釘板上的正方形

初小組數學科第二名

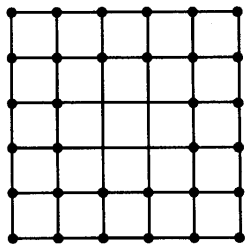
台北市永樂國民小學

作　　者：趙于瑄

指導教師：陳滄智、李淑芬

一、研究動機

幾個月前，我無意間翻開哥哥去年參加學校算術奧林匹克競賽初賽的試題，其中有一題是有關正方形的算法。它是在木板上釘了32個釘子，木板上的每一個小格子都是大小一樣的正方形。然後用橡皮筋在這些釘子上套出正方形（如下圖）。問總共可套出多少個正方形？結果解答是38個，可是我卻畫超過38個，經詢問老師而且看過解答的說明後，它是一些用座標表示方程式的解，看也看不懂。於是就開始我這趟「釘板上的正方形」之旅了。



二、名詞解釋

（一）三格釘板：

表示每邊有三格的正方形釘板，其上共有九個小正方形，有16個釘子。另外餘此類推，有四個格釘板、五格釘板……等等。

（二）不漏空型釘板：

也就是釘板上的釘子都沒有缺掉的情形。

（三）正中空型釘板：

也就是缺漏釘子的位置恰在釘板的中間，這可分成兩種情形：奇數格時，其缺漏釘子為4個，偶數格時，其缺漏釘子為1個。

（四）頂漏空型釘板：

也就是缺漏釘子的位置，恰在釘板的四個頂角，頂漏空第一型缺漏釘

子的數目為1個，至頂漏空第四型缺漏釘子的數目為4個。另外，頂漏空第二型缺漏2個釘子的位置有兩種情況：相鄰位置為第二A型；對角位置為第二B型。

（五）邊漏空型釘板：

也就是缺漏釘子的位置，恰在釘板的旁邊，而且只缺了1個釘子。這可分成多種情形：我將從缺釘子的位置在頂點（不含頂點）以下往下數，第1個為第一型、第2個為第二型……餘類推。

（六）偏漏空型釘板：

也就是缺漏釘子的位置，恰在正中空型釘板往正上、正下、正左正右偏的位置，因釘板旋轉後這些情形一致，我以向左偏為研究項目。這分成多種情形：我將從缺漏釘子的位置在釘板邊（不含邊）往中數，第1個為第一型、第2個為第二型……餘此類推。

（七）斜漏空型釘板：

也就是缺漏釘子的位置，恰在正中空型釘板往頂點偏的位置，因釘板旋轉後這些情形一致，我也以向左上頂點偏為研究項目。這也可分成多種情形：我將從缺釘子的位置在釘板邊（不含頂點）往中數，第1個為第一型、第2個為第二型……餘此類推。

（八）$n \times n$邊線正方形：

指正方形的邊是由小正方形的邊線所形成，例如3×3邊線正方形即由每邊三個小正方形，共九個小正方形所形成的大正方形。

（九）$m \times p$對角線正方形

指由長m個、寬p個小正方形所組成長方形的對角線當成大正方形邊長所形成的大正方形。

三、研究目的

（一）在任意數目以及不同類型的釘板中，找出簡捷方便的方法，算出各類型釘板正方形的總個數。

（二）驗証去年算術奧林匹克試題解答的正確性（依本研究定義，其題目為五格正中空型釘板），並提出正確的解答。

四、研究內容

第一節　不漏空型釘板上正方形的個數

首先，我們依照定義八和定義九，將三格至十格不漏空型釘板的所有正方

形，依序分類畫出，並利用算數字個數的方法（先不算總數）而將不漏空釘板正方形總數得到下表：

表一：不漏空釘板上所有正方形的總數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1^2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^2	2	3	4	5	6	7	8	9
3^2	1	2	3	4	5	6	7	8
4^2		1	2	3	4	5	6	7
5^2			1	2	3	4	5	6
6^2				1	2	3	4	5
7^2					1	2	3	4
8^2						1	2	3
9^2							1	2
10^2								1
即三格不漏空釘板正方形的總數為 $1 \times 3^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 1^2 = 20$								

