

分水遊戲面面觀

～分水遊戲的最佳解及一般性分析

初小組數學科第三名

台北市士林區士東國民小學

作者：黃士耘、謝孟潔、麥哲綸、邱俐琄

指導教師：許文化、藍秀美

一、研究動機

我們平常就喜歡在一起玩數學遊戲。有一天，老師給了我們三個用鮮奶空盒做成的盒子，分別可裝10、7、3份水，盒子上沒有任何刻度，叫我們將大盒裝滿水，只能利用這三個盒子，把大盒的10份水平均分成兩半，（不可以用斜對角倒，也不可以用大約估算的）。我們幾個人居然試了半小時才倒成功，不過卻因此引發了我們的興趣，有沒有比較好的方法可以較快倒成功？如果是其他的體積組合，如（10,6,4），（12,8,3）等，又如何呢？

二、研究目的

- （一）是不是各種不同體積的盒子組合，都可以把大盒裡的水平均分成兩半？
- （二）要用什麼方法倒可以用最少步數把大盒裡的水分半成功？
- （三）有沒有簡單的方法可以判別大盒裡的水可不可以分半成功？
- （四）同一種組合中，把水分半成功時，其最低步數有規律性嗎？
- （五）能不能從1到最大體積都能夠分得出來呢？

三、研究器材

空牛奶盒、小杯子、剪刀或刀多子。

四、符號與名詞定義

- （一）為方便說明，我們的說明書中符號統一如下（數字a，數字b，數字c）

代表研究的題目；例如(10,7,3)表示大盒為10份，中盒為7份，小盒為3份的水，要想辦法平分為有兩盒5份的水。

(二) 數字a，數字b，c代表經過倒水步驟後，大盒、中盒、小盒水實際剩量。

(三) 我們這次的探討，先依據a與b、c間大小的關係，分為等於組($a=b+c$)，；大於組($b+c>a$)；小於組($b+c<a$)三種情況做研究；其次，再將大於組及小於組細分為大於k組($a+k=b+c$)；及小於k組($a-k=b+c$)來探討。(我們這次試驗 $a\leq k$ ； $k=1\sim6$ 的各種情況)。

五、研究過程

問題(一)：

是不是各種不同體積的盒子組合，都可以把大盒裡的水平均分成兩半？

方法：我們把 $b+c=10$ 的組合列表，並記錄過程。

結果：

- 1.我們排列出題目組合(a,b,c)即(大,中,小)有(10,9,1)(10,8,2)(10,7,3)(10,6,4)(10,5,5)
- 2.這些題目完成分半的方法如下。
- 3.我們發現：不是所有組合都可以成功分半。

a=b+c=10的所有最少步數的分半記錄：

(10,9,1)		(10,8,2)		(10,7,3)		(10,6,4)		(10,5,5)	
10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0	10,0,0
1,9,0	9,0,1	2,8,0	8,0,2	3,7,0	7,0,3	4,6,0	6,0,4	5,5,0	5,0,5
1,8,1	9,1,0	2,6,2	8,2,0	3,4,3	7,3,0	4,2,4	6,4,0		
2,8,0	8,1,1	4,6,0	6,2,2	6,4,0	4,3,3	8,2,0	2,4,4		
2,7,1	8,2,0	4,4,2	6,4,0	6,1,3	4,6,0	8,0,2	2,6,2		
3,7,0	7,2,1	6,4,0	4,4,2	9,1,0	1,6,3	2,6,2	8,0,2		
3,6,1	7,3,0	6,2,2	4,6,0	9,0,1	1,7,2	2,4,4	8,2,0		
4,6,0	6,3,1	8,2,0	2,6,2	2,7,1	8,0,2	6,4,0	4,2,4		
4,5,1	6,4,0	8,0,2	2,8,0	2,5,3	8,2,0	6,0,4	4,6,0		
5,5,0	5,4,1			5,5,0	5,2,3				
	5,5,0				5,5,0				
9步	10步	無解	無解	9步	10步	無解	無解	1步	1步

