

誤導老師三十年的一個錯誤題目

高小組數學科第三名

台南市志開國民小學

作者：王崧、張家欣、李捷、沈廣軒

指導教師：洪文正、吳雅娟

一、研究動機

上數學課時，突然聽見擴音器傳來全校老師請到辦公室開會的聲音，只見老師放下粉筆匆匆往外走去，突然間，又不放心的回頭隨手在黑板寫上 $\square \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.28$ ，求 $\square = ?$ 這個題目，十分鐘後，老師回來並檢討這個題目。

經由大家討論，我們一致同意 $\square = 3.535$ 這個答案，下課後，我發現經過驗算所得的答案好像怪怪的，一連算了幾次都是一樣的結果，我就將題目拿去請教老師，看看到底那裡出了問題，老師也很訝異，並建議大家一起探討研究，經過二個多月的努力，皇天不負苦心人，我們終於有了重大的發現。

二、研究討論

(一) 我們的解法及驗算過程正確嗎？

$$\square \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.28 \quad \text{求 } \square = ?$$

$$\text{驗算：} 3.535 \div 2.17 = 1.6 \cdots 0.063$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 2.17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ 30 \\ \hline 3.255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.255 \\ + 0.28 \\ \hline 3.535 \\ \hline \therefore \square = 3.535 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ 217 \overline{) 353.5} \\ \underline{217} \\ 1365 \\ \underline{1302} \\ 063 \end{array}$$

- 討論：
1. 我們求出 $\square = 3.535$ 的過程及方法，每個人都認為是正確無誤的。
 2. 我們的驗算過程，經由大家再三討論，大家也都認為沒有錯誤，那麼驗算會與原題意不符呢？
 3. 突然間，廣軒獨排眾議的提出他的驗算結果與原題意相吻合，令大家十分好奇。

(二) 廣軒是如何驗算的？他的驗算過程正確嗎？

$$\square \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.28 \quad \text{求 } \square = ?$$

$$\text{驗算：} 3.535 \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.28$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 2.17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ 30 \\ \hline 3.255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.255 \\ + 0.28 \\ \hline 3.535 \end{array}$$

$$\therefore \square = 3.535$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 217 \overline{) 353.5} \\ \underline{217} \\ 1365 \\ \underline{1085} \\ 280 \end{array}$$

討論：1.廣軒求出 $\square = 3.535$ 的過程及方法和我們相同，並無特殊之處。

2.他的驗算結果雖與原題意相吻合，但我們都不表贊同，據他表示他是依原來題目的答案拼湊而成的。

3.我們認為正確的驗算過程及結果與原題意並不相符；反倒是錯誤的驗算結果與原題意相吻合，這到底是那裡出了問題？

(三) 查閱現行課程數學課本內容，我們自行設計一些題目由簡而繁進行討論，嘗試找出問題的所在。

1.當除數、商及餘數皆為整數時：

(A) $\square \div 12 = 800 \cdots 7$ 求 $\square = ?$

$$\begin{array}{r} 800 \\ \times 12 \\ \hline 1600 \\ 800 \\ \hline 9600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9600 \\ + 7 \\ \hline 9607 \end{array}$$

$$\therefore \square = 9607$$

驗算： $9607 \div 12 = 800 \cdots 7$

$$\begin{array}{r} 800 \\ 12 \overline{) 9607} \\ \underline{96} \\ 7 \end{array}$$

(B) $\square \div 26 = 309 \cdots 24$ 求 $\square = ?$

$$\begin{array}{r} 309 \\ \times 26 \\ \hline 1854 \\ 618 \\ \hline 8034 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8034 \\ + 24 \\ \hline 8058 \end{array}$$

$$\therefore \square = 8058$$

驗算： $8058 \div 26 = 309 \cdots 24$

$$\begin{array}{r} 309 \\ 26 \overline{) 8058} \\ \underline{78} \\ 258 \\ \underline{234} \\ 24 \end{array}$$