由表一，當我們以N來代表格數、以NS來代表不漏空型正方形總數時我們可以得到，不漏空釘板正方形的總數的通式為：

$NS=1\times N^2+2\times(N-1)^2+3\times(N-2)^2+\cdots\cdots+(N-1)\times 2^2+N\times 1^2$，$N=3, 4, 5\cdots\cdots$

依照上述方法，我們得知不漏空型釘板中，正方形的關係如下：

N	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210

第二節　正中空型釘板上正方形的個數

同樣地，依上一節的方法，我們畫出和缺漏釘子有關的正方形。

表二：正中空型偶數格釘板上所有正方形缺漏的總數

各種數字及其個數	四格	六格	八格	十格	十二格	十四格	十六格
4	3	6	10	15	21	28	36

由上表，當我們以N來代表格數、以CES來代表正中空型偶數格正方形缺漏的總數時我們可以得到，正中空型偶數格釘板缺漏正方形的總數的通式為：

$CES=(1+2+3+\cdots\cdots+\frac{N}{2})\times 4$，N=4, 6, 8, ……

表三：正中空型奇數格釘板上所有正方形缺漏的總數

各種數字及其個數	三格	五格	七格	九格	十一格	十三格	十五格
4	2	1	1	1	1	1	1
8		2	3	4	5	6	7
9	1	1	1	1	1	1	1
12		1	1	1	1	1	1
16		1	4	8	13	19	26

即三格正中空釘板正方形的缺漏的總數為4×2+9=17

由上表，透過簡單的加減改變數字的個數，而得到以下的關係：

各種數字及其個數	三格	五格	七格	九格	十一格	十三格	十五格
-7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	2	3	4	5	6	7
16	1	3	6	10	15	21	28

由上面的關係表，當我們以N來代表格數、以COS來代表正中空型正方形缺漏的總數時我們可以得到，正中空型奇數格釘板缺漏正方形的總數的通式為：

$COS=(1+2+3+\cdots\cdots+(\frac{N-1}{2}))\times 16+4\times N-11$，N=3, 5, 7 ……

依照上述方法，我們得知正中空型釘板中，正方形的關係如下：

表四：正中空型釘板每邊小正方形個數和正方形總數的關係

N	3	4	5	6	7	8	9	10
不漏空型正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210
正中空型缺漏正方形總數	17	12	57	24	113	40	185	60
正中空型正方形總數	3	38	48	172	223	500	648	1150

第三節　頂漏空型釘板上正方形的個數

依照上節的方法，我們得頂漏空各型不同正方形缺漏的個數：

表五：頂漏空第一型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	3	4	5	6	7	8	9	10

表六：頂漏空第二型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9

表七：頂漏空第三型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	3	4	5	6	7	8	9

表八：頂漏空第四型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	3	4	5	6	7	8	9

由上面的關係表，當我們以TS_p來代表頂漏空各型釘板正方形缺漏的總數時，我們可以得到以下的通式：

$TS_1 = Ni$

$TS_4 = 4 \times N\text{-}3$,　$TS_p = P \times N - P + 1$,　$N = 3, 4, 5\cdots$　$P = 1, 2, 3, 4$

依照上述方法，我們得知頂漏空型釘板中正方形的關係如下：

表九：頂漏空各型釘板和正方形總數的關係

N	3	4	5	6	7	8	9	10
不漏空型正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210
頂漏空第一型缺漏正方形總數	3	4	5	6	7	8	9	10

頂漏空第一形正方形總數	17	46	100	190	329	532	816	1200
頂漏空第二型缺漏正方形總數	5	7	9	11	13	15	17	19
頂漏空第二　正方形總數	15	43	96	185	323	525	818	1191
頂漏空第三型缺漏正方形總數	7	10	13	16	19	22	25	28
頂漏空第三形正方形總數	13	40	92	180	317	518	800	1182
頂漏空第四型缺漏正方形總數	9	13	17	21	25	29	33	37
頂漏空第四形正方形總數	11	37	88	175	311	511	792	1173