問題(二)：

(一) 要用什麼方法倒可以用最少步數把大盒裡的水分半成功？

方法：我們再把數字延伸擴大，排列大盒數字分別是：

8,12,14,16,18,20,22,24，並計算所有的最少步數。

結果：

等於組最少步數的倒法都有兩種：

(1){大盒倒中盒，「中盒倒小盒，小盒倒大盒」，重覆「」}，若“中盒”空時，重覆{ }，至平分為 $a/2$ 為止。

(2){「大盒倒小盒，小盒倒中盒」，重覆「」，若“中盒”滿時，中盒倒大盒，小盒倒中盒}，重覆{ }，至出現平分為 $a/2$ 為止。

(二) 有沒有簡單的方法可以判別大盒裡的水可不可以分半成功？

(三) 同一種組合中，把水分半成功時，其最低步數有規律性嗎？

(四) 能不能從1到最大體積都能夠分得出來呢？

我們有兩種研究方法：

方法一：遞法。

只要記錄大盒內 (a)的變化，就可以判別能不能把水分半成功及計算出把水分半完成的最少步數的快速算法，我們稱它為遞法。

問題(一)：

有沒有簡單的方法可以判別大盒裡的水可不可以分半成功？

步驟一：

簡化解答問題的記錄：

根據分半倒水的詳細記錄，我們發現大盒(a)容器內的確是有規律的數字變化。

1.(1)先倒中盒：會以大盒(a)—中盒的(b)的差開始，大盒中的水量會每次以小盒(c)的水量增加，直到再增加一個小盒(c)的水量會超過大盒(a)水量時，就減掉一個中盒(b)向下調節，再以小盒(c)的水量遞增，每次都會是以減中盒(b)量為轉換，直到出現大杯 $/2(a/2)$ 量為止。

(2)這個過程中，每個數字會出現二次，最後一個數字出現一次(已平分)做結束。

2.(1)先倒小盒：會以大盒(a)—小盒(c)的差開始，大盒中的水量會每次以小盒(c)的水量減少，直到再減少一個小盒(c)的水量會小於0時，就加上一個中盒(b)向上調節，再以小盒(c)的水量遞減，每次都會是以加中盒(b)量為轉換，直到

出現大杯/2($a/2$)量為止。

(2)這個過程中，每個數字會出現二次。

步驟二：

我們把有解的題目，解出 $a/2$ 之後繼續再分下去，並把大盒 a 中出現的數字繪圖，以(1)(2)(3)(4)表示數字出現的順序，順時針方向記錄先倒中盒 b 方式，逆時針方向記錄先倒小盒 c 方式。

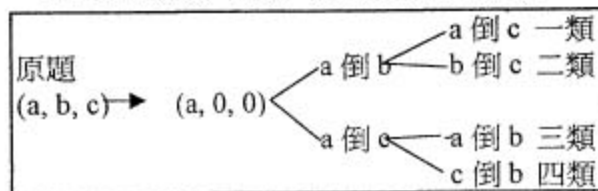
等於組的結論為：

狀況	倒水完整過程順序	可被分出所有水量
b, c 沒有公因數 q 時	先倒 b , 先倒 c 相互為逆回	$1-a$ 所有數字
b, c 有公因數 q	先倒 b , 先倒 c 相互為逆回	q 的倍數 $- a$

步驟三：

爲了解我們這個飢法，是否同樣適用於小於組，我們先以 $a=10$ 為例，計算小於數 $k=1\sim 5$ ， $k+a=b+c$ 的小於組；及大於數 $k=1\sim 5$ ， $a-k=b+c$ 的大於組，並把解題方式再細分為四類，以最少步數為原則，畫詳細流程圖。

k ：大盒(a)與中盒和小盒($b+c$)間的差數



結果：

1. 我們發現我們的飢法也適用於小於組和大於組。
2. 小於組成功的分半在二、四類；大於組則是在二、四類；一、二類及三、四類都會出現。
3. 不論小於組或是大於組，都和等於組一樣：分半的最少步數都只有二種，以 c 遞增和以 c 遞減各一類。

步驟四：

仿照步驟二把有解的小於組題目，解出 $a/2$ 之後繼續再分下去，並把 a 中出現的數字繪圖，以(1)(2)(3)(4)表示數字出現的順序，順時針方向記錄倒 b 方式，逆時針方向記錄倒 c 方式。

發現：

小於組

狀況	倒水完整過程順序	(a)可被分出的所有水量	例如
b,c 沒有公因數 q	先倒 b,先倒 c 相互為逆回	$k \sim a$ 的數字	(12,7,2)
b,c 有公因數 q	先倒 b,先倒 c 相互為逆回	公因數 q 的倍數 $\sim a$	(12,8,2)

