誰是最後贏家

—「障礙賽跑」遊戲的探討

高小組數學科第一名

台北市士林區雨農國民小學　　　　作　　者：郭哲維、謝依臻、林子筠

指導教師：林瑞廉、林志忠

一、研究動機

教室後面的圖書箱最近圖書媽媽又添購了一些新書，其中「阿草的葫蘆」這本書內容很豐富，但大部份我們都看不懂，畢竟我們年紀還小。裡面偶而有一些數學推理遊戲，倒是能吸引住我們，其中「障礙賽跑」充滿了「障礙」（原文摘錄「阿草的葫蘆」P.347、P.348）：

一個炎熱的下午，阿拓和阿霧兩人在冰店裡聊天納涼。

「該想些遊戲來玩，輸的人付錢。」阿霧提議著。

「你可有什麼新鮮的？」阿拓問道。

「我想起一種遊戲，和百步接力賽跑差不多，暫且叫做障礙賽跑吧！」阿霧一面說著一面拿出撲克牌，把1到6的24張牌找了出來。

「規則和接力賽跑差不多，每個人輪流拿一張牌，把拿出的牌的點數全部累加起來，誰能使加起來的點數成為31點誰就贏，但是超過31點要算輸。」

「嗯，這和最多六步，最少一步的接力賽跑又有什麼不同？」阿拓問道。

「當然不同，要不然怎麼叫做障礙賽跑？只是你一時還看不到障礙罷了！要不要試一試？」阿霧說道。

阿拓接受了挑戰，但滿腹狐疑，猜不透其中的機關：「由我開始好了，31除以7餘3，照接力賽跑的原則，我先拿3。」阿拓說。

阿霧不聲不響拿了一張4，接著阿拓又照接力賽跑的原則再拿一張3。然後兩個人輪流又拿了兩張4和兩張3，此時點數已經累積到24。阿霧嘴角泛著微笑，拿掉最後的一張4，望著阿拓。

「障礙賽跑？！我看到障礙了！原來每個數字最多只有四張，這次我輸了，再來一次！」阿拓總算在數字遊戲上首嚐敗績。

一遍一遍玩下去，越鑽研越覺得這種遊戲變化之大。有時候要搶接力賽跑中的特殊點（即累積點數爲3、10、17、24、31者），有時候又要盡力避開這些特殊點。經過長時間的分析，最後才得到致勝的原則。（非常複雜）。

這項遊戲和賽跑一點關係也沒有，而是在有限的字牌中取得勝利的關鍵牌。經過一陣子的摸索後發現變化實在很多，差點沒撞牆。我們現在試著從最基本的情況探討起。

二、研究目的

探討「障礙賽跑」撲克牌遊戲在運算過程中隱藏的數學規則。

三、研究過程

探討一：觀察「障礙賽跑」撲克牌遊戲的類型變化。

我們先把數字1～6的四種花色共計24張撲克牌依「阿草的葫蘆」書中所提方式放在桌上（如圖一），輪流取牌。

遊戲開始內容

♠	1	2	3	4	5	6
♥	1	2	3	4	5	6
♦	1	2	3	4	5	6
♣	1	2	3	4	5	6

圖一　遊戲開始狀態

發現：

有時會在每個數字組部份還有剩牌時，即完成遊戲分出勝負；相反地有時也會出現一組數字都被拿光但勝負仍未定的情形；有時甚至二組數字皆被拿走而仍然未分勝負。於是我們想先分別了解這些牌組的變化。

探討二：觀察並了解數字牌組都不缺的變化情形。

我們先假設撲克牌能無限供應16，那麼累加到總數31時有沒有最佳致勝策略

？我們試著將每個「總數」列出，然後拿一張牌就「減去」相對的數量，我們把得到的結果列出來，如表一：

表一　累加總數到31的勝利點

能拿的數牌	累加總數的勝利點
1 2 3 4 5 6	1 2 **3** 4 5 6 7 8 9 **10** 11 12 13 14 15 16 **17** 18 19 20 21 22 23 **24** 25 26 27 28 29 30 **31**

