

理想磁場的磁偏角

國中組物理科第三名

台北縣立永安國民中學

作者：陳明傑、林信志、黃柏元、楊郁婷

指導教師：戴嘉亨、梁靜男

一、研究動機

理化25-3地球磁場中有提及磁偏角，除了到當地測量之外，是否還有其他方法可以找出理想磁場的磁偏角，因此成立了研究小組，研究是否可把磁偏角加以公式化。

二、研究目的

- ①將磁偏角公式化。
- ②啟發對立體的概念。

三、研究設備與方法

設備：

- 1.透明地球儀與地球儀各1個。
- 2.透明的半圓體模型四個與切片模型五

塊。

- 3.量角規二種。

應用原理：

(1)畢氏定理的推廣：

$$\therefore h = b \sin \theta \quad y = b \cos \theta$$

$$\therefore x = a - b \cos \theta$$

又根據畢氏定理得知

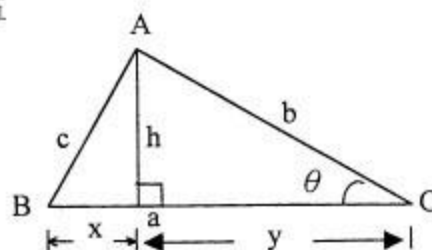
$$C^2 = h^2 + x^2$$

$$\therefore C^2 = b^2 \sin^2 \theta + (a - b \cos \theta)^2$$

$$C^2 = b^2 \sin^2 \theta + a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta$$

$$C^2 = a^2 + b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2ab \cos \theta$$

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



$$\therefore C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \quad (\text{SAS})$$

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{SSS})$$

(2)理想磁場：

地球理想磁場的兩極是對稱的，磁軸與旋轉軸成 11° 的傾斜，這一磁場的兩極與地球表面的交點即為地磁極，位於北緯 79° 西經 70° 以及南緯 79° 東經 110° 。理想磁場的兩極有別於磁針所指的磁極。本研究報告係依據理想磁場的兩極推算各地的磁偏角。(理想磁場的理論請參見GEOMAGNETISM)

推演公式說明：設地球半徑為 R ，某地點 B 的緯度 $90^\circ - \theta_1$ ， B 的經度 $\theta_2 < 70^\circ$

A ：在北半球的西經(參考圖A)

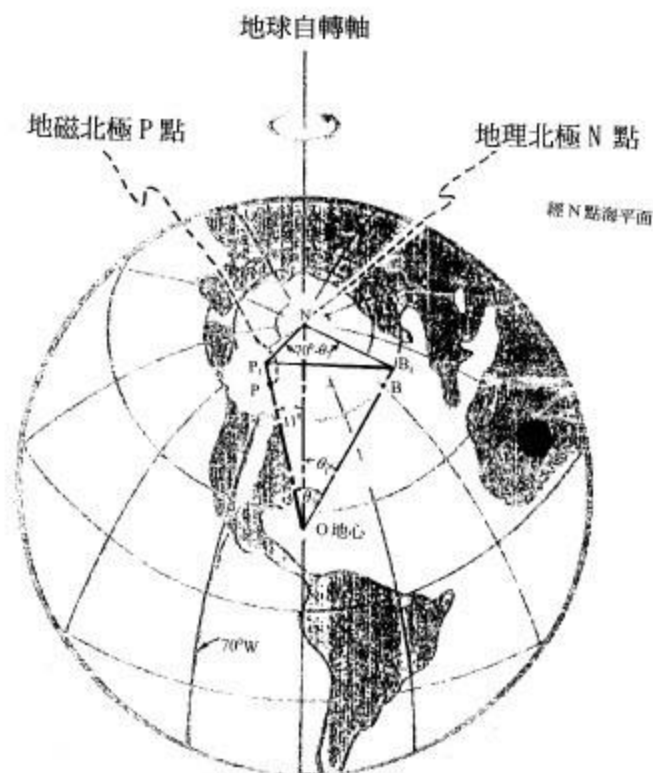


圖 A

如圖A所示 $a = \overline{NP_1} = R \tan 11^\circ$ (由 $\triangle NP_1O$ 得之)

邊長 $b = \overline{NB_1} = R \tan \theta_1$ (由 $\triangle NB_1O$ 得之)

以上構成S.A.S利用原理(1)

$$\begin{aligned} \text{得 } \overline{P_1B_1} &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos c} \\ &= \sqrt{R^2 \tan^2 11^\circ + R^2 \tan^2 \theta_1 - 2R^2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)} \\ &= R \sqrt{\tan^2 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)} \end{aligned}$$

5. $\triangle P_1OB_1$ 中, θ_3 為 $\overline{OB_1}$ 與 $\overline{OP_1}$ 的夾角。

$$a = \overline{OP_1} = \frac{R}{\cos 11^\circ} = R \sec 11^\circ, \quad b = \overline{OB_1} = \frac{R}{\cos \theta_1} = R \sec \theta_1$$

$$c = \overline{P_1B_1} = R \sqrt{\tan^2 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}$$

