摺紙成疊的探討

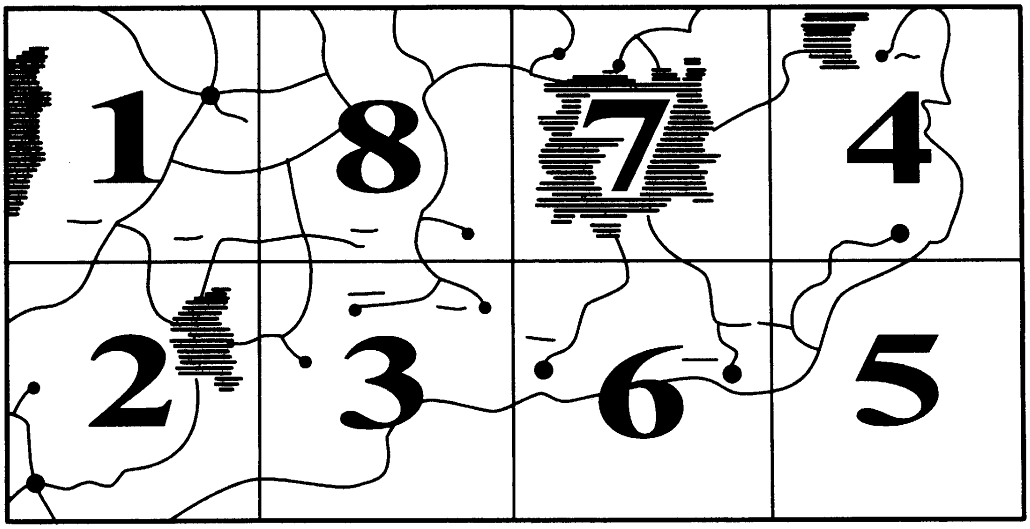
初小組數學科第一名

台北市雨農國民小學　　　　作　　者：郭哲維、謝依臻、李子筠、張瑞典
指導教師：李明英、林志忠

一、研究動機

在教室的圖書箱有本數學遊戲書「茅塞頓開」老師偶而會拿裡面題目、和我們遊戲討論，其中有一題是「摺疊地圖」：

摺疊地圖



一張地圖的長為寬的兩倍。有很多種方法可以把它摺疊成一個面積為原來大小八分之一的正方形。按上圖的方式標示號碼，並記錄下摺疊好的地圖中數字出現的次序，看看你能找到多少種不同的摺法。

現在要考驗你的技巧，請把地圖摺好，使得數字順序為1、2、3、4、5、6、7、8。

其實這個遊戲和地圖一點關係都沒有，而是要摺紙，使它有次序的成一疊，數字由上到下1、2、3、4……排好。基本上它的構造是正方形連塊但八連塊所有變化實在多，頭都昏了。於是我們試著加以改變再探討。

二、研究目的

（一）長條型連塊的探討。

（二）正方格連塊摺紙成疊的探討。

（三）四格窗型和六格窗型的探討。

三、研究過程

我們先從少塊的著手，然後慢慢增加塊數，試著從中找出規則性並檢驗。於是我們做了正方格連塊摺紙成疊的探討，有三連塊、四連塊和五連塊，也探討出一些規則性，以下就是我們探討的過程。我們所做的研究，所有的格子數編號都是由左而右，由上而下，有統一的格式。

研究（一）　長條型連塊的探討

1.二格長條

⑴二格長條所有可能的情形如右：$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}\boxed{1}$，共兩種。

⑵兩種都可以折疊成功。

2.三格長條

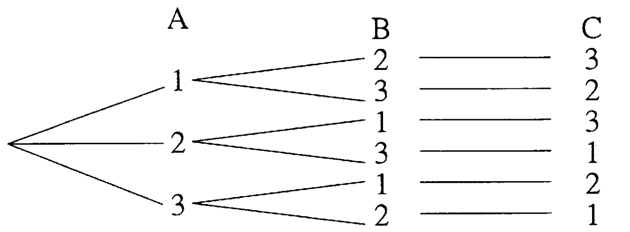
⑴我們試著找出三格長條的所有可能變化情形

⑵找三條長格所有可能出現情形的過程：

①我們先將三格長條編上代號。

②把1、2、3任意放入 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$ 中的A、B、C。

③A位置可以是1、2或3，因此他們會出現的情形方式如下：



④我們將這些變化整理如下並看看是否可以摺疊成功。

三 I 型情形 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$					
123	○	213	○	312	○
132	○	231	○	321	○
順序成疊：		可 6 種		不可 0 種	