發現：

1.我們只要拿到實心字位置的數，就能確定是贏家。

2.我們稱實心的數字爲「勝利點」，也就是累加到這個數時，別人將無法累加到其他實心位置的「勝利點」。

3.再來玩遊戲時，因爲先手只要一拿3就進入勝利點，所以先手一定獲勝。而我們也發現每兩個勝利點相差7，很有規則。這是否和可以拿的牌的點數有關呢？

猜測：

7＝6＋1，正好是能拿撲克牌數中的數字最大值和最小値的和。如果改變累加總數，情形應該也是如此；也就是留下來的數當中，只要拿累積點數是7的倍數，就是贏家。

證驗：

我們以不同的總數加以證驗，舉三個例子列成表二加以說明：

表二　不同累加總數的勝利點

能拿的數牌	勝利總數	累加總數的勝利點	本局結果
1 2 3 4 5 6	22	**1** 2 3 4 5 6 7 **8** 9 10 11 12 13 14 **15** 16 17 18 19 20 21 **22**	先手拿1勝
1 2 3 4 5 6	25	1 2 3 **4** 5 6 7 8 9 10 **11** 12 13 14 15 16 17 **18** 19 20 21 22 23 24 **25**	先手拿4勝
1 2 3 4 5 6	21	1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12 13 **14** 15 16 17 18 19 20 **21**	後手勝

結果符合我們的猜測，即最佳策略爲「總數(6+1)」的數開始向前推算。

整理：

但檢視表一和表二後我們發現每一局的勝利點都不相同，但後面累加數的間隔卻很有規則，於是我們以「剩下的數是7的倍數向前推算」就變得很有規律，且容易觀察。我們將表一、表二重新整理成表三：

表三　不同累加總數的關鍵數位置

勝利總數	總數的關鍵數位置
31	31 30 29 **28** 27 26 25 24 23 22 **21** 20 19 18 17 16 15 **14** 13 12 11 10 9 8 **7** 6 5 4 3 2 1
22	22 **21** 20 19 18 17 16 15 **14** 13 12 11 10 9 8 **7** 6 5 4 3 2 1
25	25 24 23 22 **21** 20 19 18 17 16 15 **14** 13 12 11 10 9 8 **7** 6 5 4 3 2 1
21	**21** 20 19 18 17 16 15 **14** 13 12 11 10 9 8 **7** 6 5 4 3 2 1

於是我們發現勝利點變得很有規則，但為了避免定義混淆，我們重新定義能取得勝利的有利位置為「關鍵數」，所謂「關鍵數」是指當我留下該未完成的點數給對方時，對方即不能取得勝利的數字位置而言。表三的關鍵數推算後，變為由0往前倒數7的倍數，也就是只要留下7的倍數給對方就一定能成為最後的贏家。

推論：

如果撲克牌可以選擇的數改變，結果會如何？我們整理成表四如下：

表四　不同能拿數牌的關鍵數位置

能拿的撲克牌	31以內的總數及關鍵位置
123	**28** 27 26 25 **24** 23 22 21 **20** 19 18 17 **16** 15 14 13 **12** 11 10 9 **8** 7 6 5 **4** 3 2 1
1234	31 **30** 29 28 27 26 **25** 24 23 22 21 **20** 19 18 17 16 **15** 14 13 12 11 **10** 9 8 7 6 **5** 4 3 2 1
12345	31 **30** 29 28 27 26 25 **24** 23 22 21 20 19 **18** 17 16 15 14 13 **12** 11 10 9 8 7 **6** 5 4 3 2 1
123456	31 30 29 **28** 27 26 25 24 23 22 **21** 20 19 18 17 16 15 **14** 13 12 11 10 9 8 **7** 6 5 4 3 2 1

