將母子定理推廣成三代通則的利器 —— 照妖鏡

國中組數學科第三名

基隆市立中正國民中學

作　　者：謝青文、陳佳瑜、劉哲榮

指導教師：林耀南、張有義

一、研究動機

數學課介紹了相似三角形有關的性質後，老師說一般的三角形很難僅以一條直線將原三角形分割成兩個相似的三角形，除非他是已具有某些特性的三角形，例如：直角三角形，我們只要過直角頂往斜邊作一垂線，立即可將原三角形剖開成兩個小三角形，而且這兩個小三角形皆與原三角形相似，如圖(1)，老師並進一步的由這些相似三角形推出母子定理，並證明了商高定理，他要求我們看看能不能從這三角形中再找出一些什麼其他的特性來，我們也覺得很有趣，特別注意這個三角形好幾天，有一天，阿文忽然高興得跳了起來，說他發現了一樣東西，他說仿照老師的作法，過D，再作$DE \perp AC$，則$\triangle DEA$的三邊和原$\triangle ABC$的三邊都一邊對應一邊互相垂直，如圖(2)，我們告訴老師這個發現時，老師稱讚了一番，並要我們對其他三角形也做做看，看是否也能做出來，於是我們開始著手研究。

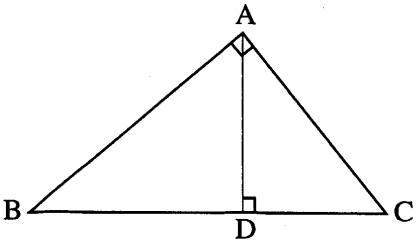


圖 (1)

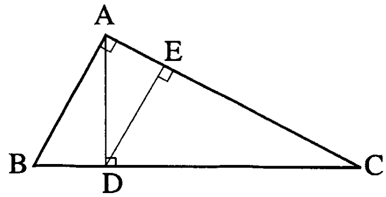


圖 (2)

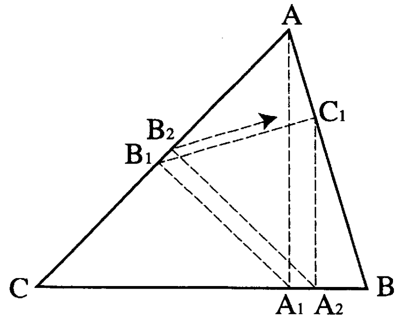


圖 (3)

二、研究目的

(1)尋找一種有效的方法，來作出任意多邊形的垂直多邊形。

(2)由直角三角形的母子定理導出任意三角形的三代通則。

(3)探討四邊形是否亦具有類似母子定理的三

代通則。

(4)導出任意多邊形的垂直多邊形的性質。

三、研究過程

A.三角形：（求作任意三角形的垂直三角形）

由圖(2)中，我們發現△ADE的三邊$\overline{AD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$一邊接著一邊分別垂直△ABC的$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$，這似乎很容易作出來，因為可由直角頂A點開始作$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，再作$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，最後作$\overline{EA}\perp\overline{AB}$，形成△ADE，很明顯的，△EDA～△ABC，但對其它不是直角三角形的三角形呢？如圖(3)，這個作法不太可能作得出來，起先，由A點開始，作$\overline{AA_1}\perp\overline{BC}$、$\overline{A_1B_1}\perp\overline{AC}$、$\overline{B_1C_1}\perp\overline{AB}$、$\overline{C_1A_2}\perp\overline{BC}$、$\overline{A_2B_2}\perp\overline{AC}$……，連續無止境的作下去，不知何時才可作出垂直三角形來？

承圖(3)，雖然這作法有困難，但我們發現操作多次後，很快地都會逼近到各邊上的一個固定點，也就是說，那個垂直三角形快要浮現出來了，用這逼近法測試多次後，我們發現那種垂直三角形應該是存在的。

接著，我們想到是否可以利用相似形的投影法，來作出垂直三角形？經過嘗試後，我們發現可先在∠B附近作個小垂直三角形，再利用投影法作出垂直三角形，作法如下：

已知：△ABC，如圖(4-1)直角△、圖(4-2)銳角△、圖(4-3)鈍角△求

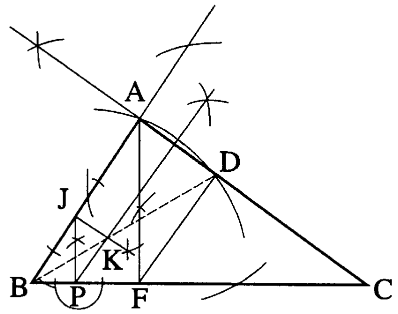


圖 (4-1)

