

大圓包小圓—有趣的蛋塔盒

高小組數學科第三名

台北縣土城國民小學

作者：黃政維、林書弘、許佑寧、林柏任
指導教師：呂理行

一、研究動機

好不容易才等到二個星期才一次的棋弈課，又可以和老師好好的廝殺一場。上課鐘聲還沒響，我就已經做好開戰的準備了！老師怎麼還不趕快出現，我隨手把兩個棋子排在一起。心想：如果在外圍再畫一個大圓，不就是以前考過的數學題目嗎？（如下圖）：

請下圖填填看：



大圓的直徑是8公分。

小圓的半徑是（ ）公分。

大圓的圓周約（ ）公分。

想著，想著，不知大圓面積和兩個小圓總面積有沒有什麼特別的關係？還有，最近不是在流行吃蛋塔嗎！如果把象棋變成蛋塔，那我的蛋塔盒不就變成圓的了！市面上好像都是方形的蛋塔盒。有趣！有趣！

二、研究目的

（一）想了解大圓內包二個小圓、三個小圓、四個小圓、五個小圓、六個小圓時，大圓的面積和小圓的總面積有沒有特定的關係。

（二）以實際蛋塔大小，使用圓的蛋塔盒來裝，裝幾個蛋塔的蛋塔盒較省材料。

（三）比較裝同數量蛋塔時，圓的蛋塔盒和方形的蛋塔盒的表面積大小。

三、研究設備

（一）直尺、三角板。

（二）量角器、圓規。

(三) 圓形物體。(象棋棋子、閃電卡)。

(四) 方格紙、量角器影印紙。

(五) 計算機。

(六) 電腦。

四、研究過程

在研究之前，先把大圓包小圓的意思說明清楚。(如下圖)：



也就是說小圓彼此相接，也必須和大圓相接，並且小圓都要一樣大。在這研究當中我們只探討內包2到6個小圓的情形。

(一) 想要知道大圓的面積和各種內包小圓的總面積有沒有特定的關係，最好就是能找出數學公式來證明。如果不能用數學公式來證明，我們將以各種不同大小的小圓為基礎來做直接的測量，再分析測量的數據，看看是否有特定的關係存在。

1. 利用數學公式證明：

在一個大圓內包二個小圓，我們很容易利用數學公式得知大圓的面積是兩個小圓總面積的2倍。這個結果不會受圓的大小改變而改變。

2. 利用直接測量算出：

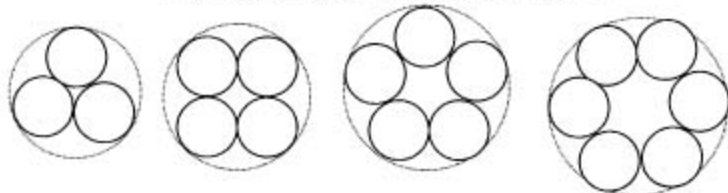
其他像大圓內包三個小圓、四個小圓、五個小圓、六個小圓，我們無法直接使用公式算出，所以我們採用直接測量的方式來找答案。