2.當除數及餘數為整數、而商為小數時：

(A) $\square \div 30 = 1.2 \cdots 4$ 求 $\square = ?$

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times 30 \\ \hline 36.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 4 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\therefore \square = 40$$

驗算： $40 \div 30 = 1.3 \cdots 1$

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ 30 \overline{) 40.0} \\ \underline{30} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 10 \end{array}$$

與原題意不符

(B) $\square \div 120 = 3.2 \cdots 11$ 求 $\square = ?$

驗算： $395 \div 120 = 3.2 \cdots 11$

$$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 120 \\ \hline 640 \\ 32 \\ \hline 384.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \\ + 11 \\ \hline 395 \end{array}$$

$\therefore \square = 395$

$$\begin{array}{r} 3.2 \\ 120 \overline{) 395.0} \\ \underline{360} \\ 350 \\ \underline{240} \\ 110 \end{array}$$

3. 當除數及商為整數、而餘數為小數時：

(A) $\square \div 18 = 19 \cdots 7.23$ 求 $\square = ?$

驗算： $349.23 \div 18 = 19 \cdots 7.23$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 18 \\ \hline 152 \\ 19 \\ \hline 342 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 342 \\ + 7.23 \\ \hline 349.23 \end{array}$$

$\therefore \square = 349.23$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 18 \overline{) 349.23} \\ \underline{18} \\ 169 \\ \underline{162} \\ 723 \end{array}$$

(B) $\square \div 125 = 120 \cdots 14.92$ 求 $\square = ?$

驗算： $15014.92 \div 125 = 120 \cdots 14.92$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 125 \\ \hline 600 \\ 240 \\ 120 \\ \hline 15000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15000 \\ + 14.92 \\ \hline 15014.92 \end{array}$$

$\therefore \square = 15014.92$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 125 \overline{) 15014.92} \\ \underline{125} \\ 251 \\ \underline{250} \\ 1492 \end{array}$$

4. 當商及餘數為整數、而除數為小數時：

(A) $\square \div 4.62 = 15 \cdots 3$ 求 $\square = ?$

驗算： $72.3 \div 4.62 = 15 \cdots 3$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 4.62 \\ \hline 30 \\ 90 \\ 60 \\ \hline 69.30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69.3 \\ + 3 \\ \hline 72.3 \end{array}$$

$\therefore \square = 72.3$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 4.62 \overline{) 72.30} \\ \underline{462} \\ 2610 \\ \underline{2310} \\ 300 \end{array}$$

(B) $\square \div 15.6 = 120 \cdots 13$ 求 $\square = ?$

驗算： $1885 \div 15.6 = 120 \cdots 13$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 15.6 \\ \hline 720 \\ 600 \\ 120 \\ \hline 1872.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1872 \\ + 13 \\ \hline 1885 \end{array} \quad \therefore \square = 1885$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 15.6 \overline{) 1885.0} \\ \underline{156} \\ 325 \\ \underline{312} \\ 13.0 \end{array}$$

5. 當商為整數、而除數及餘數為小數時：

(A) $\square \div 48.3 = 31 \cdots 23.5$ 求 $\square = ?$

驗算： $1520.8 \div 48.3 = 31 \cdots 23.5$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 48.3 \\ \hline 93 \\ 248 \\ 124 \\ \hline 1497.3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1497.3 \\ + 23.5 \\ \hline 1520.8 \end{array} \quad \therefore \square = 1520.8$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 48.3 \overline{) 1520.8} \\ \underline{1449} \\ 718 \\ \underline{483} \\ 23.5 \end{array}$$

(B) $\square \div 125.4 = 115 \cdots 1.25$ 求 $\square = ?$

驗算： $14422.25 \div 125.4 = 115 \cdots 1.25$

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times 125.4 \\ \hline 460 \\ 575 \\ 230 \\ 115 \\ \hline 14421.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14421 \\ + 1.25 \\ \hline 14422.25 \end{array} \quad \therefore \square = 14422.25$$

$$\begin{array}{r} 115 \\ 125.4 \overline{) 14422.25} \\ \underline{1254} \\ 1882 \\ \underline{1254} \\ 6282 \\ \underline{6270} \\ 1.25 \end{array}$$