(3)6種不同情形的三格長條都可以折疊成功，每一個成功答案的倒數（例如：231的倒數是132）也必是另一組成功數。

3.四格長條

(1)我們找出四格長條所有可能出現的情形。

(2)我們依照找三格長條所有變化情形的方式找四格長條的變化情形。結果我們發現在 |A|B|C|D| 中：

A位置：可以任意讓入1、2、3、4四個中的一個數。

B位置：因為已有1個數字被固定在A位置，所以可以從剩下的三個數中任選1個放入B位置。

C位置：已有兩個數字被固定於A、B位置，所以在剩下2個數字中任選1個。

D位置：剩下最後一個數一定在D位置。

(3)找出所有四格長條的變化情形恰有24（種）。我們猜想24種變化情形和每個位置可選擇數可能有關係：

發現$(4+3+2+1)$，$(4+3\times2+1)\cdots(4\div2\times3+1)$的各式變化無法和24種符合，只有在$(4\times3\times2\times1)$的情形才能符合，而4、3、2、1正好是 |A|B|C|D| 中，每個位置的選擇數。

(4)回頭檢驗二格長條：2（種）$=2\times1$；三格長條的所有變化情形發現也是：6（種）$=3\times2\times1$，雖然也可以$6=3+2+1$，但若是用加法方式在二連塊和四連塊均不適用。因此：

〔猜測〕不同連塊的所有變化情形是每個位置的可選擇數相乘。

(5)根據以上推理，我們在此先預測五格長條的所有變化也將是：$5\times4\times3\times2\times1=120$（種）

(6)我們將四格長條的所有變化及摺疊狀況整理於下：

四I型所有可能變化的情形							
ABCD		ABCD		ABCD		ABCD	
1234	○	2134	○	3124	×	4123	○
1243	○	2143	○	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	○	4213	×
1342	×	2341	○	3241	○	4231	×
1423	○	2413	×	3412	○	4312	○
1432	○	2431	×	3421	○	4321	○
順序成疊：				可16種		不可8種	

(7)我們操作及比較後發現：

①所有四格長條的變化情形，有16種成功，8種不成功。

②1、2、3、4開頭的各組中，每組分別有4種成功，2種不成功。

③成功的可能情形可以歸納成：

A B	C D
奇、偶	偶、奇
偶、奇	奇、偶
奇、偶	奇、偶
偶、奇	偶、奇

④不成功的變化情形則是：

A B	C D
偶、偶	奇、奇
奇、奇	偶、偶

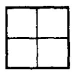
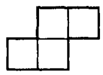
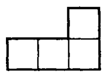
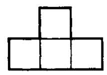
⑤每一種可以摺疊成功的情形，它的倒數，也可以摺疊成功。如2341和它的倒數1432，都可以摺疊成功。

⑥由上面的推理，24種不同情形，我們可以濃縮成12種（倒數的原則），甚至於濃縮成6種（分成奇數和偶數的原則）加以操作後，即可判斷「四I型」的各種變化情形在什麼情況下可以摺疊成功。

研究（二）正方格連塊摺紙成疊的探討

1.正方格四連塊摺紙成疊的探討

(1)我們一個一個配對找到所有正方形四連塊的圖形共有五種，並加以命名：

種　類	四I型	四格窗型	四N型	四L型	四Y型
圓　形					

(2)我們一種一種的找出他們可能的情形，並看看他們是否可以折疊成功。結果發現有三種答案類型：

①類型一

四I型情形 | A | B | C | D |

ABCD		ABCD		ABCD		ABCD	
1234	○	2134	○	3124	×	4123	○
1243	○	2143	○	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	○	4213	×
1342	×	2341	○	3241	○	4231	×

1423	○	2413	×	3412	○	4312	○
1432	○	2431	×	3421	○	4321	○
順序成疊：可16種				不可8種			

這等於是四格長條的變化，我們在研究（一）已歸納過。

②類型二

四格窗型情形	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline A&B\\\hline C&D\\\hline\end{array}$						
ABCD		ABCD		ABCD		ABCD	
1234	×	2134	○	3124	×	4123	×
1243	○	2143	×	3142	×	4132	○
1324	×	2314	○	3214	×	4213	×
1342	×	2341	×	3241	○	4231	×
1423	○	2413	×	3412	×	4312	○
1432	×	2431	×	3421	○	4321	×
順序成疊：可 8 種				不可16種			

發現：

A.24種不同變化情形中，有8種成功，16種不成功。

B.成功的8種情形如下：

(a $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$ b $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$ c $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$ d $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1&4\\\hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 4&1\\\hline\end{array}$ f $\begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$ g $\begin{array}{|c|c|}\hline 4&3\\\hline 1&2\\\hline\end{array}$ h $\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$)

