

走角落數步數的奧秘

高小組數學科第二名

台北縣仁愛國民小學

作者：林佳民、麥逸喬、陳奕佑、陳佩楓

指導教師：黃瑞香、吳彥杰

一、研究動機

一天上數學課時，老師介紹我們玩幾種棋子遊戲，其中最受歡迎的“走角落數步數的問題”，一時風行全班，於是大家互相競賽，當格數少的時候，我們還可以一步一步的數出步數，可是格數多時，我們就很難在短時間內算出步數，於是我們就深入研究探討其特性，並求出其快速解題的方法。

遊戲規則：

一枚棋子由棋盤的左下角出發，沿對角線方向移動，每遇到邊緣便轉90度繼續前進，直到走進某個角落為止，一共走了幾步。

例一：4×3的棋盤走了6步（見表1-1）

表1-1：4×3的棋盤

6		2	
	5 1		3
原點		4	

二、研究目的

1. 找出走角落數步的規則性。
2. 找出快速正確求總步數的方法。
3. 碰到邊緣的次數？

三、研究設備及器材

方格紙、棋子、筆

四、研究過程

《方法一》

- 1.把棋子走過的步數從1開始編號，走到角落的數碼即是總步數。
- 2.把棋子走過的步數，用線劃成路徑圖。

歸納如下表4-1：

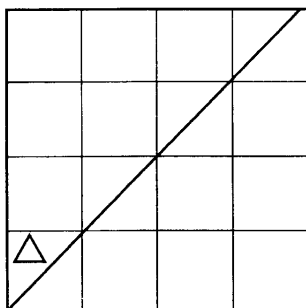
表4-1：

棋盤 (m × n)	總步數	路徑圖之形狀
m=n (正方形)	n - 1	呈一直線
2 × n	n - 1	呈上下多次擺動
m-1為n-1的整數倍	m - 1	呈上下擺動
2m > n , 2n > m		呈上右下左擺動

《舉例》

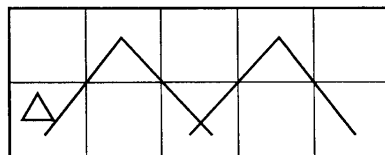
1. m = n (正方形)

4 × 4 總步數為3 (4-1)



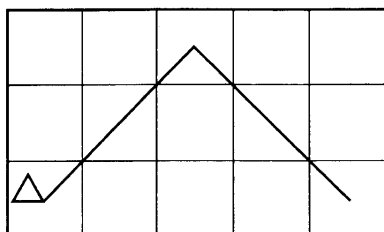
2. 2 × n

2 × 5 總步數4 (5-1)



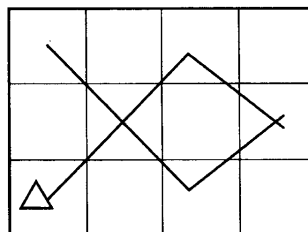
3. m-1為n-1的整數倍

5 × 3 總步數為4 (5-1)



4. 2m > n , 2n > m

4 × 3 總步數為6



《發現》

- 1.路徑圖是有一定規律的。
- 2.他是有規律的完成一正方形的對角線，若未終止就得轉90度繼續完成

另一正方形的對角線。

3.直到長寬都相等時，就可以一直線走到對角（即角落）。

《方法二》將各次碰到邊緣的步數加以分析

(一)以 6×5 的棋盤為例

步驟一：把棋子走過的步數編號並劃出路線圖（見表4—2—1及表4—2—2）

表4—2—1：把棋子走過的步數編號

		12			
20				4	
	11		13		
	19		3		5
10		18		14	
		2		6	
	9		17		15
	1		7		
原點				16	
			8		

表4—2—2：劃出路線圖

		12			
20				4	
	11		13		
	19		3		5
10		18		14	
		2		6	
	9		17		15
	1		7		
原點				16	
			8		

表4—2—3：第一次碰到邊緣

				4	
			3		
		2			
	1				

表4—2—4：第二次碰到邊緣

					1

- 1.自原點出發後，第一次碰到邊緣走了4步，以 6×5 的長方形來看，最大的正方形是以短邊5為邊所組成，其對角線的格數為5，扣除出發點不算，所以為 $5 - 1 = 4$ （步）。（見表4—2—3）
- 2.第二次碰到邊緣走了1步，以 2×5 的長方形來看，最大的正方形是以短邊2為邊所組成，其對角線的格數為2，扣除出發點，所以為 $2 - 1 = 1$ （步）。（見表4—2—4）
- 3.第三次碰到邊緣走了3步，以 6×4 的長方形來看，最大的正方形是以短邊4為邊所組成，其對角線的格數為4，扣除出發點，所以為 $4 - 1 = 3$ （步）。（見表4—2—5）
- 4.第四次碰到邊緣走了2步，以 3×5