6. 當餘數為整數、而除數及商為小數時：

(A) $\square \div 30.2 = 1.3 \cdots 4$ 求 $\square = ?$

驗算： $43.26 \div 30.2 = 1.4 \cdots 0.98$

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times 30.2 \\ \hline 26 \\ 390 \\ \hline 39.26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39.26 \\ + 4 \\ \hline 43.26 \end{array} \quad \therefore \square = 43.26$$

$$\begin{array}{r} 1.4 \\ 30.2 \overline{) 43.26} \\ \underline{302} \\ 1306 \\ \underline{1208} \\ 98 \end{array}$$

與原題意不符

(B) $\square \div 30.2 = 1.3 \cdots 3$ 求 $\square = ?$

驗算： $42.26 \div 30.2 = 1.3 \cdots 3$

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times 30.2 \\ \hline 26 \\ 390 \\ \hline 39.26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39.26 \\ + 3 \\ \hline 42.26 \end{array} \quad \therefore \square = 42.26$$

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ 30.2 \overline{) 42.26} \\ \underline{302} \\ 1206 \\ \underline{906} \\ 300 \end{array}$$

7. 當除數為整數、而商及餘數為小數時：

(A) $\square \div 12 = 1.5 \cdots 1.3$ 求 $\square = ?$

驗算： $19.3 \div 12 = 1.6 \cdots 0.1$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 12 \\ \hline 30 \\ 15 \\ \hline 18.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 1.3 \\ \hline 19.3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ 12 \overline{) 19.3} \\ \underline{12} \\ 73 \\ \underline{72} \\ 0.1 \end{array}$$

$\therefore \square = 19.3$

與原題意不符

(B) $\square \div 150 = 1.2 \cdots 13.5$ 求 $\square = ?$

驗算： $193.5 \div 150 = 1.2 \cdots 13.5$

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times 150 \\ \hline 600 \\ 12 \\ \hline 180.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ + 13.5 \\ \hline 193.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ 150 \overline{) 193.5} \\ \underline{150} \\ 435 \\ \underline{300} \\ 13.5 \end{array}$$

$\therefore \square = 193.5$

8. 當除數、商及餘數皆為小數時：

(A) $\square \div 1.5 = 0.41 \cdots 0.014$ 求 $\square = ?$

驗算： $0.629 \div 1.5 = 0.41 \cdots 0.014$

$$\begin{array}{r} 0.41 \\ \times 1.5 \\ \hline 205 \\ 41 \\ \hline 0.615 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.615 \\ + 0.014 \\ \hline 0.629 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.41 \\ 1.5 \overline{) 0.629} \\ \underline{60} \\ 29 \\ \underline{15} \\ 0.014 \end{array}$$

$\therefore \square = 0.629$

(B) $\square \div 1.5 = 0.41 \cdots 0.015$ 求 $\square = ?$

驗算： $0.63 \div 1.5 = 0.42 \cdots 0$

$$\begin{array}{r} 0.41 \\ \times 1.5 \\ \hline 205 \\ 41 \\ \hline 0.615 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.615 \\ + 0.015 \\ \hline 0.630 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.42 \\ 1.5 \overline{) 0.630} \\ \underline{60} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore \square = 0.63$

與原題意不符

討論：1. 綜合前面所述八種類型題目進行歸納分析工作，所得結果如下：

(符合條件者打 \checkmark)

除 數		商		餘 數		與原題意 全部相符	與原題意 部分不符
小數	整數	小數	整數	小數	整數		
	✓		✓		✓	✓	
	✓	✓			✓		✓
	✓		✓	✓		✓	
✓			✓		✓	✓	
✓			✓	✓		✓	
✓		✓			✓		✓
	✓	✓		✓			✓
✓		✓		✓			✓

