

擋不住的誘惑——L 形

初小組數學科第一名

高雄縣立中正國民小學

作者：杜信璋、顧昆潔

指導教師：吳麗敏、杜鴻祥

一、研究動機

平常做完功課後除了看書，我最喜歡排拼圖。剛好前年參加全國科展剩下不少空白表格，我就自己排排看，竟然發現不少規則，於是請爸爸、媽媽和老師指導，並邀請同學一起做了這個有趣的遊戲。

二、研究目的

在各種長方形方格上，以L形方格鋪滿時，長方形長邊與寬邊的格子數有何種關係？

我們把 稱為L形。以下的討論，都一律用直邊×橫邊為準。以2×3長方形為例，直邊（寬邊）的格子數為2，橫邊（長邊）的格子數為3。

三、研究內容

- （一）在各種正方形上，有那些可以用L形鋪滿？
- （二）在直邊是2格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？
- （三）在直邊是3格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？
- （四）在直邊是4格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？
- （五）在直邊是5格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？
- （六）在直邊超過5格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？
- （七）可以用L形鋪滿的各種長方形，它的直邊有何種關係？
- （八）可以用L形鋪滿的各種長方形，它的橫邊有何種關係？

四、研究設備及器材

方格紙、鉛筆、彩色筆、直尺、自製瓦楞紙片。

五、研究過程

因為L形的形狀，我們知道各種正方形和長方形如果想要用L形鋪滿，則直邊和橫邊一定要兩格以上；而且，格子數一定要3的倍數。

(一) 在各種正方形上，有那些可以用L形鋪滿？

我們發現：

除了 3×3 之外，其他的正方形，只要是3的倍數都可以用L形鋪滿。而 3×3 的正方形，因為位置不夠，所以無法用L形鋪滿。

(二) 在直邊是2格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？

我們發現：

只要 2×3 的倍數的長方形都可以用L形鋪滿；而且剛好都是由兩個L形合併的圖形所鋪成的，我們把稱為雙L形。

(三) 在直邊是3格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？

我們發現：

只要是 $3 \times$ 偶數長方形，都可以用L形鋪滿；如果是 $3 \times$ 奇數的長方形，用L形都無法鋪滿。

問題一：

為什麼一邊是3格而另一邊是奇數時，都無法用L形鋪滿？

我們發現：

一邊是3格的長方形，因為位置不夠多，所以只有在 $3 \times$ 偶數時，恰可以用雙L形鋪滿。

(四) 在直邊是4格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？

我們發現：

只要長方形是偶數 $\times 3$ 的倍數，都可以用L形鋪滿。而且剛好都可以由雙L形鋪滿。

(五) 在直邊是5格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？

我們發現：

5×6 ， 5×9 ， 5×12 ， 5×15 的長方形都可以用L形鋪滿。

問題二：

直邊與橫邊的格子數更大的長方形，如果可以用L形鋪滿，該怎麼鋪排？有沒有比較簡單的方法？

(六) 在直邊超過5格的各種長方形，有那些可以用L形鋪滿？

我們用L形在 6×2 ， 6×3 ……的各種長方形上鋪排；因為6剛好是2的倍數也

是3的倍數，所以很快的……。

我們發現：

直邊是6格，而橫邊是2格以上的各種長方形都可以用L形舖滿，而且直接利用雙L形可以更快的舖滿。

接著，在直邊是7格的各種長方形，我們繼續用L形排排看。

我們發現：

7×6 、 7×9 、 7×12 、 7×15 的長方形方格，都可以用L形舖滿。

繼續，在直邊是8格和9格的長方形上排L形，因為8是偶數，所以 8×3 的倍數的長方形上，都可以用L形舖滿。而且剛好都可以由雙L形舖滿。另外 9×4 、 9×5 、 9×6 ……、 9×15 也都可以用L形排滿。但是超過15格的各種長方形，怎麼辦呢？