表4—2—5：第三次碰到邊緣

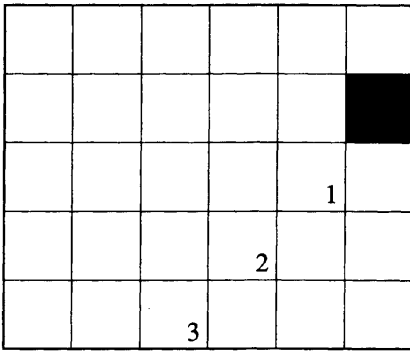


表4—2—6：第四次碰到邊緣

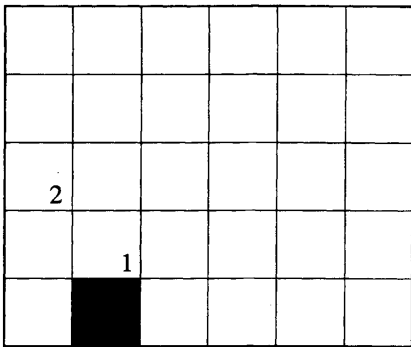


表4—2—7：第五次碰到邊緣

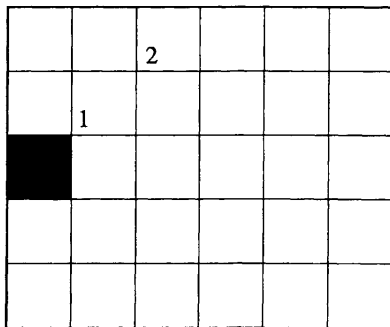
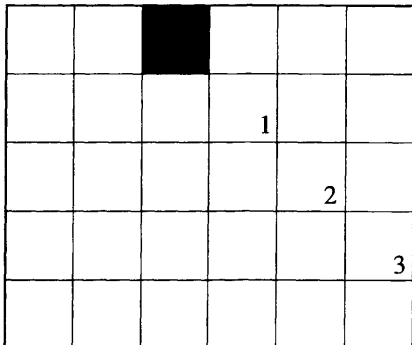


表4—2—8：第六次碰到邊緣



的長方形來看，最大的正方形是以短邊3為邊所組成，其對角線的格數為3，扣除出發點，所以為 $3-1=2$ （步）。（見表4—2—6）

5.第五次碰到邊緣走了2步，以 3×6 的長方形來看，最大的正方形是以短邊3為邊所組成，其對角線的格數為3，扣除出發點，所以為 $3-1=2$ （步）。（見表4—2—7）

6.第六次碰到邊緣走了3步，以 4×5 的長方形來看，最大的正方形是以短邊4為邊所組成，其對角線的格數為4，扣除出發點，所以為 $4-1=3$ （步）。（見表4—2—8）

7.第七次碰到邊緣走了1步，以 6×2 的長方形來看，最大的正方形是以短邊2為邊所組成，其對角線的格數為2，扣除出發點，所以為 $2-1=1$ （步）。（見表4—2—9）

8.第八次碰到邊緣時，以走到角落，共走了4步，以 5×5 的正方形來看，此即一直線走到角落，正方形對角線的格數為5，扣除出發點，所以為 $5-1=4$ （步）。（見表4—2—10）

9.總步數等於以上碰到邊緣步數的總和20步。

10.將以上資料整理，如表4—2—11所示。

11.計算碰到上（下）邊後至碰到下（上）邊為止，所走的步數，此為上下循環。

計算碰到右（左）邊後至碰到左（右）邊為止，所走的步數，此為左右循

不變。

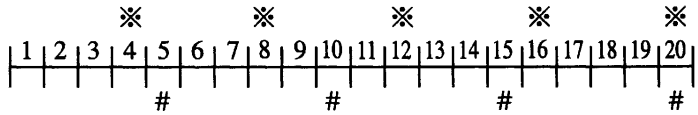
- 4.當長<寬時，則下一次要以原始的長，而寬則以上一次的寬減步數。
- 5.當長=寬時，即為正方形，可一直線走到角落。
- 6.總步數等於碰到邊緣步數的總和。
- 7.每個棋盤上下左右都有週期性。

《方法三》

- 1.從方法2中，我們發現上下左右循環的特性，左右步數的循環為長-1，上下步數的循環為寬-1。
- 2.將碰到上、下邊的格子給予※的標誌。並標示其步數；將碰到左、右邊的格子給予#的標誌。並標示其步數。以6×5的棋盤為例，如下表4—3—1：並依步數的先後畫在直線上，如下所示：
 - 1.同時出現※與#標誌的格子，即為角落，棋子就不需要再走了。