2. 只要商為整數時，所求出的某數皆能與原題意相符；而商為小數時，就可能出現與原題意不符的情況。因此，我們認為商為小數時，除數與餘數之間可能含有某種關係存在。

(四) 再回頭探討當商為整數或小數時，除數與餘數之間存在的關係。此時，我們碰到了瓶頸，由除法直式無法找出它們之間的關係，老師建議我們利用應用問題化成橫式來試試看。

1. 小明有22元，平均分給7人，1人可分得多少元？

$$22 \div 7 = \text{商} \cdots \text{餘數}$$

① 算到整數位：

$$1 \text{人得} 3 \text{元} \xrightarrow{3 \times 7 = 21} 7 \text{人共得} 21 \text{元}$$

$$22 \text{元} - 21 \text{元} = 1 \text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘1元無法再分給7人，而1人至少得1元

$$\therefore 1 < \textcircled{1} \times 7 \rightarrow 1 < 7$$

② 算到小數第一位：（剩餘的1元→10個0.1元→1.0元）

$$1 \text{人得到} 0.1 \text{元} \xrightarrow{0.1 \times 7 = 0.7} 7 \text{人共得} 0.7 \text{元}$$

$$1.0 \text{元} - 0.7 \text{元} = 0.3 \text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.3元無法再分給7人，而1人至少得0.1元

$$\therefore 0.3 < \textcircled{0.1} \times 7 \rightarrow 0.3 < 0.7$$

③ 算到小數第二位：（剩餘的0.3元→30個0.01元→0.30元）

$$1 \text{人得到} 0.04 \text{元} \xrightarrow{0.04 \times 7 = 0.28} 7 \text{人共得} 0.28 \text{元}$$

$$0.30 \text{元} - 0.28 \text{元} = 0.02 \text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.02元無法再分給7人，而1人至少得0.01元

$$\therefore 0.02 < \textcircled{0.01} \times 7 \rightarrow 0.02 < 0.07$$

$$\begin{array}{r} 3.14 \\ 7 \overline{) 22.00} \\ \underline{21} \\ 1.0 \\ \underline{0.7} \\ 0.30 \\ \underline{0.28} \\ 0.02 \end{array}$$

2. 小王有17.2kg的肉，平均分給9條狗吃，每條狗可分得多少肉？

$$17.2 \div 9 = \text{商} \cdots \text{餘數}$$

①算到整數位：

$$1 \text{ 條狗得 } 1\text{kg肉} \xrightarrow{1 \times 9 = 9} 9 \text{ 條狗共得 } 9\text{kg肉}$$

$$17.2\text{kg} - 9\text{kg} = 8.2\text{kg} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘8.2kg肉無法再分給9條狗而1條狗至少得1kg肉

$$\therefore 8.2 < \textcircled{1} \times 9 \rightarrow 8.2 < 9$$

$$\begin{array}{r} 1.91 \\ 9 \overline{) 17.20} \\ \underline{9} \\ 8.2 \\ \underline{8.1} \\ 0.10 \\ \underline{0.09} \\ 0.01 \end{array}$$

②算到小數第一位：（剩餘的8.2kg→82個0.1kg→8.2kg）

$$1 \text{ 條狗得 } 0.9\text{kg肉} \xrightarrow{0.9 \times 9 = 8.1} 9 \text{ 條狗共得 } 8.1\text{kg肉}$$

$$8.2\text{kg} - 8.1\text{kg} = 0.1\text{kg} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.1kg肉無法再分給9條狗，而1條狗至少得0.1kg肉

$$\therefore 0.1 < \textcircled{0.1} \times 9 \rightarrow 0.1 < 0.9$$

③算到小數第二位：（剩餘的0.1kg→10個0.01kg→0.10kg）

$$1 \text{ 條狗得 } 0.01\text{kg肉} \xrightarrow{0.01 \times 9 = 0.09} 9 \text{ 條狗共得 } 0.09\text{kg肉}$$

$$0.10\text{kg} - 0.09\text{kg} = 0.01\text{kg} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.01kg肉無法再分給9條狗，而1條狗至少得0.01kg肉