歸納：

1.表四可以很清楚地看出：若是總數為關鍵數的位置時，就是後手贏；其餘即為先手贏。

2.由表一至表四我們歸納出：若可以無限制拿取某些點數的撲克牌時，我們找出了【最佳策略一】。

【最佳策略一】

(1) 關鍵數 $=(\ell+s)\times M$..........公式一

(2) 先手或後手贏的判斷：

$T\div(\ell+s)=n$餘r...............公式二

①若 $r>0$ 表示先手有利（只要先拿 r 的數牌）

②若 $r=0$ 表示後手有利

註：①M指大於或等於0的整數。

②ℓ=能拿的大數，s =能拿的小數。

③T=總數。

四、我們的結論

「障礙賽跑」撲克牌遊戲過程中常有撲克牌同時缺1組或2 組數字的現象，經過改變和整理後，我們發現：

（一）數牌都不缺組時：

當撲克牌無限制供應時，我們找到以下的結果：

連續數牌的最佳策略一覽表

策略	【最佳策略一】
條件	連續不間斷的數牌
公式	$(\mathcal{L}+s)\times M$
倒數間隔	$(\mathcal{L}+s)$，$(\mathcal{L}+s)$，……
三張數牌關鍵數的形成	$(3+1)\times 0$，$(3+1)\times 1$，$(3+1)\times 2$，……，$(3+1)\times M$
四張數牌關鍵數的形成	$(4+1)\times 0$，$(4+1)\times 1$，$(4+1)\times 2$，……，$(4+1)\times M$
五張數牌關鍵數的形成	$(5+1)\times 0$，$(5+1)\times 1$，$(5+1)\times 2$，……，$(5+1)\times M$
六張數牌關鍵數的形成	$(6+1)\times 0$，$(6+1)\times 1$，$(6+1)\times 2$，……，$(6+1)\times M$