(七) 可以用L形舖滿的各種長方形，它的直邊有那些關係？

把原來用L形可以舖滿的圖形找出來比較；如下表列所示：

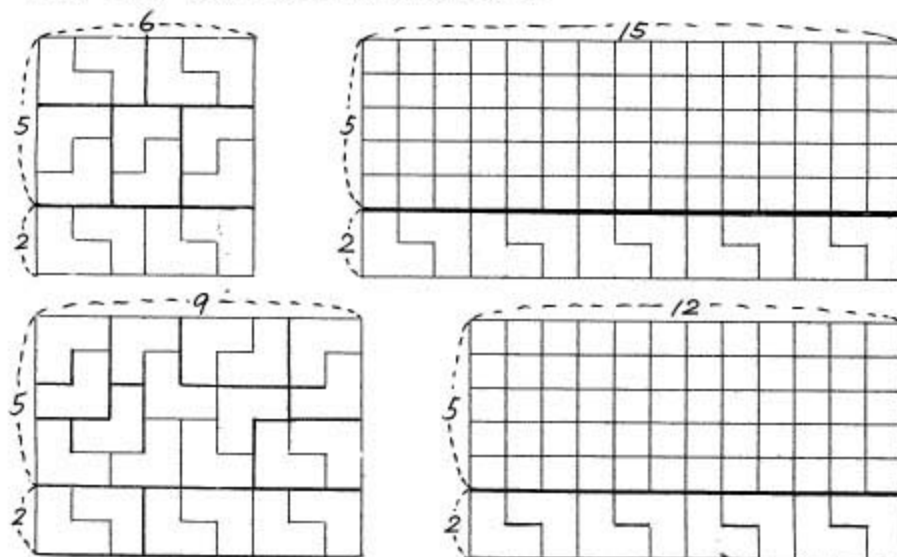
5×6 5×9 5×12 5×15

7×6 7×9 7×12 7×15

我們發現：

只要長方形的直邊是5格以上的奇數；而橫邊是3的倍數時，都可以利用雙L形合併在外側的方法加以擴大。

所以，我們可以得到如下圖所示的擴大方法。



所以只要是奇數 $\times 3$ 的倍數的長方形，都可以用L形去舖滿。

問題三：

解決了直邊擴大的問題，橫邊可不可以也用擴大的方法呢？

(八) 可以用 L 形舖滿的各種長方形，它的橫邊有何種關係？

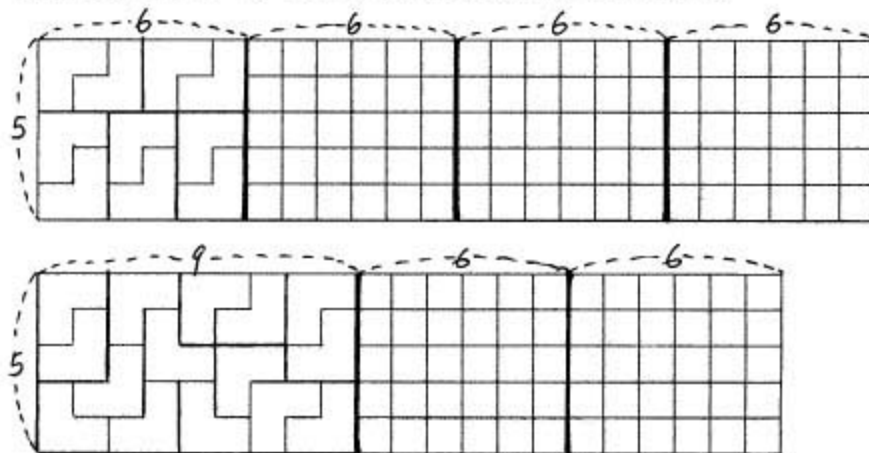
長方形，如果是偶數 $\times 3$ 的倍數，都可以用 L 形舖滿，所以只要討論直邊是奇數的長方形就可以了。

因為 $3\times$ 偶數的長方形都可以用 L 形舖滿，而 $3\times$ 奇數的長方形都不能用 L 形舖滿，所以我們從 5×6 、 5×9 、 5×12 、 5×15 的圖形開始觀察和比較。