$$\therefore 0.01 < \textcircled{0.01} \times 9 \rightarrow 0.01 < 0.09$$

3. 米1kg賣3.5元，請問20.4元可買多少米？

$$20.4 \div 3.5 = \text{商} \cdots \text{餘數}$$

①算到整數位：

$$1\text{kg米 } 3.5\text{元} \xrightarrow{3.5 \times 5 = 17.5} 5\text{kg米共要 } 17.5\text{元}$$

$$20.4\text{元} - 17.5\text{元} = 2.9\text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘2.9元無法再買1kg米，因為1kg米至少要3.5元

$$\therefore 2.9 < 3.5 \times \textcircled{1} \rightarrow 2.9 < 3.5$$

$$\begin{array}{r} 5.82 \\ 3.5 \overline{) 20.400} \\ \underline{17.5} \\ 2.90 \\ \underline{2.80} \\ 0.100 \\ \underline{0.070} \\ 0.030 \end{array}$$

②算到小數第一位：（剩餘2.9元）

$$1\text{kg米 } 3.5\text{元} \xrightarrow{3.5 \times 0.8 = 2.80} 0.8\text{kg米共要 } 2.8\text{元}$$

$$2.9\text{元} - 2.8\text{元} = 0.1\text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.1元無法再買0.1kg米，因為0.1kg米至少要0.35元

$$\therefore 0.1 < 3.5 \times \textcircled{0.1} \rightarrow 0.1 < 0.35$$

③算到小數第二位：（剩餘0.1元）

$$1\text{kg米 } 3.5\text{元} \xrightarrow{3.5 \times 0.02 = 0.070} 0.02\text{kg米共要 } 0.07\text{元}$$

$$0.1\text{元} - 0.07\text{元} = 0.03\text{元} \rightarrow \text{剩餘}$$

剩餘0.03元無法再買0.01kg米，因為0.01kg米至少要0.035元

$$\therefore 0.03 < 3.5 \times \textcircled{001} \rightarrow 0.03 < 0.035$$

- 討論：1. 當商為整數 $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} \times 1$
 當商為一位小數 $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} \times 0.1$
 當商為二位小數 $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} \times 0.01$
 2. 同理，我們可以推測：
 當商為三位小數 $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} \times 0.001$
 當商為四位小數 $0 \leq \text{餘數} < \text{除數} \times 0.0001$
 \vdots \vdots

三、結論

- (一) 老師隨手在黑板上寫的 $\square \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.28$ 求 $\square = ?$ 這是個不合理而且錯誤的題目，若修正成下列三種類型題目，那就沒有問題。
 1. 將商修正為整數。例： $\square \div 2.17 = 7 \cdots 0.28$
 2. 將餘數修正為小於0.217的數目。例： $\square \div 2.17 = 1.5 \cdots 0.216$
 3. 將除數修正為大於2.8的數目。例： $\square \div 2.81 = 1.5 \cdots 0.28$
- (二) 在研究這個題目時，我們查閱許多相關資料，發現在某數學書籍的第49頁出現二題類似題目，老師表示它是個歷史悠久的老問題，而該書籍所提供的題目始終是錯誤的，卻從未修正。
- (三) 問老師為何會提出這個題目，老師表示他們以前考初中，大家拼命補習，而我們找到的數學書籍，就是當時最流行的參考書，而老師也是憑記憶隨手在黑板寫出題目，因此，數十年來，使用此書的消費者，包括老師在內，一直受到誤導而不自知。
- (四) 目前新課程課本開放由各家出版社出版，在此建議出版商編印課本前，一定要負責任，多聘請專家指導修正，千萬不要再有誤導大家的題目出現，如此，開放教科書的出版，才有正面的意義。

四、參考資料

- (一) 國民小學數學科課本及教學指引第五、六、七、八、十冊
 (二) 坊間各書局出版國民小學數學參考書籍

評語

作品由平時數學練習觸發研究問題，經由演練思考獲得結論，能學以致用綜合科學精神。