1.當撲克牌無限制供應並不缺組時，我們只要掌握關鍵數（關鍵數是指留下該點數給人對手時，即可立於不敗之地）即可成為贏家。

關鍵數＝$(\mathcal{L}+s)$¡—M。

2.有利位置的決定：

總點數÷$(\mathcal{L}+s)=n$餘r。

當r＝0時，後手有利；

當r＞0時，先手有利，拿r的點數P即可剩下關鍵數而獲勝。

3.我們做了四組、五組、六組數牌的探討都適用，推測全部數牌都出現時也適用。

（二）缺一組數牌時：

我們找到以下的結果：

1.當一組數牌從缺時，缺的數牌如果≦$\mathcal{L}/2$（能拿的最大數牌）就選擇【最佳策略二】，即：

關鍵數（一）$=(\mathcal{L}+s+a)\mathrm{x}M$。

關鍵數（二）$=(\mathcal{L}+s+a)\mathrm{x}M+a$。

而當總數÷$(\mathcal{L}+s+a)=n$ 餘 r 。

當r＝0或r＝a時，後手有利；

當r＞0時且r≠a時，一開始取數為r的數牌，先手有利。

2.當缺的數牌＞$\mathcal{L}/2$時，就選擇【最佳策略三】，即：

關鍵數＝a¡—M。

而當總數÷a＝n餘r。

r＝0時，後手有利；

r＞0時，取r點數的數牌，先手有利。

3.四組、五組、六組和七組數牌均適用本原則，推測全部數牌都出現時也都適用。

（三）數牌缺兩組時：

我們發現並整理出以下的結果：

1.兩組數牌無法拿取時，將所有缺牌組的數和最大數的關係分為四種類型：

⑴當$(a+b)\leqq\mathcal{L}$時，用【最佳策略四】：

關鍵數（一）$(\mathcal{L}+s+a)$¡—M。

關鍵數（二）$(\mathcal{L}+s+a)$¡—M$+a$。

總數÷$(\mathcal{L}+s+a)=n$餘 r 。

$r=0$或$r=a$時，後手有利；

$r>0$時，且$r\neq a$時，先手有利（取r的數牌即可勝）。

⑵$(a+b)\leqq\mathcal{L}$且$2a=b$時，用【最佳策略五】：

關鍵數（一）$(\mathcal{L}+s+b)$¡—M。

關鍵數（二）$(\mathcal{L}+s+b)$¡—M$+a$。

關鍵數（三）$(\mathcal{L}+s+b)$¡—M$+b$。

總數÷$(\mathcal{L}+s+b)=$餘r。

當$r=0$或$r=a$或$r=b$時，後手有利；

當$r>0$時，且$r\neq a$且$r\neq b$時，先手有利（取r的數牌即可勝）。

⑶$(a+b)>\mathcal{L}$時，用【最佳策略六】：

關鍵數（一）$(a+b)$¡—M。

關鍵數（二）$(a+b)$¡—M$+a$。

總數÷$(a+b)=n$餘r。

當$r=0$或$r=a$時，後手有利；

當$r>0$且$r\neq a$時，先手有利（取r的數牌即可勝）。

⑷當$(a+b)>L$且$(a>\mathcal{L}/2, b>\mathcal{L}/2)$時，用【最佳策略七】：

關鍵數$a\times M$。

總數÷$a=n$餘r。

當$r=0$時，後手有利；

當$r>0$時，先手有利（取r的數牌即可勝）。

2.我們探討了四、五、六、七組數牌，當缺兩組數牌時都驗證策略四～七適用，推測當有更多組數牌時也可以適用。

3.假設不能拿的最大數b又恰巧為最大數$\mathcal{L}$，則相當於以$(b-1)$為最大可拿數

的牌形，因此可以用【最佳策略二、三】處理，很容易獲勝。

（四）我們發現最佳策略所整理出的公式之間可簡化成：

1.一組數牌不能拿時：

⑴不能拿的數牌≦$\mathcal{L}$/2時，使用【最佳策略二】：

關鍵數倒數間隔的規則：a、($\mathcal{L}$+s)、a、($\mathcal{L}$+s)…。

⑵不能拿的數牌＞$\mathcal{L}$/2時，使用【最佳策略三】：

關鍵數倒數間隔的規則：a、a、a、a…。

2.二組數牌不能拿時：

⑴不能拿的兩組數牌較小時(a+b≦$\mathcal{L}$)：

【最佳策略四】關鍵數倒數間隔的規則：a、($\mathcal{L}$+s)、a、($\mathcal{L}$+s)…。

【最佳策略五】關鍵數倒數間隔的規則：a,a,($\mathcal{L}$+s),a,a,($\mathcal{L}$+s)…。

⑵不能拿的兩組數牌較大時(a+b>$\mathcal{L}$)：

【最佳策略六】關鍵數倒數間隔的規則：a、b、a、b…。

【最佳策略七】關鍵數倒數間隔的規則：a、a、a、a…。

3.總之，不管缺一組或二組數牌：

只要看不能拿的數牌是大或是小，就可以很快選擇最佳策略並立即運用公式和倒數間隔規則，迅速取得關鍵數的位置。

（五）【障礙賽跑撲克牌遊戲】獲勝的最佳策略：

⑴累加總數在（大數＋小數）×4以內時，都有最佳策略。只要掌握【最佳策略一】就可以了。

⑵若累加總數＝($\mathcal{L}$+s)×M時，則一定後手必勝。

因爲撲克牌所有四種花色的數牌張數是偶數張，而這些牌一定可以有相對的兩張牌的點數正好＝（最大數牌＋最小數牌）；又因爲加起來的總點數也恰好＝（最大數牌＋最小數牌）的整數倍，因此這種遊戲在拿取總數爲（大數＋小數）×M時，都是對後手有利。

⑶若累加總數＞($\mathcal{L}$+s)×4時：

活用【最佳策略一至七】及隨時應對轉換策略，比對手先取得關鍵數，贏得【障礙賽跑撲克牌】遊戲將不再那麼難。

下頁圖十三就是【障礙賽跑撲克牌遊戲】中，可拿1～6牌組，累加總數爲31的決策思考流程圖：

（六）本研究探討至此：

發現「障礙賽跑遊戲」提供的障礙，正可以幫助我們進行深入分析的推理學

習；而整理策略並活用，正可以隨時訓練我們有意義的歸納、判斷和做決定的重要解題能力。思考能力的成長雖然痛苦，但是更上層樓的感覺眞好。

五、參考資料

1.曹亮吉（1996）「阿草的葫蘆」。台北，遠哲科學教育基金會。
2.王芳夫、王登傳（1988）「數學遊戲大觀」。高雄，前程出版社。
3.溫亦剛（1986）「數學萬花筒」。台北，九鼎出版社。

評語

一個從「搶30」衍生的兩人遊戲，作者們運用必勝點，必勝策略的解題模式，在各種限制條件下，提出必勝點及必勝策略，考慮週詳，誠爲國小高年級可以完成的思考型態，版面表達完整，解說清晰、熟練。題目取材自「阿草的葫蘆」書中。

回上一層