問題 (二)：

同一種組合中，把水分半成功時，其最低步數有規律性嗎？

1. 等於組的規律性：

從表一我們可看出：

(1)不可分半的判別：b和c有最大公因數p，而 $a/2$ 無法被p整除。

例：(12,8,4) b和c的最大公因數是4，而 $a/2$ 、6無法被4整除，所以是無解。

(2)可分半的最少步數：

	二類步數	四類步數
$b=c=a/2$	1	1
b 和 c 有公因數	$(a/c)-1$	a/c
其餘組合	$a-1$	a

2. 小於組的規律性：

(1)不可分半的判別：b和c有最大公因數p， $a/2$ 無法被p整除。

(2)可分半的最少步數：

	二類步數	四類步數
$c=1$	$a-1-2k$	a
$b=a/2$	1	3
其餘組合	步數和 $=2(b+c)-1$	

3. 大於組的規律性：

(1)不可分半的判別：

(1.1)b和c有最大公因p， $a/2$ 無法被p整除。

(1.2) $b>c$ 且c不是 $a/2$ 的因數。

(1.3) $a/2$ 在缺口內。

(1.4) $a/2 \pm c$ 在缺口內。

(1.5)大於數 k 越大，缺口就越大，更容易產生無解。

(1.6) b, c 大小越接近，缺口越靠近 $a/2$ 。

(1.7) $b=c$ 時，缺口重疊。

(2)可分半的最少步數規律：

	一類	二類	三類	四類
$a=1$		$a+1$		$\frac{1}{2}a$
$c=a/2$		3		1
$b-c = a/2$	6	3		
$b>a, c$ 是 $a/2$ 的因數		$a/c + 1$		a/c
$b<a, c$ 是 $a/2$ 的因數			$a/c + 1$	a/c

方法二：以一步一步篩選的方式來判斷能不能平分水成功的方法。

飢法提供了對任何單一問題來說都很管用的方法，可是我們想能不能再找一個方法，一次對一大堆問題做判別。

問題（一）：

有沒有簡單的方法可以判別大盒裡的水可不可以分半成功？

研究步驟略如下：

1. 首先觀察已完成解答的等於組，大於1組到大於6組，小於1組到小於6組各種題目的分水結果，依據共同特性來訂立篩選規則。

2. 依照訂好的篩選規則，測試已完成的題目，發現大部份都能符合。

結果大致如下：

1. 經過我們共同努力，合作分析的結果，發現所有等於組（我們一共做了119個題目）、大於1組（我們一共做了119個題目）、大於2組（我們一共做了133個題目）、及各種小於組的題目，都可以經由簡單的判別原則知道可不可以分半，並對可以分半的題目計算出分半最少步數。

2. 經過分析、整理分水流程的結果，找出了判別可不可以分半的篩選原則：

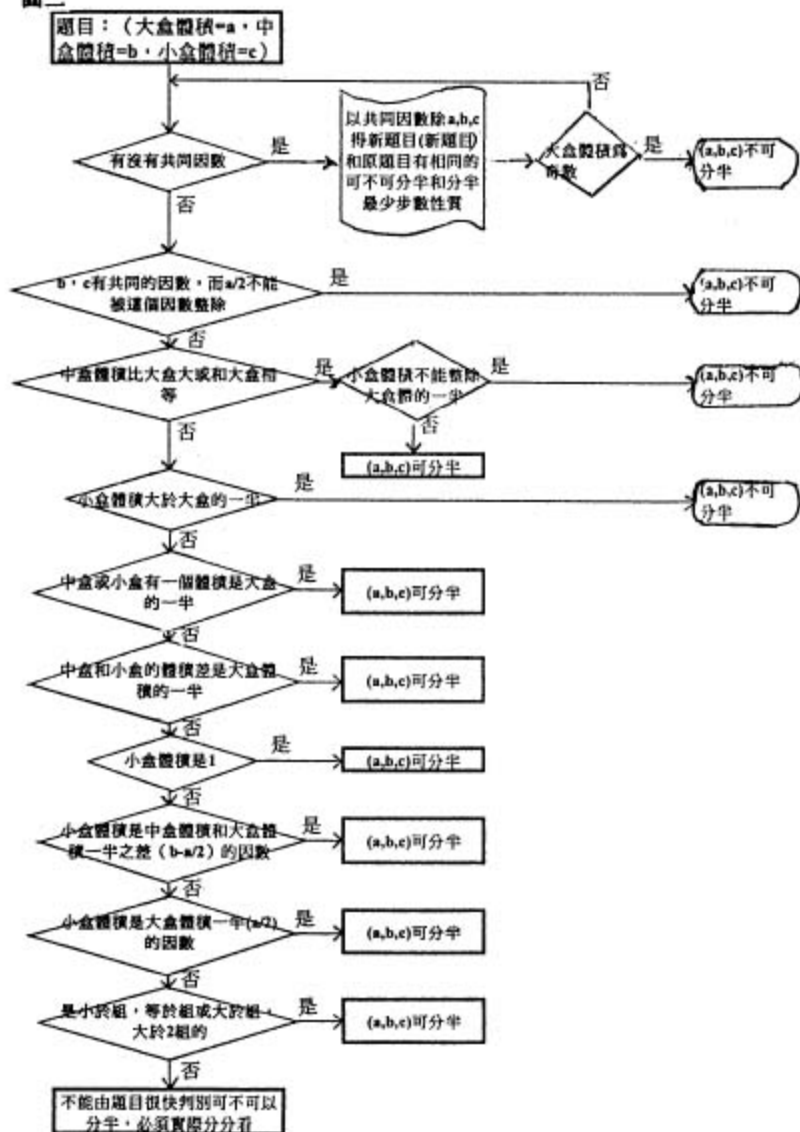
我們先看題目 (a, b, c) ，大、中、小盒的體積有沒有共同的因數，如果有，就將 a, b, c 除以這共同因數，一直到大，中，小三數間沒有比1大的共同因數，這時候得到新題目是 $(a/p, b/p, c/p)$ 。（ p 是共同因數）。