以上構成S.S.S利用原理(1)

$$\cos \theta_3 = \frac{R^2 \sec^2 11^\circ + R^2 \sec^2 \theta_1 - R^2 [(\tan^2 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2))]}{2R^2 \sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sec^2 11^\circ + \sec^2 \theta_1 - \tan^2 11^\circ - \tan^2 \theta_1 + 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{2 \sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$\therefore \theta_3 = \cos^{-1} \frac{\sec^2 11^\circ + \sec^2 \theta_1 - \tan^2 11^\circ - \tan^2 \theta_1 + 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{2 \sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$\therefore \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\therefore \theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

再利用圖B

$$\text{邊長 } a = \overline{P_2O} = \frac{R}{\cos \theta_3} = R \sec \theta_3 \quad (\text{由 } \triangle P_2OB \text{ 得之})$$

$$\text{邊長 } b = \overline{N_1O} = \frac{R}{\cos \theta_1} = R \sec \theta_1 \quad (\text{由 } \triangle N_1OB \text{ 得之})$$

以上構成S.A.S

$$\begin{aligned} \text{得 } \overline{P_2N_1} &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 11^\circ} \\ &= R \sqrt{\sec^2 \theta_3 + \sec^2 \theta_1 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ} \end{aligned}$$

$$\text{又邊長 } a = \overline{P_2B} = R \tan \theta_3 \quad (\text{由 } \triangle P_2OB \text{ 得之})$$

$$\text{邊長 } c = \overline{N_1B} = R \tan \theta_1 \quad (\text{由 } \triangle N_1OB \text{ 得之})$$

$$\text{邊長 } b = \overline{P_2N_1} = R \sqrt{\sec^2 \theta_3 + \sec^2 \theta_1 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ}$$

以上構成S.S.S.利用原理(1)

$$\cos B = \frac{R^2 \tan^2 \theta_3 + R^2 \tan^2 \theta_1 - R^2 (\sec^2 \theta_3 + \sec^2 \theta_1 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ)}{2R^2 \tan \theta_3 \tan \theta_1}$$

$$\text{偏磁角} = \cos^{-1} \frac{\tan^2 \theta_3 + \tan^2 \theta_1 - \sec^2 \theta_3 - \sec^2 \theta_1 + 2 \cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3}{2 \tan \theta_3 \tan \theta_1}$$

$$\therefore \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\therefore B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

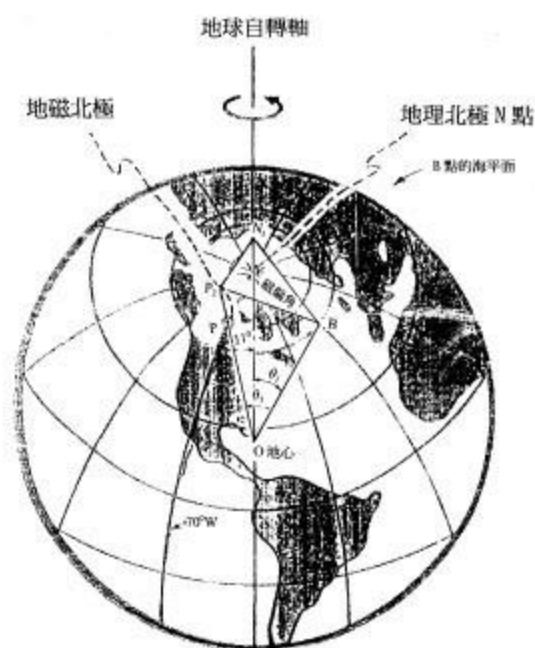


圖 B

B：在南半球的西經：

設某地南緯 $90^\circ - \theta_1$ ，西經 $\theta_2 < 70^\circ$ (圖C、D)

$\triangle P'SB_1$ 中 (如圖C)

$\angle S = 110^\circ + \theta_2$ ($\theta_2 < 70^\circ$) 說明 $\theta_2 = 70^\circ$ 磁偏角為 0° 或 180° (例如實驗1)

邊長 $a = \overline{SP_1} = R \tan 11^\circ$ (由 $\triangle SP_1O$ 得之)

邊長 $b = \overline{SB_1} = R \tan \theta_1$ (由 $\triangle SB_1O$ 得之)

以上構成S.A.S利用原理(1)

得 $\overline{P_1B_1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(110^\circ + \theta_2)}$

$$= \sqrt{R^2 \tan^2 11^\circ + R^2 \tan^2 \theta_1 - 2R^2 \tan 11^\circ \cdot \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)}$$

$$= R \sqrt{\tan^2 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \cdot \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)}$$

$\triangle P'O B_1$ 中 (圖C)

$\overline{OP_1} = \frac{R}{\cos 11^\circ} = R \sec 11^\circ$ (由 $\triangle OP_1S$ 得之)

