

# 撲克圈圈尋極限～撲克牌繞圈遊戲的 極大值一般性探索

高小組數學科第一名

台北市天母國民小學

作者：吳孟軒、趙建志、胡雅嵐、李佳蓉  
指導教師：曾雅敏、許文化

## 一、研究動機

有一天，上數學時，老師找了一個遊戲給我們玩，用1到12的撲克牌排成一個圓圈，相鄰兩張紙牌的差只能是2或3或4，找出最多差是4的有幾組，這個遊戲相當具有挑戰性，而且有很大的發展空間，這又使我想到了86年3月28日繼淡水捷運通車後，所有電聯車的發車時間與班次多寡，與我們所要研究的主题，有密切的關連性，在邏輯推論上，可以相互應用，現在就讓我們用不同的撲克牌張數與差數，來研究這個主题，並期待將來可以應用在捷運發車或飛機起降間隔次數上。

## 二、研究目的

- (一) 12張撲克牌中每兩張間隔只能是2或3或4，而且差4最多組有幾組？如果張數增加或減少時一般性如何？
- (二) 12張撲克牌中差1或2或3而且差3最多組有幾組？  
差2或3或4而且差4最多組有幾組？  
差3或4或5而且差5最多組有幾組？  
差4或5或6而且差6最多組有幾組？  
且其一般性如何？
- (三) 12張牌，相鄰兩張差1，2，3，4而且差4的組數最多，  
差2，3，4，5而且差5的組數最多，  
差3，4，5，6而且差6的組數最多，  
差4，5，6，7而且差7的組數最多，  
可以達到幾組？

## 三、研究設備器材

電腦、撲克牌、紙。

## 四、研究過程

(一) 本作品在研究過程中，因研究子題之難易度不同而產生了下列研究方法：

1. 嘗試法
2. 分組法
3. 全數展現法
4. 樹狀圖分析法
5. 圖形分析法
6. ✂ 切割法
7. ♣♦♥♠ 填空法

因篇幅所限，僅以圖形分析法及 ✂ 切割法為例；說明如下

(二) 以探討16張差1, 2, 3而且差3最多有幾組? 為例

### 1. 圖形分析法

(1) 不移動數的情形

① 因為要使差3的組數最多，所以把牌分成：

- ① 1 4 7 10 13 16
- ② 2 5 8 11 14
- ③ 3 6 9 12 15

三組，再以“組”為單位來排定順序。

② 情形很簡單，如果把 1 4 7 10 13 16 排在前面，再來是 3 6

9 12 15 或 2 5 8 11 14：

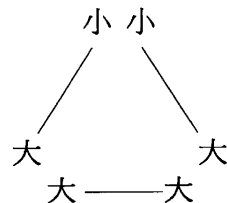
|    |   |   |    |    |    |   |   |   |   |
|----|---|---|----|----|----|---|---|---|---|
| 1  | 4 | 7 | 10 | 13 | 12 | 9 | 6 | 3 | X |
| 11 | 8 | 5 | 2  | X  |    |   |   |   |   |

由上面樹形圖中發。沒有任何組合，可見至少要移動1數。

(2) 移動1數的情形

① 中間的數已經連好，只剩旁邊的數 (1, 2, 3, 14, 15, 16) 可以搬動。

② 接著馬上發現，可以先不要搬，因為出問題了：



③問題出在最底下的兩個“大”字上（沒有這種組合）。

④但先把兩組“小—大”排好，那就容易了。

① 16 13 10 7 4 1 2 5 8 11 14 ……

② 16 13 10 7 4 1 3 6 9 12 15 ……

③ 14 11 8 5 2 3 6 9 12 15 ……

但還是不行，尤其是1，2，3等數中剩下的那一個無法排入，就算能排入，也會接不上。


(3)移動多數的情形

①試驗：成功的例子：

|  |
|--|
| 1 2 5 8 11 14 16 13 15 12 10 7 9 6 3 4 1 (10組) |
| 1 2 5 3 6 9 8 11 14 16 13 15 12 10 7 4 1 (10組) |
| 1 4 3 6 9 12 15 16 14 11 13 10 7 8 5 2 1 (10組) |
| 1 4 7 10 13 16 15 12 14 11 9 8 6 5 2 3 1 (10組) |