第四節　邊漏空型釘板上正方形的個數

依照上節的方法，我們得邊漏空各型不同正方形缺漏的個數：

表十：邊漏空第一型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	三格	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	3	5	7	9	11	13	15	17
2	1	1	1	1	1	1	1	1

表十一：邊漏空第二型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	四格	五格	六格	七格	八格	九格	十格
1	2	5	8	11	14	17	20
2	3	3	3	3	3	3	3

表十二：邊漏空第三型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	六格	七格	八格	九格	十格
1	3	7	11	15	19
2	6	6	6	6	6

表十三：邊漏空第四型釘板各種不同正方形缺漏的個數

各種數字及其個數	八格	九格	十格	十一格	十二格
1	4	9	14	19	24
2	10	10	10	10	10

由上面的關係表，當我們以ES_p來代表頂漏空各型釘板正方形缺漏的總數時，我們可以得到以下的通式：

$ES_1 = N\times2-1,\ N=3,\ 4,\ 5\cdots\cdots$；$ES_2 = 3\times N-4,\ N = 4,\ 5,\ 6\ \cdots\cdots$

$ES_3 = N\times4-9,\ N=6,\ 7,\ 8\cdots\cdots$；$ES_4 = 5\times N-16,\ N = 8,\ 9,\ 10\ \cdots$

$ES_p = N\times(P+1)-P\times P,\ P=1,\ 2,\ 3,\ 4\ \cdots\cdots$

依照上述方法，我們得知邊漏空型釘板中正方形的關係如下：

十四：邊漏空各型釘板格數和正方形總數的關係

N	3	4	5	6	7	8	9	10
不漏空型正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210
邊漏空第一型缺漏正方形數	5	7	9	11	13	15	17	19
邊漏空第一型正方形總數	15	43	96	185	323	525	808	1191
邊漏空第二型缺漏正方形數		8	11	14	17	20	23	26
邊漏空第二型正方形總數		42	94	182	319	520	802	1184
邊漏空第三型缺漏正方形數				15	19	23	27	31
邊漏空第三型正方形總數				181	317	517	798	1179
邊漏空第四型缺漏正方形數						24	29	34
邊漏空第四型正方形總數						516	796	1176

第五節　偏漏空型釘板上正方形的個數

限於篇幅，本節僅將各型釘板格數和正方形總數的關係附列如下：

表十五：偏漏空各型釘板格數和正方形總數的關係

N	3	4	5	6	7	8	9	10
不漏空型正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210
偏漏空第一型缺漏正方形數	17	11	53	20	97	31	149	44
偏漏空第一型正方形總數	3	39	52	176	239	509	676	1166
偏漏空第二型缺漏正方形數		12	57	23	109	36	169	51
偏漏空第二型正方形總數		38	48	173	227	504	656	1159
偏漏空第三型缺漏正方形數				24	113	39	181	56

偏漏空第三型正方形總數				172	223	501	644	1154
偏漏空第四型缺漏正方形數						40	185	59
偏漏空第四型正方形總數						500	640	1151

第六節　斜漏空型釘板上正方形的個數

限於篇幅，本節僅將各型釘板格數和正方形總數的關係附列如下：

表十六：斜漏空各型釘板格數和正方形總數的關係

N	3	4	5	6	7	8	9	10
不漏空型正方形總數	20	50	105	196	336	540	825	1210
斜漏空第一型缺漏正方形數	17	10	49	16	81	22	113	28
斜漏空第一型正方形總數	3	40	56	180	255	518	712	1182
斜漏空第二型缺漏正方形數		12	57	22	105	32	153	42
斜漏空第二型正方形總數		38	48	174	231	508	672	1168
斜漏空第三型缺漏正方形數				24	113	38	177	52
斜漏空第三型正方形總數				172	223	502	648	1158
斜漏空第四型缺漏正方形數						40	185	58
斜漏空第四型正方形總數						500	640	1152