$\overline{OB_1} = \frac{R}{\cos \theta_1} = R \sec \theta_1$ (由 $\triangle OB_1S$ 得之)

$\overline{P_1B_1} = R \sqrt{\tan^2 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \cdot \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)}$

以上構成S.S.S.利用原理(1)

可得出OB與OP₁'的夾角 θ_3

$$\cos \theta_3 = \frac{R^2 \sec^2 11^\circ + R^2 \sec^2 \theta_1 - R^2 [\tan 11^\circ + \tan^2 \theta_1 - 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)]}{2R^2 \sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sec^2 11^\circ + \sec^2 \theta_1 - \tan^2 11^\circ - \tan^2 \theta_1 + 2 \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)}{2 \sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(110^\circ + \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos[180^\circ - (110^\circ + \theta_2)]}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

(乙) 1. 在B點作一海平面並向太平洋延伸(圖D)

2. 磁軸向太空延伸與1項的海平面交於P₂'點(圖D)

3. 轉軸向太空延伸與1項的海平面交於S₁點(圖D)

4. $\triangle P_2'OS$ 中 $\angle O = 11^\circ$ (圖D)

$$\text{邊長 } a = \overline{P_2'O} = \frac{R}{\cos \theta_3} = R \sec \theta_3 \quad (\text{由} \triangle P_2'OB \text{得之})$$

$$\text{邊長 } b = \overline{S_1O} = \frac{R}{\cos \theta_1} = R \sec \theta_1 \quad (\text{由} \triangle S_1OB \text{得之})$$

以上構成S.A.S

$$\text{得 } \overline{P_2'S_1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 11^\circ} = R \sqrt{\sec^2 \theta_1 + \sec^2 \theta_3 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ}$$

5. $\triangle P_2'BS_1$ 中(圖D)

$\angle B$ (磁偏角)

$$\text{邊長 } a = \overline{P_2'B} = R \tan \theta_3$$

$$\text{邊長 } c = \overline{S_1B_1} = R \tan \theta_1$$

$$\text{邊長 } b = \overline{P_2'S_1} = R \sqrt{\sec^2 \theta_1 + \sec^2 \theta_3 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ}$$

$$\cos B = \frac{R^2 \tan^2 \theta_1 + R^2 \tan^2 \theta_3 - R^2 (\sec^2 \theta_1 + \sec^2 \theta_3 - 2 \sec \theta_1 \sec \theta_3 \cos 11^\circ)}{2R^2 \tan \theta_3 \tan \theta_1}$$

$$\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{磁偏角 } B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_3 \sec \theta_1 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} \dots\dots\dots ④$$

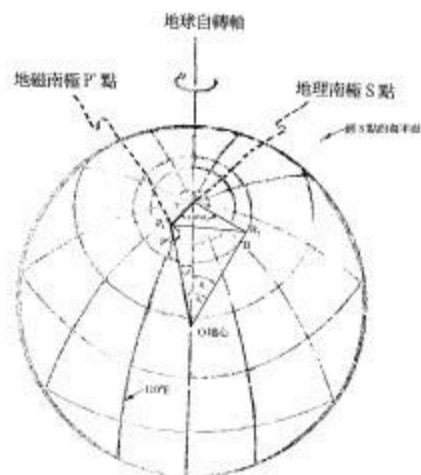


圖 C

C：由1式和2式3式得知在北半球的西經和南半球的西經，理想磁場的磁偏角B皆等於下列式子

$$\angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_3 \tan \theta_1} \dots\dots\dots ②$$

北半球時其中 $\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots ①$

南半球時其中 $\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots ③$

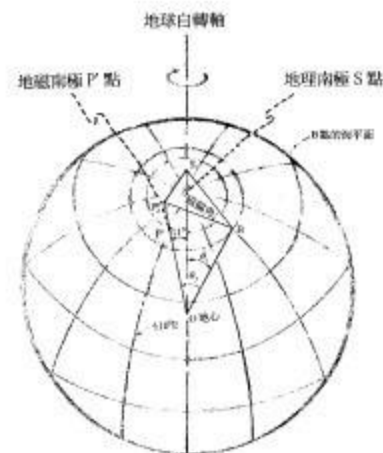


圖 D

D：當B點的經度 θ_2 大於 70° 時①式③式的 θ_3 的值不變，因 $\cos(\theta_2 - 70^\circ) = \cos(70^\circ - \theta_2)$
 $\therefore \angle B$ 的值也是②式所得的值。

註明：(1)當B點在北半球東經與南半球東經時， θ_2 以負值代入B式及C式，求 θ_3 ，其他區域以正值代入。(如實驗4)

(2)當 $\theta_2 < 70^\circ$ W至 $\theta_2 < 110^\circ$ E時磁針朝西。(圖B，圖D)(實驗4)

當 $\theta_2 > 70^\circ$ W至 $\theta_2 > 110^\circ$ E時磁針朝東。(圖B，圖D)(實驗4)