如果 a/p 變成奇數，那麼原題目 (a, b, c) 一定不能分半。

如果 a/p 仍然是偶數，那麼 $(a/p, b/p, c/p)$ 和原來的題目有相同的可以分半或是不可分半性質。

綜合我們的研究，可以用下面的判別原則篩選機器來表示判別的過程：

圖三



六、結論

(一) 不是每種不同體積的盒子組合都可以把大盒裡的水平分成兩半。例如： $(10, 6, 4)$ 就是一個無法把大盒裡的水平分成兩半的組合。

(二) 有兩種最少步數的基本倒法，可以把大盒裡的水分半成功：

(1) {大盒倒中盒，「中盒倒小盒，小盒倒大盒」，重複 [] }，若「中盒」空時，重複 []，至平分為 $a/2$ 為止。

(2){「大盒倒小盒，小盒倒中盒」，重覆〔 〕，若“中盒”滿時，中盒倒大盒，小盒倒中盒}，重覆{ 〕，至出現平分為 $a/2$ 為止。

(三) 我們研究出兩種方法可以用最少步數把大盒裡的水分半成功。

(1)以我們找到的快速算法“飆法”直接把數字組合快速運算。

(2)以流程圖篩選的方式。

(四) (1)對於等於組，我們已找到快速判別的方法，例如(20,17,3)，我們可以立刻知道分水成功的最少步數是19步($a-1$ 步)。

(2)對於小於組、大於1組、大於2組的最少步數及規律性，我們已找到完整的判別原則。

(五) 不是從1到最大體積都可倒出。

(1)(1.1)小於1組，大於1組：每一可分半的題目 (a,b,c) ，都可以倒得出從1到最大 (a) 之各種體積數。(在此二組中， p 必為1。)

(1.2)小於2組～小於6組，等於組，大於2組：特一可分半的題目 $(a/p, b/p, c/p)$ ，均可以倒得出從1到最大 (a/p) 的各種體積數；亦即每一可分半的題目 (a,b,c) ，均可以倒得出從 p 到 a 種體積數。

(2)對於不可分半的題目所能分出之體積數，尚未能找出一定之規律。

(3)大於3組～大於6組：對於可分半的題目所能分出之體積數，還未找出一定之規律；對於這些組中可以分半的題目也無法經由推測得知所有可能倒出之體積。

七、參考資料

- 1.使人聰明的智力遊戲P.56～P.62張遠南著，九章出版社86年版。
- 2.數學頭腦P.57，唐濤編譯，志文出版社67年版。
- 3.數學概念謎題P.13～P.17，林苑明譯，銀禾文化事業82年版。
- 4.趣味數學謎題的20種解法P.115王國詮釋，銀禾文化事業85年版。
- 5.數學遊戲大觀，P.308～P.314王芳夫，王登傳著，前程出版社。

評語

借用大小不同的杯子沒有刻度，能將其中一杯子的體積減半，雖然此類題目過去有很多人作過，但本件作者之方法與過去略有不同，尚稱不錯。