(1) 利用實物(象棋棋子、閃電卡)當做小圓測量：

在測量大圓之前，我們先使用測徑器測出象棋棋子的直徑為2.29公分，半徑為1.145公分。閃電卡直徑為4.13公分，半徑2.065公分。

首先，先試著擺出各種內包所要的小圓圖形。(如下圖)：

小圓是實際的物體，大圓是想畫出的大圓。



那麼要怎麼擺呢？想了很久，終於想到了解決的方法。並把求大圓半徑的問題簡化成：

步驟 1：先定出一點（代表大圓的圓心）。

步驟 2：接著看要擺幾個小圓，決定出角度，以上面的點當頂點，利用量角器畫出一個角。如：

包三個小圓的角度： $360 \div 3 = 120$ 度。

步驟 3：再利用量角器畫出平分這個角的直線。

步驟 4：放上小圓。

步驟 5：小圓與平分直線碰到最遠的那一點連上頂點，這線段就是大圓的半徑了。

於是我們就利用這種方式測量，測量的結果如下：

以象棋棋子為小圓使用測徑器測量 (即小圓半徑為 1.145 公分，圓周率以 3.14 計)				
測量項目	大圓半徑	大圓面積	全部小圓面積	大圓面積是全部小圓面積的幾倍
包三個小圓	2.468 cm	19.125815 cm ²	12.349855 cm ²	$1.5486671 \div 1.55$ 倍
包四個小圓	2.765 cm	24.006006 cm ²	16.466474 cm ²	$1.4578716 \div 1.46$ 倍
包五個小圓	3.090 cm	29.981034 cm ²	20.583092 cm ²	$1.4565855 \div 1.46$ 倍
包六個小圓	3.434 cm	37.027997 cm ²	24.699711 cm ²	$1.4991267 \div 1.50$ 倍

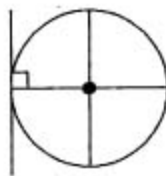
以閃電卡為小圓使用測徑器測量 (即小圓半徑為 2.065 公分，圓周率以 3.14 計)				
測量項目	大圓半徑	大圓面積	全部小圓面積	大圓面積是全部小圓面積的幾倍
包三個小圓	4.452 cm	62.235754 cm ²	40.168998 cm ²	$1.5493479 \div 1.55$ 倍
包四個小圓	4.998 cm	78.437212 cm ²	53.558664 cm ²	$1.4645102 \div 1.46$ 倍
包五個小圓	5.580 cm	97.768296 cm ²	66.948330 cm ²	$1.4603545 \div 1.46$ 倍
包六個小圓	6.197 cm	120.58482 cm ²	80.337999 cm ²	$1.5009686 \div 1.50$ 倍

(2)利用圓規畫圓測量（各以小圓半徑3.5公分、半徑10公分）。

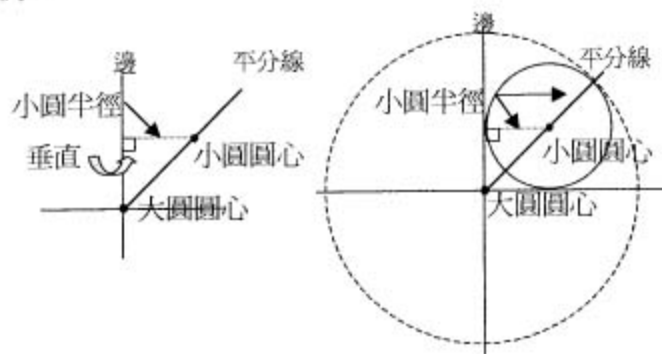
我們利用前面簡化的方式完成步驟1至3後，碰到了難題，就是如何把半徑3.5公分及半徑10公分的小圓畫上去。當然，我們知道圓心一定在這條平分線上，而且小圓圓周剛好與角的邊相碰到，於是找到了下面的資料（取自國中選修數學上冊）。

圓心到切線的距離等於圓的半徑

圓心到切線的連線必垂直此切線



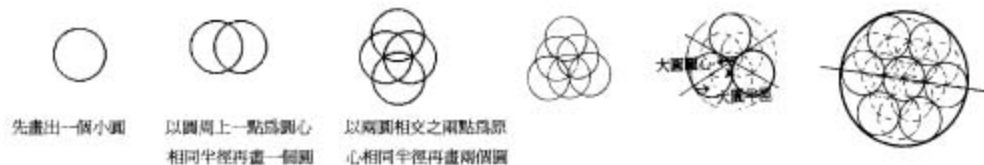
我們根據上面的資料，想了解解決的方法，就是從邊垂直一條虛線（分別3.5公分及10公分）讓這條線與平分線相接，相接的這一點就是小圓的圓心。大圓的半徑不就等於大圓圓心到小圓圓心的距離加上小圓的半徑嗎！如下圖：以包四個小圓為例。