$\theta_2 = 70^\circ$ W或 110° E時磁針不朝東，也不朝西因磁偏角為 0° 或 180°

製作模型測量磁偏角(如圖E)：任意點B的緯度 $90^\circ - \theta_1$ ，經度 θ_2 (西經)

(一)、製作的步驟：

1.至一塊三角柱體使上頂、下底與三角垂直

而且 $\angle 1 = 70^\circ - \theta_2$ (測量北半球)(右圖)(類似圖A)

或 $\angle 1 = 110^\circ + \theta_2$ (測量南半球)(右圖)(類似圖C)

2.再將三角柱體磨成立體三角錐(如圖E)

而且 $\angle 2 = 11^\circ$ (右圖)(圖E)

或 $\angle 3 = \theta_1$ (右圖)(圖E)

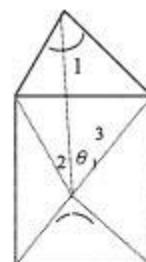
3.取 $\overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OB}$ = 地球半徑(如圖E)

4.在立體三角錐上由N點畫二條直線垂直 $\overline{ON}$ ，也就是 $\overline{NP_1}$ ， $\overline{NB_1}$ ，

右圖

則 $\angle P_1NB_1 = \angle 1 = 70^\circ - \theta_2$ 或 $110^\circ + \theta_2$

5.在立體三角錐上由B點畫二條直線垂直 $\overline{OB}$ 也就是 $\overline{BP_2}$ ， $\overline{BN_1}$ 則 $\angle P_2BN_1$ 就是地球上B點的理想磁場的磁偏角而 $\angle P_1OB_1$ (或 $\angle POB$)就是 θ_3 (實驗5,6,7,8,9)。



四、實驗

實驗1 a. 西經 70° ，北緯 85° 磁偏角， $\theta_1 = 5^\circ$ ， $70^\circ - \theta_2 = 0^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 5^\circ \cos 5^\circ}{\sec 11^\circ \sec 5^\circ} = \cos^{-1} 0.9946 = 6^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{磁偏角 } \angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 5^\circ \sec 6^\circ - 1}{\tan 5^\circ \tan 6^\circ} \\ &= \cos^{-1} -1 = 180^\circ \text{ (磁針N極朝南，S極朝北也就是 } 180^\circ \text{)} \end{aligned}$$

實驗1 b. 東經 110° ，南緯 60° 的磁偏角 $\theta_1 = 30^\circ$ ， $70^\circ - \theta_2 = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 30^\circ \cos [70^\circ - (110^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec 30^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 30^\circ}{\sec 11^\circ \sec 30^\circ} \\ &= \cos^{-1} 0.9456 = 19^\circ \end{aligned}$$

$$\text{磁偏角} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 30^\circ \sec 19^\circ - 1}{\tan 30^\circ \tan 19^\circ} = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

實驗1 c. 東經 110° ，南緯 85° 的磁偏角 $\theta_1 = 5^\circ$ ， $70^\circ - \theta_2 = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 5^\circ \cos 180^\circ}{\sec 11^\circ \sec 5^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 5^\circ}{\sec 11^\circ \sec 5^\circ}$$

$$= \cos^{-1} 0.9946 = 6^\circ$$

$$\text{磁偏角} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 5^\circ \sec 6^\circ - 1}{\tan 5^\circ \tan 6^\circ} = \cos^{-1} -1 = 180^\circ$$

實驗2 東經 120° ，北緯 0° 的磁偏角為幾度？ $\theta_1 = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$ $\theta_2 = -120^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec 90^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 90^\circ [\cos 70^\circ - (-110^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec 90^\circ}$$

$$\text{因 } \tan 90^\circ \rightarrow \infty \quad \sec 90^\circ \rightarrow \infty$$

$\therefore \theta_3$ 無解，也就是無法構成圖A的 $\triangle P_1 N B_1$ 與圖C的 $\triangle P_1' S B_1$ 。

本題修正為東經 120° 北緯 $0^\circ \sim 10'$ 的磁偏角(A題)和

東經 120° 南緯 $0^\circ \sim 10'$ 的磁偏角(B題)

計算如下

A題：東經 120° ，北緯 $0^\circ \sim 10'$ 的磁偏角？

$$\text{解：} \theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 89^\circ \sim 50' \cos[70^\circ + 120^\circ]}{\sec 11^\circ \sec 89^\circ \sim 50'} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \cot 0^\circ \sim 10' (-\cos 10^\circ)}{\sec 11^\circ \csc 0^\circ \sim 10'}$$

$$= \cos^{-1} (-0.1850755) = 100^\circ \sim 40'$$

$$\text{磁偏角} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 89^\circ \sim 50' \sec 100^\circ \sim 40' - 1}{\tan 89^\circ \sim 50' \tan 100^\circ \sim 40'}$$

