其中以⊕表示第1個人被殺的位置，◎表示最後兩個人被殺的位置）：◎⊕◎

假設「k除以個一數」滿足上述條件，因此得到k除以除以3必餘2，即2或5或8或11或14或17或20或…等等的一數，他們都會在總人數爲4時，最後被殺的兩人剛好分開。

接著考慮總人數爲4的情形，且最後被殺的兩人剛好一個在最前面的位置，一個在最後面的位置，因而此時第1個與第2個被殺的位置必然是在「第2個與第3個」或「第3個與第2個」。

第1種情形：設第1個與第2個被殺的位置是在「第2個與第3個」，如下圖（其中以⊕表示第1個人被殺的位置，⊙表示第2個人被殺的位置，◎表示最後兩個人被殺的位置）：◎⊕⊙◎

假設「k除以個一數」滿足上述條件，因此得到k除以4餘2，且k除以3餘1，即k+2同時是4與3的公倍數。故k=10,22,34,46,…。

第2種情形：設第1個與第2個被殺的位置是在「第3個與第2個」，如下圖（其中以⊕表示第1估人被殺的位置，⊙表示第2個人被殺的位置，◎表示最後兩個人被殺的位置）：◎⊙⊕◎

假設「k個一數」滿足上述條件，因此得到k除以4餘3，且k是3的倍數。我們先列出除以4餘3的數，如下：

3,7,11,15,19,23,27,31,35,39,43,47,51,55…。

再從上述的數列中找出哪些數是3的倍數，故k=3,15,27,39,51,…。合併以上兩種情形得到3,10,15,22,27,34,39,46,51,…等等的一數，他們都會在總人數爲5時，最後被殺的兩人剛好分開。

同樣道理，若考慮總人數爲5的情形，且最後被殺兩人剛好一個在最前面的位置，一個在最後的位置，因而此時第1個、第2個與第3個被殺的位置分別是在第234或243或324或342或423或432等6種情形的位置上。同前述的方法，我們依然可以對這6種情形分別作討論，例如第1種情形，設「k個一數」在總人數爲5時的第1個、第2個與第3個被殺分別是在第2、3、4的位置上，則k除以5餘2且k除以4餘1且k除以3餘1。但我們覺得如此討論下去會過於複雜而停止。

最後，我們推出在m=2及m=3的這兩種特殊情形，王子位置的較快速算法（或公式算法），而不用像前述從總人數最少的情形(n=2)開始，逐次增加1到所要的總人數才可得知王子位置是在哪裡。

我們先考慮m=2（二個一數）的最簡單情形。設a(n)表示在n個人中，二個一數的王子位置。我們先共同算出n=2,3,4,5,…,32個人的情況，發現：王子的位置隨著總人數n的增加，每次移動2格，直到n爲2的次方時，王子的位置又回到1的位置；再隨n數的增加，繼續由左上角往右下角移動。整理結果如下：

「對於任意正整數k，$a(2^k)=1$

且當$2^k \leqq n < 2^{k+1}$時，$a(n)=2\times(n-2^k)+1$。」

例如，當n=30時，$2^4 \leqq 30 < 2^5$則$a(30)=2\times(30-2^4)+1=29$。當n=100時，$2^6 \leqq 100 < 2^7$則$a(100)=2\times(100-2^6)+1=73$。也就是說，對於任意大於或等於2的正整數n，我們可以先將n化成$n=2^k+t$，其中$t=0,1,2,\dots,2^k-1$，立即得到如下的公式：$a(n)=2\times t+1$。

接著，我們考慮m=3（三個一數）的情形。此時設a(n)表示共有n個人，從第一個人開始數，每數到第3個就殺死那一個人，最後剩下那一個人的所在位置，即王子的位置。類似地我們得到如上的關係：

假設a(n)爲一循環節的第1個，那麼a(n)必等於1或2；而且在此循環節中$a(n+k)=a(n)+3\times k$，其中$a(n)+3\times k \leqq n+k$。

因此重要的是如何求出「循環節的第1個是發生在何處及其值是多少？」例如，目前我們知道a(105)=1爲一循環節的第1個，那麼假設下一循環節的第1個是在a(105+k)，則k爲滿足$105+k<1+3\times k$中最小的一個。故k爲滿足$2\times k>104$中最小的一個。所以k=53。故下一循環節的第1個是發生在158時，且因爲$a(157)=1+3\times 52=157$，故a(158)=2。使用這樣的方法我們得出如下定理3。此定理可幫助我

們快速地知道下一循環節的第1個是發生在哪裡，及它的值是1還是2。

定理3：設m=3（三個一數的情形）且第n項是某一循環節的第1個（使用本節討論中的條件及符號），則a(n)值有兩種情況：

1.a(n)=1；這時再細分爲兩種情況：

⑴ $\frac{n-1}{2}$ 爲整數（即n爲奇數），則下一循環環節的第1個發生在總數爲

$$a(\frac{3\times n+1}{2})=1\text{時，且 } a(\frac{3\times n+1}{2})=1\text{。}$$

⑵ $\frac{n-1}{2}$ 不爲整數（即n爲偶數），則下一循環節的第1個發生在總數爲

$$\frac{3\times n}{2}\quad\text{時，且 } a(\frac{3\times n+1}{2})=1\text{。}$$

2.a(n)=2；這時再細分爲兩種情況：

⑴ $\frac{n-1}{2}$ 爲整數（即n爲偶數），則下一循環節的第1個發生在總數爲

$$\frac{3\times n}{2}\quad\text{時，且 } a(\frac{3\times n}{2})=2\text{ 。}$$

⑵ $\frac{n-2}{2}$ 不爲整數（即n爲奇數），則下一循環節的第1個發生在總數爲

$$\frac{3\times n-1}{2}\text{ 時，且 }\frac{3\times n-1}{2}\text{。}$$

證明：（略）。

定理3可類似地推廣到一般的情形。設總人數爲n且「m個一數」，令a(n)表示王子的位置。若我們已知a(n)爲某一循環節的第1項，則此循環節中的任意一項a(n+k)=a(n+k)=a(n)+m×k。設下一循環節的第1項發生在總人數爲n+k時，則k是滿足「a(n)+m×k＞n+k的最小正整數」。因此，⑴當 $\frac{n-a(n)}{m-1}$ 爲整數時，$k=\frac{n-a(n)}{m-1}$。⑵當 $\frac{n-a(n)}{m-1}$ 不爲整數時，這時k等於n-a(n)除以m-1後的整數部分（小數部分捨去）再加1。

接著的問題是下一循環節的第1項（設爲a(n+k)）它的值是多少？我們依a(n+k-1)=a(n)+m×(k-1)的值分爲以下m-1種情形討論，得出a(n+k)的值是多少：

⑴當a(n)+m×(k-1)=n+k-1（倒數第1個），則a(n+k)=m-1。

⑵當a(n)+m×(k-1)=n+k-2（倒數第2個），則a(n+k)=m-2。

⑶當a(n)+m×(k-1)=n+k-(m+1)（倒數第m-1個），則a(n+k)=1。

評語

這是趣味數學著名的Josephus問題，在科展的國中組，高中組都有人處理過。作者從小數開始列舉數據，然後歸納成公式，可以據以推算解法。但是作者對使用不等式或方程式的代數推演了解不完全清楚。雖然前面符合小學高年級的思考模式 ，後段艱深之處宜稍加改進。

回上一層