利用圖形分析法得到最大解答是10組


2.切割法

(1)如果改用另一種方式，使用“剪刀（以下用  表示，請看註的解釋說明）”，把一組數剪開，成為兩個部份也行，本來是：

① 1-4-7-10-13-16                      ① 1-4-7--10-13-16


② 2-5-8-11-14                      ② 2-5-8-11-14


③ 3-6-9-12-15                      ③ 3-6-9-12-15

也就是用一把剪刀來剪，剪開 7--10 成為 1-4-7 與 10-13-16 兩段，再把 7 和 10 分別接到別的數，就行了。

(2)可是無論怎樣接，7和10都接不上別的數。

(3)如果使用兩把“剪刀”，也許能夠排成。

① 1-4-7-10--13-16

② 2-5--8-11-14

③ 3-6-9-12-15

(4)如果把 8 接到 10（沒有別的選擇），就會成為 1-4-7-10→8-11-14，然後把 5 接到 3，2-5→3-6-9-12-15，1 接 2，14-11-8→10-7-4-1→2-5→3-6-9-12-15，最後用 15 接 13（或 16）；14 接 16（或 13），得到：14-11-8→10-7-4-1→2-5→3-6-9-12-15→13-16→14 或 14-11-8→10-7-4-

1→2-5→3-6-9-12-15→16-13→14，均為11組差3。

(5)我發現利用兩把剪刀 ✂✂ 的做法很方便，而且還比試驗的情形中最多10組差3的效果更好。

註：✂ 表示把一段數字分成兩段，例如：1-4-7-✂-10-13-16就是把1-4-7-10-13-16分成1-4-7和10-13-16兩段，而被拆開的7和10兩個數字則不再相接。

## 五、結論

經過了前面的嘗試，發現了以下的規則，並歸納出結論，茲列表如下：

(一) 差2, 3, 4：

(1)  $(4n)$ 張的差2, 3, 4最多差4的組數為：

| 牌的張數    | 最多差4的組數 |
|---------|---------|
| 12      | 7       |
| 16      | 11      |
| 20      | 15      |
| 24      | 19      |
| ...     | ...     |
| 依 此 類 推 |         |

(2)  $(4n+1)$ 張的差2, 3, 4最多差4的組數為：

| 牌的張數    | 最多差4的組數 |
|---------|---------|
| 13      | 8       |
| 17      | 12      |
| 21      | 16      |
| 25      | 20      |
| ...     | ...     |
| 依 此 類 推 |         |

(3)  $(4n+2)$ 張的差2, 3, 4最多差4的組數為：

| 牌的張數    | 最多差4的組數 |
|---------|---------|
| 14      | 9       |
| 18      | 13      |
| 22      | 17      |
| 26      | 21      |
| ...     | ...     |
| 依 此 類 推 |         |

(4)  $(4n+3)$ 張的差2, 3, 4最多差4的組數為：

| 牌的張數    | 最多差4的組數 |
|---------|---------|
| 15      | 10      |
| 19      | 14      |
| 23      | 18      |
| 27      | 23      |
| ...     | ...     |
| 依 此 類 推 |         |

它們合併成為一個公式如下：

牌的張數減最多差4的組數等於5

(二) 差1, 2, 3、差2, 3, 4、差3, 4, 5...在1至20張撲克牌中的研究結果為：

| 牌的張數            | 12       | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   |
|-----------------|----------|------|------|------|------|------|------|------|
| 差 X, Y, Z       | 最多差 Z 組數 |      |      |      |      |      |      |      |
| 差 1, 2, 3       | 8組       | 8組   | 9組   | 10組  | 11組  | 12組  | 12組  | 13組  |
| 差 2, 3, 4       | 7組       | 8組   | 9組   | 10組  | 11組  | 12組  | 13組  | 14組  |
| 差 3, 4, 5       | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 8組   | 11組  | 11組  | 11組  |
| 差 4, 5, 6       | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 |
| 差 5, 6, 7       | 5組       | 6組   | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 |
| 差 6, 7, 8       | 無法達成     | 0組   | 6組   | 7組   | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 |
| 差 7, 8, 9       | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 0組   | 7組   | 8組   | 無法達成 | 無法達成 |
| 差 8, 9, 10      | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 0組   | 8組   | 9組   |
| 差 9, 10, 11     | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 0組   |
| 差 10, 11, 12 以上 | 無法達成     | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 |