$$= \cos^{-1} 0.9995276 = 1^\circ \sim 56' \text{ (朝東)}$$

B題：東經 120° ，南緯 $0^\circ \sim 10'$ 時的磁偏角？

$$\text{解：} \theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos[70^\circ + 120^\circ]}{\sec 11^\circ \sec 89^\circ \sim 50'} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 89^\circ \sim 50' \cos 10^\circ}{\sec 11^\circ \sec 89^\circ \sim 50'}$$

$$= \cos^{-1} 0.190786 = 79^\circ$$

$$\text{磁偏角} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 89^\circ \sim 50' \sec 79^\circ - 1}{\tan 89^\circ \sim 50' \tan 79^\circ}$$

$$= \cos^{-1} 0.9993501 = 1^\circ \sim 55.5'$$

$$\text{答：東經} 120^\circ \text{，北緯} 0^\circ \text{ 時的磁偏角} = \frac{1^\circ 56' + 1^\circ \sim 55'}{2} = 1^\circ \sim 55.5'$$

實驗3 東經 110° ，北緯 11° 磁偏角？ $\theta_1 = 90^\circ - 11^\circ = 79^\circ$ $\theta_2 = -110^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 79^\circ \cos[70^\circ - (-110^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec 79^\circ}$$

$$= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \cot 11^\circ \cos 180^\circ}{\sec 11^\circ \csc 11^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 - 1}{\sec 11^\circ \csc 11^\circ} = \cos^{-1} 0$$

$$\theta_3 = 90^\circ$$

$$\angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 79^\circ \sec 90^\circ - 1}{\tan 79^\circ \tan 90^\circ} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \csc 11^\circ \cos 90^\circ - 1}{\tan 79^\circ \tan 90^\circ}$$

$$\text{因 } \cos 90^\circ = 0 \quad \tan 90^\circ \rightarrow \infty$$

∠B無解，也就是無法構成圖B的 $\triangle P_2N_1B$ 與圖D的 $\triangle P_2'S_1B$ 。

本題修正為東經 110° 北緯 $11^\circ \sim 10'$ (a題)與東經 110° 北緯 $10^\circ \sim 50'$ (b題)

二題計算

A題：東經 110° ，北緯 $11^\circ \sim 10'$ $\theta_1 = 90^\circ - 11^\circ \sim 10' = 78^\circ \sim 50'$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 78^\circ \sim 50' \cos(70^\circ + 110^\circ)}{\sec 11^\circ \sec 78^\circ \sim 50'} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \cot 11^\circ \sim 10' \cos 180^\circ}{\sec 11^\circ \csc 11^\circ \sim 10'}$$

$$= \cos^{-1} 0.0029833 = 89^\circ \sim 50'$$

$$\angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 78^\circ \sim 50' \sec 89^\circ \sim 50' - 1}{\tan 78^\circ \sim 50' \tan 89^\circ \sim 50'} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \csc 11^\circ \sim 10' \cot 10' - 1}{\cot 11^\circ \sim 1' \cot 10'}$$

$$= \cos^{-1} 1 = 0$$

B題：東經 110° ，北緯 $10^\circ \sim 50'$ $\theta_1 = 79^\circ \sim 10'$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 79^\circ \sim 10' \cos(70^\circ + 110^\circ)}{\sec 11^\circ \sec 79^\circ \sim 10'} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \cot 10^\circ \sim 50' \cos 180^\circ}{\sec 11^\circ \csc 10^\circ \sim 50'}$$

$$= \cos^{-1} 0.0029393 = 90^\circ \sim 10'$$

$$\angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 79^\circ \sim 10' \sec 90^\circ \sim 10' - 1}{\tan 79^\circ \sim 10' \tan 90^\circ \sim 10'} = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

因此東經 110° ，北緯 11° 的磁偏角 $= \frac{0^\circ + 0^\circ}{2} = 0^\circ$

∴∠B也是 0°

實驗4 東經 120° ，北緯 60° 的磁偏角=? $\theta_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ $\theta_2 = -120^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 30^\circ \cos[70^\circ - (-120^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 30^\circ \cos 190^\circ}{\sec 11^\circ \sec 30^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 30^\circ \cos 10^\circ}{\sec 11^\circ \sec 30^\circ}$$

$$= \cos^{-1} 0.7562 = 40^\circ \sim 52'$$

$$\text{磁偏角 } \angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 30^\circ \sec 40^\circ \sim 52' - 1}{\tan 30^\circ \tan 40^\circ \sim 52'}$$

$$= \cos^{-1} 0.9986 = 3^\circ \text{ (朝東)}$$

實驗4 東經 60° ，南緯 10° 的磁偏角=? $\theta_1 = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ $\theta_2 = -60^\circ$