測量結果如下：

	測量項目	大圓半徑	大圓面積	全部小圓面積	大圓面積是全部小圓面積的幾倍
半徑 3.5 公分的小圓	包三個小圓	7.55cm	178.98785 cm^2	115.395 cm^2	1.55109 = 1.55 倍
	包四個小圓	8.45cm	224.20385 cm^2	153.860 cm^2	1.45719 = 1.46 倍
	包五個小圓	9.45cm	280.40985 cm^2	192.325 cm^2	1.45800 = 1.46 倍
	包六個小圓	10.50cm	346.18500 cm^2	230.790 cm^2	1.50000 = 1.50 倍
半徑 10 公分的小圓	包三個小圓	21.55 cm	1458.22385 cm^2	942.000 cm^2	1.54800 = 1.55 倍
	包四個小圓	24.15 cm	1831.31865 cm^2	1256.000 cm^2	1.45806 = 1.46 倍
	包五個小圓	27.00 cm	2289.06000 cm^2	1570.000 cm^2	1.45800 = 1.46 倍
	包六個小圓	30.00 cm	2826.00000 cm^2	1884.000 cm^2	1.50000 = 1.50 倍

在求內包三個小圓時，我們也發現了另一種解法，就是不斷重複畫圓。這種方法也可以畫出內包六個小圓，畫法如下：



由內包六個小圓可以看出大圓的半徑是小圓半徑的3倍，於是我們利用數學公式算出大圓面積六個小圓總面積的1.5倍。我們發現到這個結果不會受圓的大小改變而改變。

(二) 使用圓的蛋塔盒，裝同樣大小的蛋塔，使用裝幾個蛋塔的蛋塔盒較省材料？

說明：使用的材料指蛋塔盒的表面積，圓的蛋塔盒為圓柱體，算法如下：

1. 蛋塔盒表面積＝底面積×2＋側面積。
2. 底面積就是外面大圓的面積，可以應用（一）的結果求得。
3. 側面積＝底面的周長×柱體的高，也可以應用（一）的結果求得。

我們以實際蛋塔做測量，實際蛋塔半徑35公分、高3公分。

一盒裝一個，計算如下：

底面積×2＋側面積：

$$= (\text{半徑} \times \text{半徑} \times 3.14 \times 2) + (\text{直徑} \times 3.14 \times \text{高})。$$

$$= (3.5 \times 3.5 \times 3.14 \times 2) + (7. \times 3.14 \times 3) = 142.87 \text{cm}^2。$$