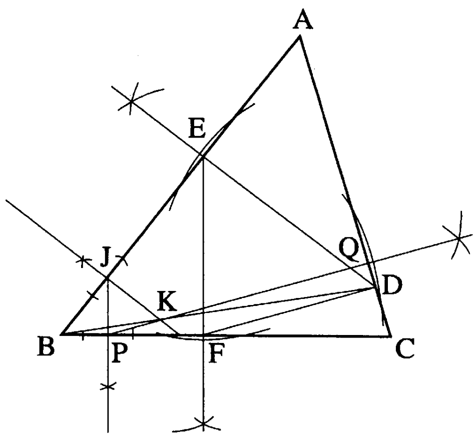


圖 (4-2)

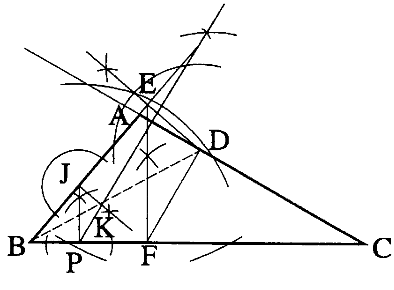


圖 (4-3)

作：△ABC的垂直△DE(A)F

作法：(1)在$\overline{BC}$上任取一點P

(2)過P，分別作$\overline{PJ}\perp\overline{BC}$、$\overline{PQ}\perp\overline{AC}$設$\overline{PJ}$交$\overline{AB}$於J，設$\overline{PQ}$交$\overline{AC}$於Q

(3)過J，作$\overline{JK}\perp\overline{AB}$，設$\overline{JK}$交$\overline{PQ}$於K

(4)連$\overline{BK}$，並延長設交$\overline{AC}$於D

(5)過D，作$\overline{DE}//\overline{JK}$、$\overline{DF}//\overline{PK}$設$\overline{DF}$交$\overline{BC}$於F，$\overline{DE}$交$\overline{AB}$於E（在直角三角形中，E點即為A點）

(6)連$\overline{EF}$，則△DEF即為所求

由操作投影所得的垂直△，可以很容易的證明出他與原三角形相似，任一三角形，若依同一方向（順時針或逆時針）操作出一個孫三角形，再在此孫三角形內，同前述方向操作出下一個孫三角形，如此連續操作下去，可發現第二個孫三角形與原三角形成倒位相似，而第四個孫三角形則與原三角形成同位相似，我們會稱之為倒位相似主要是因為經由我們的操作，等於將原三角形旋轉了90°，所以操作了兩次，等於將原三角形旋轉了180°，也就是說三角形整個顛倒過來，所以稱之為倒位相似，同樣的道理，我們就稱第四個垂直三角形為同位相似，如圖(5)。

在操作投影的過程中，我們發現原小三角形可依順時針或逆時針方向操作出兩個不同的小三角形，並進而導致可投影出兩個不同的垂直三角形，如圖(6-1)、(6-2)、(6-3)，並且同理可證，另一個小三角形亦與原三角形相似。

除了以上的性質外，我們再觀察直角三角形中的母子定理與垂直三角形之間的關係如圖(7)。

在直角△ABC中，△EDA與△FAD是它的兩個垂直三角形，我們在這個圖形中發現到兩組相似形：

(1)△ABC～△EDA～△FAD

(2)△ABC～△DBA～△DAC～△AFE

大家都知道母子定理是由第(2)組相似形得到的，又例如由△ABC～△DBA可得$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$所以$\overline{AB}^2=\overline{BD}*\overline{BC}$，同理可得$\overline{CA}^2=\overline{CD}*\overline{CB}$，$\overline{DA}^2=\overline{DC}*\overline{DB}$，若按照這個說法，圖(7)中的△ABC為母三角形，△DBA、△DAC為子三角形，則△EDA、△FAD應該被稱

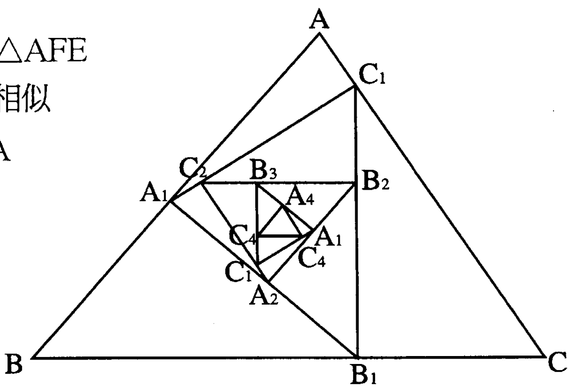


圖 (5)

為孫三角形，所以我們每次作圖作出的垂直三角形都是原三角形的孫三角形，圖(7)中的諸三角形，可稱為『三代同堂』。

既然直角三角形中有三代同堂的現象，那麼在鈍角三角形與銳角三角形中又如何呢？我們先由銳角三角形開始，如圖(8)，△DEF與△GHI與△ABC的兩個垂直三角形，前面已證過△ABC～△DEF～△GHI，與直角三角形的現象比較，因為△DEF與△GHI為△ABC的孫三角形，那麼應該要有可以推出母子定理的子三角形，但是它們跑到那裡去了呢？