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 80^\circ \cos[70^\circ - (-60^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec 80^\circ}$$

$$= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \cot 10^\circ \cos 130^\circ}{\sec 11^\circ \csc 10^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \cot 10^\circ \cos 50^\circ}{\sec 11^\circ \csc 10^\circ}$$

$$= \cos^{-1} 0.2913 = 73^\circ \sim 4'$$

$$\text{磁偏角 } \angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 80^\circ \sec 73^\circ \sim 4' - 1}{\tan 80^\circ \tan 73^\circ \sim 4'}$$

$$= \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \csc 10^\circ \csc 16^\circ \sim 56' - 1}{\cot 10^\circ \cot 16^\circ \sim 56'}$$

$$= \cos^{-1} 0.9882 = 8^\circ \sim 49' \text{ (朝東)}$$

實驗5 B點的緯度為 75°N (模式為 $\theta_1=15^{\circ}$)，經度 $\theta_2=118.5^{\circ}-70^{\circ}=48.5^{\circ}\text{E}$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan 15^{\circ} \cos(70^{\circ} + 48.5^{\circ})}{\sec 11^{\circ} \sec 15^{\circ}} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan 15^{\circ} \cos 118.5^{\circ}}{\sec 11^{\circ} \sec 15^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^{\circ} \tan 15^{\circ} \sin 28.5^{\circ}}{\sec 11^{\circ} \sec 15^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.9246 = 22.388^{\circ} \quad \text{模型測量的角 } \theta_3 = 22.4^{\circ} \\ \angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec 15^{\circ} \sec 22.388^{\circ} - 1}{\tan 15^{\circ} \tan 22.388^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.8973 = 26.125^{\circ} \quad (\text{朝西})\end{aligned}$$

模型測量的磁偏角 26.4°

$$\text{模型的偏差量} = \frac{26.4 - 26.125}{26.125} = 0.01$$

模型的精確度 = 0.99

實驗6 B點為南韓 77° (模式為 $\theta_1=13^{\circ}$)，西經 $4.5^{\circ} = \theta_2$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^{\circ} \tan 13^{\circ} \cos(70^{\circ} - 4.5^{\circ})}{\sec 11^{\circ} \sec 13^{\circ}} = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^{\circ} \tan 13^{\circ} \cos 65.5^{\circ}}{\sec 11^{\circ} \sec 13^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^{\circ} \tan 13^{\circ} \sin 24.5^{\circ}}{\sec 11^{\circ} \sec 13^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.93731613 = 20.17^{\circ} \\ \text{模型測量的角 } \theta_3 &= 20.4^{\circ} \\ \angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec 13^{\circ} \sec 20.17^{\circ} - 1}{\tan 13^{\circ} \tan 20.17^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.871698982 = 30.237^{\circ}\end{aligned}$$

模型測量的磁偏角 29.5° (朝西)

$$\text{模型的偏差量} = \frac{0.737}{30.237} = 0.024$$

模型的精確度 = 0.976

實驗7 B點為緯度 76°N ($\theta_1=14^{\circ}$)，經度 $46.3^{\circ}\text{E} = \theta_2$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan 14^{\circ} \cos(70^{\circ} - \theta_2)}{\sec 11^{\circ} \sec 14^{\circ}} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan 14^{\circ} \cos[70^{\circ} - (-46.3^{\circ})]}{\sec 11^{\circ} \sec 14^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan 14^{\circ} \cos 116.3^{\circ}}{\sec 11^{\circ} \sec 14^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.9320161 = 21.249^{\circ} \\ \text{模型測量的角 } \theta_3 &= 21.3^{\circ} \\ \angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec 14^{\circ} \sec 21.249^{\circ} - 1}{\tan 14^{\circ} \tan 21.249^{\circ}} \\ &= \cos^{-1} 0.881612293 = 28.163^{\circ}\end{aligned}$$

模型測量的磁偏角 28.6° (朝西)

$$\text{模型的偏差量} = \frac{28.6 - 28.163}{28.163} = 0.0155$$

模型的精確度 $= 0.9845$

實驗8 B點為緯度 74°S ($\theta_1 = 16^\circ$)，經度 $11^\circ\text{W} = \theta_2$

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - 11^\circ)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 16^\circ \cos 59^\circ}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 16^\circ \sin 31^\circ}{\sec 11^\circ \sec 16^\circ} \\ &= \cos^{-1} 0.91651265 = 23.5785^\circ\end{aligned}$$

測量結果 23.5°

$$\begin{aligned}\angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 16^\circ \sec 23.5785^\circ - 1}{\tan 16^\circ \tan 23.5785^\circ} \\ &= \cos^{-1} 0.912587156 = 24.1346^\circ \text{ (朝西)}\end{aligned}$$

模型測量的磁偏角 24°

$$\text{模型的偏差量} = \frac{0.1346^\circ}{24.1346^\circ} = 0.00557$$

模型的精確度 $= 0.99443$

實驗9 B點為緯度 73°N ($\theta_1 = 17^\circ$)，經度 52°E

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos[70^\circ - (-52.2^\circ)]}{\sec 11^\circ \sec \theta_1} \\ &= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan 17^\circ \cos 122^\circ}{\sec 11^\circ \sec 17^\circ} = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 17^\circ \sin 32^\circ}{\sec 11^\circ \sec 17^\circ} \\ &= \cos^{-1} 0.90917205 = 24.6^\circ\end{aligned}$$