一盒裝二個，蛋塔盒表面積為：439.6cm²。

一盒裝三個，蛋塔盒表面積為：500.2177cm²。

一盒裝四個，蛋塔盒表面積為：607.6057cm²。

一盒裝五個，蛋塔盒表面積為：738.8577cm²。

一盒裝六個，蛋塔盒表面積為：890.19cm²。

一盒裝七個：根據不斷畫圓法，求內包六個小圓時，發現中間剛好可再放一個小圓，所以也把一盒裝七個列入比較。也就是表面積與一盒裝六個相同。

(三) 比較圓的蛋塔盒與方形蛋塔盒：

根據（二）的結果，我們已經求出各種圓蛋塔盒的表面積，同樣以實際蛋塔為例，求出方形蛋塔盒的表面積，計算結果如下：

一盒裝一個，方形蛋塔盒表面積為：182cm²。

一盒裝二個，方形蛋塔盒表面積為：322cm²。

一盒裝三個，方形蛋塔盒表面積為：462cm²。

一盒裝四個，蛋塔盒裝法有兩種：

裝一排為：602cm²。

裝二排為：560cm²。

一盒裝五個，方形蛋塔盒表面積為：742cm²。

一盒裝六個，蛋塔盒裝法有兩種：

裝一排為：882cm²。

裝二排為：798cm²。

一盒裝七個，蛋塔盒表面積為：1022cm²。

五、研究結果

(一) 經由數學公式證明，大圓內包二個及六個小圓，大圓面積分別是小圓總面積的2倍及1.5倍。

經由測量得知，大圓內包三、四及五個小圓時，大圓面積約是小圓總面積的1.55倍、1.46倍及1.46倍。

(二) 各種圓形蛋塔盒所需的表面積如下表：

裝法	一盒 蛋塔盒表面積	<計算一> 分幾盒	裝420個蛋塔 所須全部蛋塔盒 的表面積和	<計算二> 平均一個蛋塔使 用面積為
一盒一個	142.8700 cm ²	420	60005.400 cm ²	142.87000 cm ²
一盒二個	439.6000 cm ²	210	92316.000 cm ²	219.80000 cm ²
一盒三個	500.2177 cm ²	140	70030.478 cm ²	166.73923 cm ²
一盒四個	607.6057 cm ²	105	63798.599 cm ²	151.90143 cm ²
一盒五個	738.8577 cm ²	84	62064.047 cm ²	147.77154 cm ²
一盒六個	890.1900 cm ²	70	62313.300 cm ²	148.36500 cm ²
一盒七個	890.1900 cm ²	60	53411.400 cm ²	127.17000 cm ²

(三) 圓的蛋塔盒和方形的蛋塔盒表面積比較如下：

	以一盒為單位		比較	
	圓的蛋塔盒表面積	方形的蛋塔盒表面積	一個蛋塔盒	一個蛋塔
一盒一個	143 cm ²	182 cm ²	方形多 39 cm ²	方形多 39 cm ²
一盒二個	440 cm ²	322 cm ²	圓形多 118 cm ²	圓形多 59 cm ²
一盒三個	500 cm ²	462 cm ²	圓形多 38 cm ²	圓形多 13 cm ²
一盒四個	608 cm ²	裝一排 602 cm ²	圓形多 6 cm ²	圓形多 1.5 cm ²
		裝二排 560 cm ²	圓形多 48 cm ²	圓形多 12 cm ²
一盒五個	739 cm ²	742 cm ²	方形多 3 cm ²	方形多 0.6 cm ²
一盒六個	890 cm ²	裝一排 882 cm ²	圓形多 8 cm ²	圓形多 1.3 cm ²
		裝二排 798 cm ²	圓形多 92 cm ²	圓形多 15 cm ²
一盒七個	890 cm ²	1022 cm ²	方形多 132 cm ²	方形多 19 cm ²

六、討論

由研究結果(一)發現大圓內包二到六個小圓，大圓面積和小圓總面積有特定的關係。至於內包七個以上小圓的情形為何，我們想只要利用相同的方法應該也可以獲得解答。

我們在研究時是以小圓大小不變為研究，而包小圓的大圓會隨著內包小圓的數量增加而變大；如果改以大圓不變來研究，我們會發現小圓會隨著內包小圓的數量增加而變小，但小圓的總面積並不會隨著內包小圓的數量增加而有一定的變化。

由研究結果（二）我們發現，裝1至7個蛋塔的圓形蛋塔盒中，裝7個的圓形蛋塔盒最省材料。我們原來以為是裝1個的圓形蛋塔盒最省材料，因為小圓等於大圓，一點空間也不浪費，所以蛋塔盒的高是一個很重要的影響因素，這可做為未來的研究方向。

由研究結果（三）我們建議蛋塔店要裝1個、5個及7個蛋塔時，使用圓的蛋塔盒；要裝2個、3個、4個及6個蛋塔時，使用方形蛋塔盒。

七、結論

（一）大圓分別內包2個、3個、4個、5個、6個小圓時，大圓面積和小圓總面積有特定的關係，這個關係不會受圓的大小而影響。

（二）以實際蛋塔測量，發現各種圓形蛋塔盒中使用材料由少至多分別為裝7個、1個、5個、6個、4個、3個、2個。

（三）比較圓形蛋塔盒和方形蛋塔盒發現，裝1個、5個、7個的蛋塔盒使用圓形蛋塔盒較方形蛋塔盒表面積小；裝2個、3個、4個、6個的蛋塔盒使用方形蛋塔盒較圓形蛋塔盒表面積小。

八、參考資料

（一）國小數學課本 第5～12冊 國立編譯館主編。

（二）國中選修學課本 上冊 第四單元 圓 國立編譯館主編。

（三）測徑器 大美百科全書第5冊 第70—71頁 光復書局。

評語

研究是圓內的切圓個數及面積，確實是高年級生可行的活動。

題目取材生活化，活動豐富有趣，較無明顯的數學分析推理。