可以由上表看出的規則：

1. 達成差Z組數會隨著Z的增加而越來越少。
2. “差X, Y, Z”中的Y不到張數的四分之一時，都可以達成，但是超過張數的四分之一則不行（上表中“黃色區域”）。
3. 若Y大於張數的四分之一，但小於張數的二分之一，則無法達成（上表中“綠色”）。
4. 若Y等於張數的二分之一（若不為整數則±0.5都行），則會再達成一、二次（上表中“藍色區域”）。
5. 但Z超過張數的二分之一（若不為整數則+0.5都行），則不可能達成（上表中“紅色區域”）。

6. 加上底線的“藍色區域”為“0組差Z”，剛好隔了一個“馬步”的距離。
7. 依此規則推算，可以推知“17張差8，9，10”，“19張差9，10，11”，……等排法亦為0組差Z。
8. 斜體字的藍色區域也是隔了一個“馬步”。
9. 依此規則推算，可以推知“17張差7，8，9”，“19張差8，9，10”，……等排法的差Z組數分別為7組，8組，……。

在上表中發現本研究中最出色的地方是：

- (1) 有解的區域分佈在2個區域內，在第一區（黃色區）的特色是：在差2，3，4且差4最多組中都有解，且其公式為

| 牌的張數   | 最多差4組數 |
|--------|--------|
| $4n$   | $4n-5$ |
| $4n+1$ | $4n-4$ |
| $4n+2$ | $4n-3$ |
| $4n+3$ | $4n-2$ |
| 任意張數   | 張數-5   |

(2) 第二區的特色是：

- ① 有解的區域非常少，且是階梯狀。
- ② 階梯狀的前端出現0組解更是特別。

註：這是在本作品研究過程中，參考其他歷屆作品所不曾出現的。

(三) 差1，2，3，4、差2，3，4，5、……差5，6，7，8：

| 差 X, Y, Z, U,<br>最多差U組數 | 12 張 | 13 張 | 14 張 | 15 張 | 16 張 |
|-------------------------|------|------|------|------|------|
| 差 1, 2, 3, 4<br>(盡可能差4) | 8 組  | 9 組  | 10 組 | 11 組 | 12 組 |
| 差 2, 3, 4, 5<br>(盡可能差5) | 7 組  | 7 組  | 8 組  | 9 組  | 10 組 |
| 差 3, 4, 5, 6<br>(盡可能差6) | 6 組  | 6 組  | 7 組  | 7 組  | 9 組  |
| 差 4, 5, 6, 7<br>(盡可能差6) | 5 組  | 6 組  | 無法達成 | 無法達成 | 無法達成 |
| 差 5, 6, 7, 8<br>(盡可能差8) | 3 組  | 5 組  | 6 組  | 7 組  | 無法達成 |

(四) 任意張數差2，3，4，5之結論：

|          |      |      |      |      |      |      |      |      |                |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------------|
| 牌的張數     | 5 張  | 6 張  | 7 張  | 8 張  | 9 張  | 10 張 | 11 張 | 12 張 | 張數減差 5 組數等於 5。 |
| 最多差 5 組數 | 0 組  | 1 組  | 2 組  | 3 組  | 4 組  | 5 組  | 6 組  | 7 組  |                |
| 牌的張數     | 13 組 | 14 組 | 15 組 | 16 組 | 17 組 | 18 組 | 19 組 | 20 組 | 張數減差 5 組數等於 6。 |
| 最多差 5 組數 | 7 組  | 8 組  | 9 組  | 10 組 | 11 組 | 12 組 | 13 組 | 14 組 |                |
| 牌的張數     | 21 組 | 22 組 | 23 組 | 24 組 | 25 組 | 26 組 | 27 組 | 28 組 | 張數減差 5 組數等於 7。 |
| 最多差 5 組數 | 14 組 | 15 組 | 16 組 | 17 組 | 18 組 | 19 組 | 20 組 | 21 組 |                |
| 依 此 類 推  |      |      |      |      |      |      |      |      |                |