模型測量的角 $\theta_3 = 24.2^\circ$

$$\begin{aligned}\angle B &= \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec 17^\circ \sec 24.6^\circ - 1}{\tan 17^\circ \tan 24.6^\circ} \\ &= \cos^{-1} 0.92141251 = 22.895^\circ \text{ (朝西)}\end{aligned}$$

模型測量的磁偏角 22.5°

$$\text{模型的偏差量} = \frac{0.395}{22.895} = 0.017$$

模型的精確度 $= 0.983$

五、討論

實驗討論1：有關老師在課堂中，指出圖25-10(在理想磁場的條件下)有兩個特定區的磁偏角不隨緯度的變化而變化：

(1) 0° 區：座落在地磁北極到地理南極間同一經度，與地磁南極到地理北極間同一經度上。也就是 79°N 70°W 到 90°S ，以及 79°S 110°E 到 90°N 。

(2) 180° 區：座落在地磁北極到地理北極間同一經度上，與地磁南極到地理

南極間同一經度上。也就是 $79^{\circ}\text{N}70^{\circ}\text{W}$ 到 90°N ，以及 $79^{\circ}\text{S}110^{\circ}\text{E}$ 到 90°S 。

以上二特定區是否可由公式的計算得到證明呢？

結論：以上二特定區是老師直接由課本(第四冊)圖25-10中觀察所得的結論，這個結論經公式驗算的結果，證明老師當所下的結論是正確的，請參閱實驗1。

實驗討論2：本研究所得結論

$$\text{磁偏角 } B = \cos^{-1} \frac{\cos 11^{\circ} \sec \theta_1 \sec \theta_2 - 1}{\tan \theta_2 \tan \theta_1} \dots\dots\dots (\text{A式})$$

$$\text{北半球時 A式中 } \theta_2 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^{\circ} \tan \theta_1 \cos(70^{\circ} - \theta_1)}{\sec 11^{\circ} \sec \theta_1} \dots\dots\dots (\text{B式})$$

$$\text{南半球時 A式中 } \theta_2 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^{\circ} \tan \theta_1 \cos(70^{\circ} - \theta_1)}{\sec 11^{\circ} \sec \theta_1} \dots\dots\dots (\text{C式})$$

問：以上(A)式、(B)式、(C)式是否可使用在地球上的任何地點？為什麼？

如何改善？

結論：1. 以上三式在地球上二個區域無法使用：

赤道：因赤道上任意點與地心的連線平行於北極點，南極點的海平面沒有交點，無法構成圖A的 $\triangle P_1NB_1$ ，圖B的 N_1BP_2 ，圖C的 $P_1'SB$ ，圖D的 $P_2'S_1B$ 。

$\theta_3=90^{\circ}$ 時：因 $\theta_3=90^{\circ}$ 時，磁軸(也就是圖B的 OP 與圖D的 OP')平行於該點的海平面沒有交點，無法構成圖B的 $\triangle P_2N_1B$ 與圖D的 $\triangle P_2'S_1B$ (如實驗3)。

2. 以上兩區域的磁偏角如何算，以赤道而言，只能在B點的經度上取赤道以北 $0^{\circ}-10'$ 與赤道以南 $0^{\circ}-10'$ ，分別計算出這兩地的磁偏角然後取平均值，就是赤道的磁偏角。

同理，當你算出 $\theta_3=90^{\circ}$ 時，就不能再算磁偏角，必須分別把緯度加 $10'$ 或減 $10'$ ，再算出 θ_3 與磁偏角，然後取磁偏角的平均值就是 $\theta_3=90^{\circ}$ 的磁偏角，請參閱實驗2與實驗3。

實驗討論3：以模型測量磁偏角，其精確度有多少？這精確度代表那些含意？且模型的角度如何測量？為什麼？

結論：1. 由實驗5到實驗9都是模型測得的磁偏角，然後再以本研究所得的公式(A)，公式(B)，公式(C)推算磁偏角，再算出五個模型的精確度，結果平均精確度

$$= \frac{1}{5} (0.990 + 0.976 + 0.985 + 0.994 + 0.983) = 0.99 = 99\%$$

2. 由99%的精確度可確定下列幾項：

a 本研所得得公式(A)、公式(B)、公式(C)是正確的。

b 當初老師說可把地球儀切片加工之後，可測得磁偏角，也是正確的(參考研究動機)。

c 指導廠商用CNC車床製作的模型很精準，證明本研究中的製作步驟也是正確的。(參考圖E，製作步驟，模I到模V)。

3. 模型的角度除了磁偏角用量角規，測量五次以外，其餘的角度都放在平面上的白紙用筆描繪，並用360°的量角器測量，每個角度皆重複五次，再取平均值，主要目的為測量次數愈多，愈精準。