我們發現：

5×12 的長方形剛好可以由兩個 5×6 合併，而 5×15 的長方形剛好可以由 5×6 和 5×9 合併。

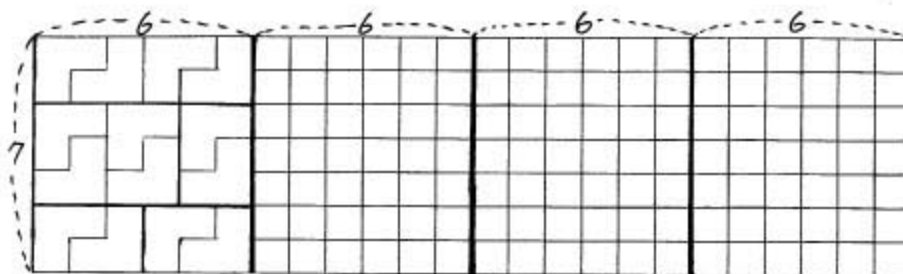
我把長方形畫大一些，再經過細心的比較之後；如下圖所示：

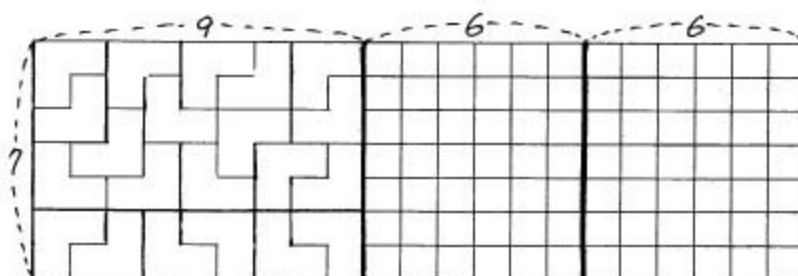


我們發現：

直邊是5格，而橫邊是12格以上且是3的倍數的各種長方形，都可以利用 5×6 和 5×9 為基本圖形，由橫邊依次加上 5×6 的圖形向外層擴大。

繼續把直邊是7格的長方形找出來做比較。如下圖所示：





我們發現：

直邊是7格，而橫邊是12格以上且是3的倍數的各種長方形，也可以利用 7×6 和 7×9 為基本圖形，由橫邊依次加上 7×6 的圖形向外層擴大。

接著，再經過細心的觀察、整理和比較。

我們發現：

只要直邊是奇數，而橫邊是12格以上且是3的倍數的各種長方形，都可以利用橫邊是6和9格當基本圖形，由橫邊依次加上6格的方法向外層擴大。

但是還要分成直邊和橫邊來討論，好麻煩喔！怎麼辦呢？

問題四：

用L形可以鋪滿的長方形這麼多，有沒有漏掉？有沒有更簡單的方法可以分別呢？

我們想到利用奇數和偶數，把長方形直邊和橫邊的格子數，用偶數 $\times$ 偶數、偶數 $\times$ 奇數、奇數 $\times$ 偶數、奇數 $\times$ 奇數四種情形做比較。

我們發現：

只要直邊和橫邊的格子數有一個是3的倍數，則偶數 $\times$ 偶數、偶數 $\times$ 奇數、奇數 $\times$ 偶數的各種長方形方格都可以用L形鋪滿。

$3 \times$ 奇數的長方形，因為能轉動的位置不夠多，都不能用L形鋪滿；所以奇數 $\times$ 奇數的長方形方格，直邊和橫邊格子數都一定要超過3。我們把問題二、問題三的觀察結果做比較之後。

我們發現：

只要直邊和橫邊格子數都有超過3，而且有一個邊的格子數是3的倍數，則奇數 $\times$ 奇數的長方形，都可以L形鋪滿。

但是，如果直邊和橫邊的格子數很大的話，可不可以有比較簡單的方法去排呢？

問題五：

可以用L形鋪滿的長方形，如果想要很快的鋪滿，但是直邊和橫邊的格子數

卻又很大的話，有沒有比較簡單的方法呢？

我們認為可以先把它拆成比較小，而且又可以用L形舖滿的長方形就可以了。但是有什麼方法可以拆得比較快而且又比較方便呢？

再把前面的結果整理一下並加以比較之後。

我們發現：

能夠用L形舖滿的長方形，它的直邊和橫邊格子數有兩種最基本的類型：偶數 $\times$ 3的倍數、6的倍數。另外一種類型是 5×6 和 5×9 的兩種長方形，利用這兩種 5×6 和 5×9 的長方形當做基本圖形，我們可以在長方形的外層，利用擴大的方法舖排各種奇數 $\times$ 奇數的長方形，當然它的直邊和橫邊格子數一定都要大於3而且還要有一個邊的格子數是3的倍數才可以。

接著把問題四整理過的三種長方形：偶數 $\times$ 奇數、偶數 $\times$ 奇數（奇數 $\times$ 偶數和偶數 $\times$ 奇數是一樣的）、奇數 $\times$ 奇數，重新再研究。

因為能夠用L形舖滿的長方形，它的格子數一定是要3的倍數；所以只要有一個邊是偶數，我們一定可以利用兩種基本的類型：偶數 $\times$ 3的倍數、6的倍數把長方形很快的舖滿。

另一種奇數 $\times$ 奇數的長方形，只要是可以用L形舖滿的話，我們認為，有一種是兩個奇數都是3的倍數，另一種是兩個奇數中只有一個是3的倍數。怎麼拆呢？

我們發現：

長方形的直邊和橫邊格子數如果都是奇數，則可以把格子數是3的倍數的奇數，先分割出寬度是9格的長條形方格，這樣就有一個邊的格子數出現偶數而且是3的倍數；另外，也可以在格子數是奇數的邊上，先分割出寬度是5格或9格的長條形方格；然後再利用兩種基本類型：偶數 $\times$ 3的倍數、6的倍數和 5×6 、 5×9 的兩種長方形，把奇數 $\times$ 奇數的長方形很快的用L形舖滿。