都是奇數1和3，偶數2和4成對角線的形式。

③類型三

發現：24種可能情形，全部都是可以成功的。

研究（三）四格窗型和六格窗型的探討

1.六格窗型的第一次接觸

四格窗型我們在研究（二）已探討過，於是我們直接進入六格窗型，並試著用四格窗型所得的原則：對角因為奇數或偶數即有解的方式處理；但總是發現有例外（如：$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&3&2\\\hline 1&6&5\\\hline\end{array}$）符合四窗格的成功原則，但摺不成功，於是我們只好另找解法。

2.回顧尋找四格窗型的另一種解法

我們找出四格窗型的所有答案，發現：

(1)以$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$→$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$→$\begin{array}{|c|c|}\hline 4&3\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$→$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 1&3\\\hline\end{array}$的四種變化情形為例，他們的差別是每一種各向右轉90°相關位置的順序並無改變。（如1的對角是4，順時針方向的相鄰是2，逆時針方向的相鄰是3）而且這四種變化的開頭1、2、3、4各有一種。

(2)我們整理出1帶頭的所有變化：$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$，共6種，而以(1)方式的操作各產生4種變化，剛好是全部的24種。事實上我們只要檢查1帶頭的這6種，即完成四窗格的所有檢驗工作。

(3)1帶頭的六種四窗格只有$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$和$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$可以摺疊成功，其他四種均不成功，而這$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$的摺法為直橫法，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$為橫直法。而這兩種配合(1)的方式各產生四種，於是：

〔歸納〕：四窗格的8種答案用2種摺法即可以都找到全部的答案

（即摺疊成功數＝可成功摺法種類×4）

(4)我們決定以摺法的種類去檢驗六格窗型的變化。

四、結論

（一）長條型連塊

長格數	成功數	所有變化情形
二	2＝1x2	2
三	6＝2x3	6
四	16＝4x4	24
五	50＝10x5	120
六	144＝24x6	720

我們找到長條型連塊的結果：

1.二、三格長條各種可能的情形均能成功。

2.四格長條在$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{奇數}&\text{奇數}&\text{偶數}&\text{偶數}\\\hline\end{array}$和$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{偶數}&\text{偶數}&\text{奇數}&\text{奇數}\\\hline\end{array}$情形不能成功；也就是說若將四格分前二格和後二格共兩組單位，每組單位都包含1奇數和1偶數則必能成功。

3.六格長條可分三組單位：所有能摺疊成功的都符合每單位都1奇數、1偶數的原則。

4.五格長條的摺疊成功數佔全部的可能青形120種中的50種，這50種的數字排列規則不明顯。

（二）正方形連塊：

1.三連塊的變化有兩種，全部能摺疊成功。

2.四連塊的種類有五種，其中四窗型的成功數最少。主要是因為它塊數的連接邊比其他四種多一個。當幫忙剪開一個邊後，成功數增加為原來的2倍，但還是不像其他兩層的四連塊可全數摺疊成功。

3.五連塊有12種變化，依據層數和連接邊數分類有三種，層數越多成功數越多。分別是：一層有50種（即五格長條型）、兩層80種、三層則120種可能的情形都能摺疊成功。其中5P型剪開一邊後，成功數增加成2倍，也剛好是80種。

4.不同N連塊，無論那一種，其可能的情形可以有條理的分N組，每組的成功數都相同，

（例如：二層的五連塊，每組成功數是16種，一共有五組，〔×5〕剛好得80種。

5.不同N格長條，把可能的變化情形分成N組，每組的成功數都相同。（例如：六I型的每組成功數是24種，一共有六組，〔×6〕正好是144種）。

（三）四格窗型和六格窗型的探討

1.四窗型我們發現只要對角是奇數組或偶數組就能摺疊成功。基本上只要1帶頭的6種中找出可摺疊成功的（共2種），然後（×4）即是成功數（共8種），但此法用在六格窗型則不易處理。

2.透過摺法的探討，四窗格有2種摺法，然後產生8種可能的摺疊情形，因此我們透過摺法的歸納，整理出六窗格有15種摺法，因此（×4）後，找出60種。另外我們也找到驗證能否成功的「數學順序派」。

3.四格和六格窗型，若把所有的變化情形分成四組或六組，每組的成功數都相同。（例如：六格窗型的每組成數是10種，〔×6〕恰好是60種）

4.四格和六格窗型能成功的情形都符合我們歸納發現的「數字順序派」原則，至於更大的窗型是否適用，我們想要繼續探討。

五、參考資料

（一）Brian Bolt著（林傑斌譯）（民84）茅塞頓開。台北，牛頓。

（二）凡異出版社（民74）數學遊戲。新竹，凡異。

評語

本件作品是由四位小朋友，由摺紙遊戲，進而探討各種不同形式之格紙，能否成功地摺成所排之順序。他們由簡而繁極有條理的逐項分析，思考細密，動作純熟，自主性極高，是件不可多得的作品。