實驗討論4：公式(B)，(C)中的 θ_2 有那些註明事項？為什麼？

結論：1. 當B點的經度 θ_2 大於70° W時①式③式的 θ_3 的值不變，因 $\cos(\theta_2 - 70^\circ) = \cos(70^\circ - \theta_2)$

∴ $\angle B_2$ 的值也是②式所得的值。

2. 當B點在北半球的東經 θ_2 時，圖A中 $\triangle P_1NB_1$ 的 $\angle N = \theta_2 + 70^\circ$ 也就是1式中 $\cos(70^\circ - \theta_2)$ 變成 $\cos(70^\circ + \theta_2)$ 也就是 θ_2 以負值代入①式

例如：西經 20°， $\angle N = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$

東經 20°， $\angle N = 70^\circ - (20^\circ) = 90^\circ$

$$= \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ + \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

3. 當B點在南半球的東經 θ_2 時，圖C中 $\triangle P_1'SB_1$ 的 $\angle S = 110^\circ - \theta_2$ ，也就是 θ_2 以負值代入③式，

因 $\theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(110^\circ - \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1}$ (參閱③式推演過程)

$$= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(180^\circ - (110^\circ - \theta_2))}{\sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

$$= \cos^{-1} \frac{1 - \tan 11^\circ \tan \theta_1 \cos(70^\circ + \theta_2)}{\sec 11^\circ \sec \theta_1}$$

實驗討論5：在本報告G項(結論)中註明B 所述

當 $\theta_2 < 70^\circ W$ 至 $\theta_2 < 110^\circ E$ 的範圍時，磁針朝西，

當 $\theta_2 > 70^\circ W$ 至 $\theta_2 > 110^\circ E$ 的範圍時，磁針朝東，

以上式如何判斷的？

結論：這是由透明的球體所觀察到的，因磁針與磁軸在同一平面上，所以磁軸投射到球體上與經線的夾角就可判斷(本項說明可現場展示說明。)

實驗討論6：地球上任何位置的磁偏角是否都不相同，或是不同地區都有相同得磁偏角？而本研究所導出的公式是否可算出等磁偏角的區域？

結論：1. 在不同區域都有相同的磁偏角，例如實驗討論1所敘述的 0° 區與 180° 區，磁偏角最小為 0° ，最大為 180° 。

2. 公式(A)、公式(B)、公式(C)，是可以算出等磁偏角的區域：例如北半球的磁偏角設為 60° 時，

$$\text{則 } 60^\circ = \cos^{-1} \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3}$$

$$\text{所以 } \frac{\cos 11^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(1)$$

- a. 由(1)式中再合理的假設不同 θ_3 的角度之後就可算出不同的 θ_1 並得出不同緯度。
- b. 再將不同的 θ_1 放入B式，就可得到不同的 $70^\circ - \theta_2$ 而得出不同的經度。
- c. 南半球也是如此，此問題的數學題詣超出國中程度，等進高中後再繼續探討。

實驗討論7：本研究是依據GEOMAGNETISM的資料把地磁北極設在 $70^\circ\text{W}79^\circ\text{N}$ ，地磁南極設在 $110^\circ\text{E}79^\circ\text{S}$ 而研究出(A)式、(B)式、(C)式，而地磁北極與地磁南極的位置會移動，到時(A)式、(B)式、(C)式是否也要改正？

結論：只要地磁北極、地磁南極在同一直線上，並且經過地心，而且知道它們的經度、緯度，則(A)式、(B)式、(C)式經過修正之後，仍然可採用。

例如地磁北極移動到 $75^\circ\text{W}85^\circ\text{N}$ ，地磁南極移動到 $105^\circ\text{E}85^\circ\text{S}$ ，則(A)式、(B)式、(C)式改成下列

$$\angle B = \cos^{-1} \frac{\cos 5^\circ \sec \theta_1 \sec \theta_3 - 1}{\tan \theta_1 \tan \theta_3} \dots\dots\dots(\text{A 式})$$

$$\text{北半球時 } \theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 + \tan 5^\circ \tan \theta_1 \cos(75^\circ - \theta_2)}{\sec 5^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots(\text{B 式})$$

$$\text{南半球時 } \theta_3 = \cos^{-1} \frac{1 - \tan 5^\circ \tan \theta_1 \cos(75^\circ - \theta_2)}{\sec 5^\circ \sec \theta_1} \dots\dots\dots(\text{C 式})$$

A式、B式、C式的規定事項仍然不變，如同研究報告內容。

六、參考資料

- (1)國中教科書：數學、理化。
- (2)百科全書。

評語

本件可以說是一個學生學習到初等數學後，如何將之應用到物理系統來的模範例子！作者在學到了初等的三角函數論後，想到將之變成球面三角學、再計算應用到地球磁場的磁偏角的幾何推算方式，以初中之程度看來，實屬難能可貴！雖然本件嚴格來說和物理之關係並不是真的那麼密切，但其探索精神確實值得鼓勵。