解決問題五了。我們覺得不過癮，把家裡的疊疊樂積木也就是 1×3 的長方形找來排排看。先從直邊是1格的長方形排起。再排直邊是2、3……格的長方形，很快的就得到了結果。

我們發現：

長方形的直邊和橫邊，只要有一邊是3的倍數，就可以用 1×3 的疊疊樂積木排滿整個長方形。

換句話說，長方形的格子數只要是3的倍數，就可以用 1×3 的疊疊樂積木舖滿。

接著，我們把L形加長1格成為，我們把它稱為長L形。再繼續用長L形鋪排各種長方形，我們先從直邊是2格的長方形排起。再排直邊是3、4、5……格的長方形。

我們發現：

直邊的格子數是奇數的長方形，如果想用長L形鋪滿，則橫邊格子數必需是8的倍數。

另外，再把其他的結果經過細心的整理和比較。

我們發現：

長方形方格，如果想用長L形鋪滿，則它的格子總數必需是8的倍數。當然直邊和橫邊的任何一邊都要2格以上才可以。

不過我們覺得很奇怪，長L形才只有4格而已，所以長方形如果想用長L形鋪滿，應該是4的倍數就可以了，為什麼都一定要8的倍數呢？

經過細心的整理和比較之後。

我們發現：

可以用長L形鋪滿的長方形，它的橫邊格子數一定是偶數，所以鋪上去的長L形一定有偶數個，它的格子總數當然一定要8的倍數。

但是8的倍數和4的倍數不容易判斷，雖然老師已經教了我們如何判斷3、6的倍數甚至9的倍數，可是我們只是三年級的學生，所以老師希望我們能利用這一段時間把乘法和除法再做熟練些。將來就可以學習更多的知識，也可以玩更多更好玩的數學遊戲。想不到在玩遊戲當中也可以學到新的知識，真好！！

六、結論

（一）為了排L形，正方形和長方形的直邊與橫邊都要兩格以上；而且格子數一定要3的倍數。

（二）除了 3×3 之外，其他的正方形方格，只要是3的倍數都可以用L形鋪滿。

（三）只要直邊和橫邊的格子數有一個是3的倍數，則偶數 $\times$ 偶數、偶數 $\times$ 奇數、奇數 $\times$ 偶數的各種長方形方格都可以用L形鋪滿。

（四）只要有一個邊是偶數而且又可以用L形鋪滿的長方形，一定可以利用：偶數 $\times$ 3的倍數、6的倍數，把長方形很快的鋪滿。

（五）只要直邊和橫邊格子數都有超過3，而且有一個邊的格子數是3的倍數，則奇數 $\times$ 奇數的長方形，都可以用L形鋪滿。

(六) 長方形方格的直邊和橫邊格子數如果都是奇數，則我們可以把格子數是3的倍數的奇數，先分割出寬度是9格的長條形方格，這樣就有一個邊的格子數出現偶數而且是3的倍數；另外，也可以在格子數是奇數的邊上，先分割出寬度是5格或9格的長條形方格；然後再利用兩種基本類型：偶數 $\times$ 3的倍數、6的倍數和 5×6 、 5×9 的兩種長方形，把奇數 $\times$ 奇數的長方形很快的用L形鋪滿。

(七) 長方形的直邊和橫邊，只要有一邊是3的倍數，就可以用 1×3 的疊疊樂積木鋪滿整個長方形方格。

(八) 長方形方格，如果想用長L形鋪滿，則它的格子總數必需是8的倍數。當然直邊和橫邊的任何一邊都要2格以上才可以。

七、討論

想不到用L形、 1×3 的疊疊樂積木和長L形鋪滿長方形方格的時候，可以學到這麼多的知識。我覺得拼圖遊戲真的好好玩！希望再玩其他的拼圖遊戲，也期盼評審老師能提供寶貴的意見讓我們繼續玩下去。

八、參考資料

- (1)奇數和偶數 漢聲精選世界兒童數學叢書第2冊。
- (2)看圖學數理 漢聲精選世界兒童數學叢書第1 2冊。

評語

本件作品能將L形之圖形很完整地鋪滿各種寬度不一的長方形，作出很完整的分析，對於初小學生而言，相當難得。