## 六、討論

在試驗的過程中，本來是隨意排出組合，再挑選組合最多的為目標（而且要確定不可能有更多組合），例如12張牌的差2，3，4最多只能有8組差4，即1-5；2-6；3-7；……；8-12，要是推論出無法成最多組，則考慮少1組的情形，在不行就考慮少2組……依此類推。

在嘗試的過程中，有時候會發現一些不可能達成的情形（例如15張的差4，5，6中有跳不開的情形），如果繼續嘗試也是沒有用的，所以能直接排除這種可能，並考慮這個問題會不會在別的時候發生。

但是比較複雜的情形，就必須用推理的方式，例如16張的差7，8，9，這不是短暫的試驗可以排出的。

後來，發現了一個更好的方式—先排出一些組合，在選出最佳的排法（例如7組差4），然後從最多組數（例如最多不可能達成超過10組）開始檢查，看有沒有這種排法而被遺漏，如果沒有，就檢查比最多組數少1組（例如9組）的情形……這樣檢查下去，直到剛才選出的最佳排法，如果都沒有遺漏或出錯，就能確定最高組數（例如7組）。

如果太麻煩，可以使用分組的方法，例如在13張的差3，4，5，6中，1一定要接4，所以7如果接1，不只要接成7-1，而且還要連同4一起接應該接成7-1-4。

另外，也可以利用一些符號，例如：“剪刀”✂和“撲克牌花色”♣♦♥♠等。剪刀的用處是把一段切成兩段，例如1-4-✂-7-10就是把1-4-7-10

切成1-4和7-10兩段。撲克牌花色的用法是把所有的數分成兩組以上，例如13張的差3，4，5，6，就是把2，3，4，11，12，13看成♥，5，6，7，8，9，10則看做♦，然後按照1♥♦♥♦♥♦♥♦♥♦♥♦1的順序排，又如12張的5，6，7，8，把“兩個數的組”用♣-♣表示，“一個數的組”用♠表示。

最後發現，每一種方法交替使用，才能最快找到結果，如果一種方法用到一半，確定不需要繼續使用下去，這個時候接別的方法也沒有關係。

在試驗的過程中，有時候會找到一些其他的方法或是遇到困難，例如：

1. 排的張數越多，差數也越大時，難度也就相對的增高。
2. 在試驗時，只要排到最後一張，總是會排不進去，這時就要檢查：
  - (1) 先檢查每一個間隔，看是否能將最後這張放進去。
  - (2) 如果不行，就必須拆組，但以犧牲最少的組數為原則。
  - (3) 如果真的沒有辦法把這牌放進，那就是失敗了，如果可行，那恭喜您，成功了。
3. 每一次的排法都有一定的規律性，張數不同但是差數一樣的排4、5個就可以知道X、Y、Z、U的規律性如何，但是有時候可能要排7、8個，甚至十幾個（最高紀錄17個）。
4. 有時候可以把所有張數不同，差數相同的情形分成幾組，例如差2，3，4，就可以分成：
  - (1)  $4n$ 張牌，如12張，16張，20張……
  - (2)  $4n+1$ 張牌，如13張，17張，21張……
  - (3)  $4n+2$ 張牌，如14張，18張，22張……
  - (4)  $4n+3$ 張牌，如15張，19張，23張……共四組來討論。

## 七、參考資料

1. 數學遊戲大觀第四集：二、填字遊戲（P.27）前程出版社。
2. 中華民國第三十六屆中小學科學展覽優勝作品專輯國小組國立台灣科學教育館彙編。

## 評語

本作品探討1至12的撲克牌圍成一圈，且相鄰紙牌之差只能是2，3或4，最多能有幾組差4。由實驗出發，進而找出一般的規律，並能推廣至其他的張數及其他的差距，完全掌握到數學研究的方式，兼具題材新穎有趣，又可應用至捷運局之發車方式，是一個極特出的作品。