表4—3—1：將碰邊時的格子給與標誌

※ #		※		※	
20		12		4	
					5#
#					
10					
					#
					15
		8		16	
		※		※	



- 2.※的步數為寬-1 (4)的倍數，#的步數為長-1(5)的倍數，走到角落時兩者同時出現，換言之，就是4和5的最小公倍數。
- 3.總步數 = $[(長-1), (寬-1)]$ []代表最小公倍數
- 4.※標誌每(寬-1)步出現一次，#標誌每(長-1)步出現一次，碰到上下邊的次數為總步數÷(寬-1)，碰到左右邊的次數為總步數÷(長-1)，由於角落兩者同時出現重覆計算，故碰到邊緣的總次數為：總步數÷(寬-1) + 總步數÷(長-1)

5.將總步數的公式代入，可以整理出碰到邊緣總次數的公式為：

$$[(長-1), (寬-1)] ÷ (長-1) + [(長-1), (寬-1)] ÷ (寬-1) - 1$$

五、討論

(一)除了上述方法外，我們還發現下列兩種方法：

《方法一》

1.以 6×5 的棋盤為例，如表4—2—1

- ①當棋子走到上下邊界時，它走過的步數（4，8，12，20）均為4的倍數。
- ②當棋子走到左右邊界時，它走過的步數（5，10，15，20）均為5的倍數。
- ③當棋子同時走到上下及左右邊界時，即走入角落，因此它是4的倍數也是5的倍數，即4與5的最小公倍數。

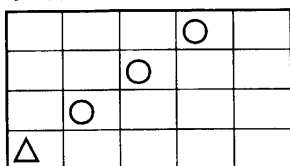
2.以 $m \times n$ 的棋盤

- ①當棋子走到上下邊界時，它走過的步數均為 $n-1$ 的倍數。
- ②當棋子走到左右邊界時，它走過的步數均為 $m-1$ 的倍數。
- ③當棋子同時走到上下及左右邊界時，即走入角落，因此它走的步數是 $n-1$ 的倍數，也是 $m-1$ 的倍數，即 $n-1$ 與 $m-1$ 的最小公倍數。