五、研究結果

從以上各節的探討，我們可以得到以下的結論：

（一）各種不同格數、不同類型正方形總數的簡捷的算法如下：

1.不漏空型釘板上正方形總數為：

$NS=1\times N^2+2\times(N-1)^2+3\times(N-2)^2+\cdots\cdots+(N-1)\times 2^2+N\times 1^2$

2.正中空型釘板上正方形缺漏的總數為：

當格數為偶數時：$CES=(1+2+3+\cdots\cdots+N/2)\times 4$

當格數為奇數時：$COS=[1+2+3+\cdots\cdots+(N-1)/2]\times 16+4\times N-11$

3.頂漏空第P型釘板上缺漏正方形總數為：$TS_P=P\times N-P+1$

4.邊漏空第P型釘板上缺漏正方形總數為：$ES_P=N\times(P+1)-P\times P$

5.偏漏空第P型釘板上缺漏正方形總數為：

當格數為偶數時：$PES_P=4\times(1+2+\cdots\cdots+P)+(1+4\times P)\times[(N/2)-P]$

$+2\times\{1+2+3+\cdots\cdots+[(N/2)-P]\}$

當格數為奇數時：$POS_P = 17+24\times(P-1)+16\times[0+1+2+\cdots\cdots+(P-1)]+(12+16\times P)\times\{[(N-1)/2)]-P\}+8\{1+2+3+\cdots\cdots+[((N-1)/2)-P]\}$

6.斜漏空第P型釘板上缺漏正方形總數為：

當格數為偶數時：$SES_P=(P\times2+1)\times N-2\times P\times P$

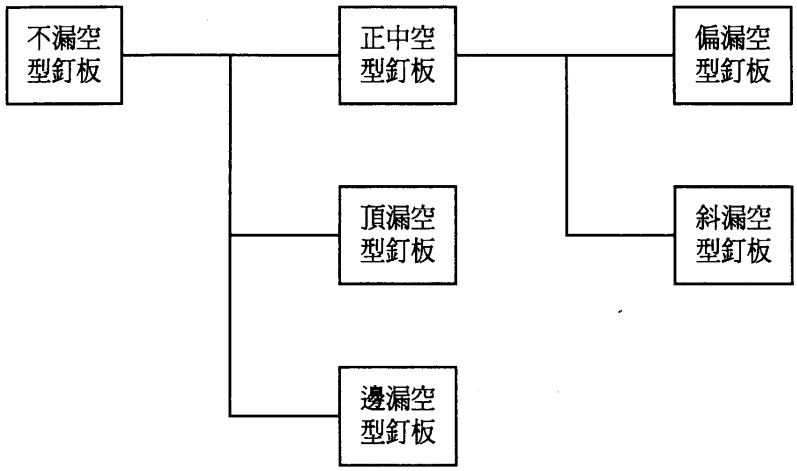
當格數為奇數時：$SOS_P=8\times(P+1)\times N-15-16\times(1+2+3+\cdots\cdots+P)$

（二）由上述的規則我們推算出，去年算術奧林匹克競賽初賽的試題，只要將不漏空型的正方形總數的簡捷算法和正中空型缺漏正方形總數的簡捷算法，以N=5代入式中相減，求出解答正方形個數為105-57=48，可見去年的標準答案是錯的。

六、未來發展

此次專題的研究，我從不缺漏釘子的不漏空型釘板開始，發展出缺漏釘子的位置在中間、邊線和頂點，而發展出正中空型釘板、邊漏空型釘板以及頂漏空型釘板，再由正中空型釘板缺漏釘子的位置往正上、正下、正左以及正右和斜上、斜下的位置，而發展出偏漏空型釘板以及斜漏空型釘板（如下圖），也就是說發展成釘板米字型位置都有介紹，但除了米字型位置外的位置的簡捷算法就很難去定義和找出方法，也留待有興趣正方形的同好繼續發展。

釘板上正方型各型發展圖



評語

本作件品，能由釘板上的數字進而算出所圍出的面積，想法新穎，確實不錯。