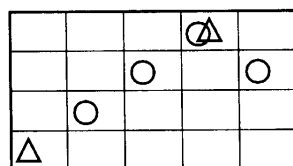
《方法二》

以 5×4 的棋盤為例，其展開過程如下：

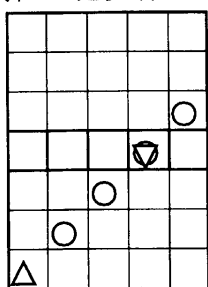
步驟1



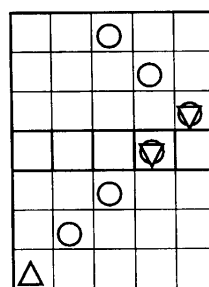
步驟2



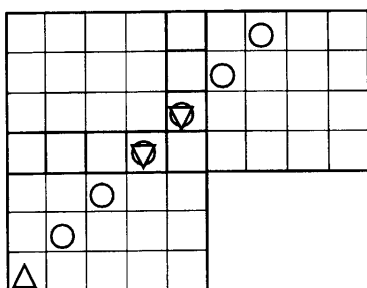
步驟3 把步驟2的圖展開



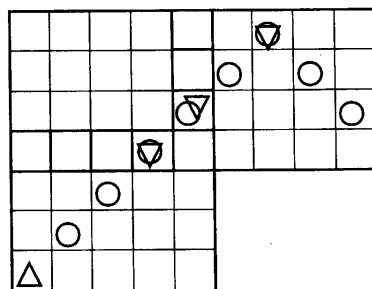
步驟4



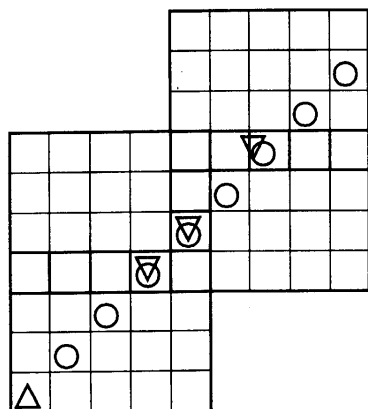
步驟5 把步驟2的圖展開



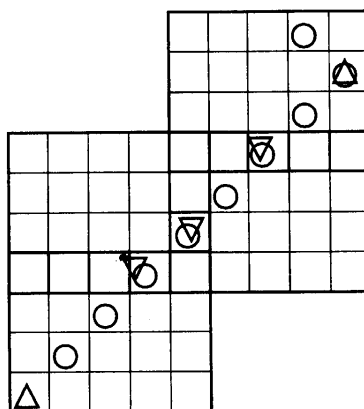
步驟6



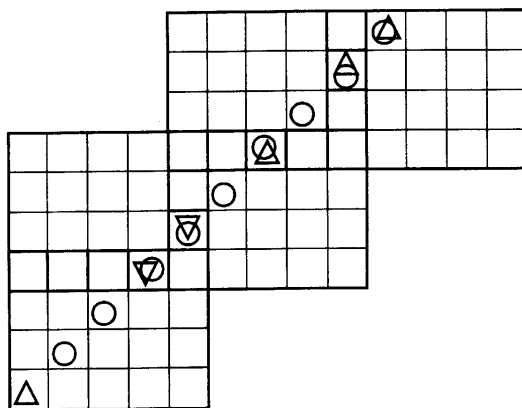
步驟7 把步驟6的圖展開



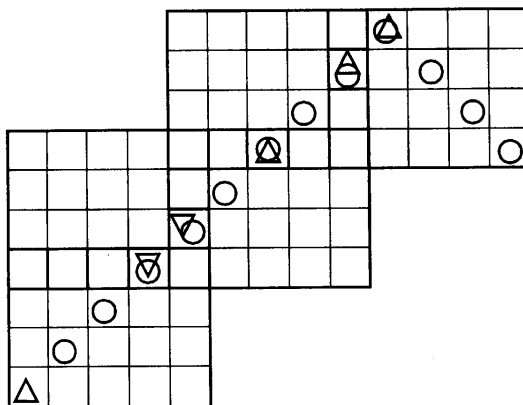
步驟8



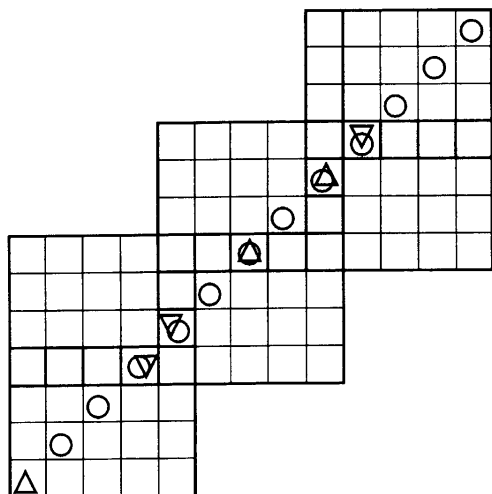
步驟9 把步驟8的圖展開



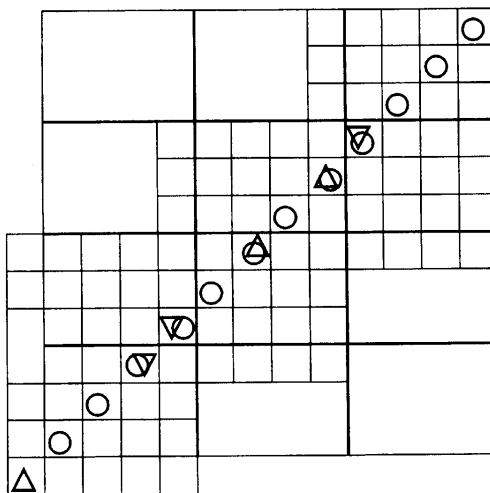
步驟10



步驟11 把步驟10的圖展開



步驟12



《結果》

- 1.由以上的展開圖中，我們可以發現它是以 4×3 的矩形為單位，拼組而成的最小正方形，總步數為此最小正方形的邊長。
- 2.此最小正方形的邊長為 4×3 的最小公倍數，其中4為長-1，3為寬-1，亦即總步數為(長-1)，(寬-1)的最小公倍數。

六、結論

- 1.自原點出發後，當長=寬時，才可一直線走到角落。
- 2.每次碰到棋盤上緣或下緣的步數有週期性，其週期為(寬-1)；每次碰到棋盤左緣或右緣的步數有週期性，其週期為(長-1)。
- 3.棋盤走角落的總步數為(長-1)與(寬-1)的最小公倍數。
- 4.碰到邊緣的總次數為 $[(長-1)，(寬-1)] \div (長-1) + [(長-1)，(寬-1)] \div (寬-1) - 1$

七、參考資料

- 1.數學遊戲大觀 王登傳 民國七十八年 前程出版社
- 2.科學研習 第三十五卷 第一期
- 3.國小數學課本第九冊

評語

研究問題符合高小學生程度與能力，以淺顯易懂及具操作性之玩棋規則出發，探究由最左下角出發沿對角線方向移動，找出走角落數步數的規律性與快速正確求總步數之方法，並探討碰到邊緣的次數，表達明確清晰並得到具體結果，惟探討出發點仍欠完整，可供進一步的研究。