我們再三思考，反覆的把拿圖來與直角三角形比較，皇天不負苦心人，我們終於找到了一面『照妖鏡』，借助這面照妖鏡，一下子就令子三角形現出原形，那面照妖鏡即是D、F、H、G、I、E六點共圓的圓O，以下是我們的說明：

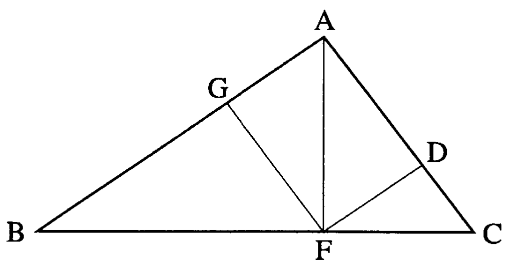


圖 (6-1)

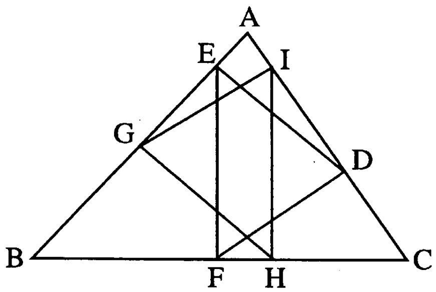


圖 (6-2)

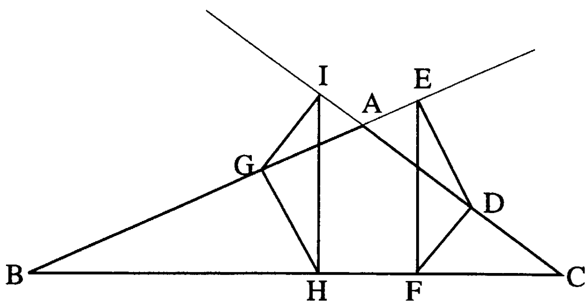


圖 (6-3)

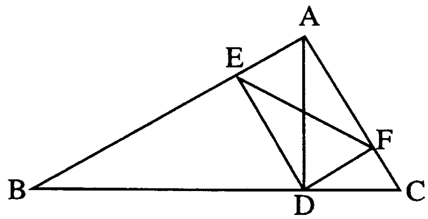


圖 (7)

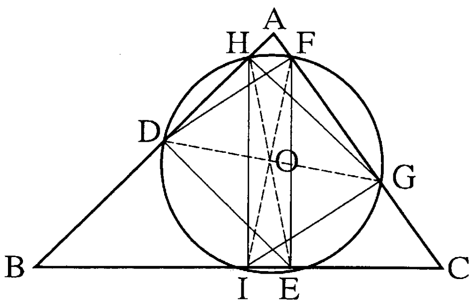


圖 (8)

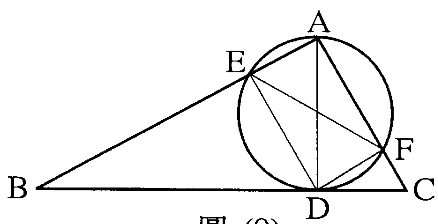


圖 (9)

連接HE、FI、DG，則HE、FI、DG為圓O的直徑，且△ADG、△BHE、△CFI即為△ABC的子三角形，如圖(8)。

當我們找到子三角形後，我們可以推得與直角三角形類似的公式，現在，我們先把直角三角形有關的公式敘述一遍，以便與鈍角三角形和銳角三角形比較：

已知：△ABC為直角三角形，$\angle A=90^\circ$, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$, $\overline{DE}\perp\overline{AB}$, $\overline{DF}\perp\overline{AC}$，如圖(9)

則：(1)△ABC~△DBA~△DAC~△AFE （母子相似）

(2)△ABC~△EDA~△FAD （母孫相似）

(3)$\overline{BA}^2=\overline{BD}*\overline{BC}$（B點公式）

(4)$\overline{CA}^2=\overline{CD}*\overline{CB}$（C點公式）

(5)$\overline{DA}^2=\overline{DC}*\overline{DB}$（D點公式）

(6)$\overline{AE}*\overline{AB}=\overline{AF}*\overline{AC}$（A點公式）

(7)照妖鏡直徑=$\sqrt{\overline{DB}*\overline{DC}}$ （A、E、D、F 四點共圓）

在圖(10)中，我們發現那三個子三角形△EBH、△IFC、△AGD相似母△ABC，所以由△EBH～△ABC得$\overline{EB}:\overline{BH}=\overline{AB}:\overline{BC}$，推得B點公式為$\overline{BA}*\overline{BH}=\overline{BE}*\overline{BC}$，同理可得C、A、E、I各點公式。

綜合上述，我們可列出鈍角三角形的類似母子定理：

(1)△ABC～△EBH～△IFC～△AGD（母子相似）

(2)△ABC～△DEF～△GHI（母孫相似）

(3)$\overline{BA}*\overline{BH}=\overline{BE}*\overline{BC}$（B點公式）

(4)$\overline{CA}*\overline{CF}=\overline{CI}*\overline{CB}$（C點公式）

(5)$\overline{EH}*\overline{IF}=\overline{EB}*\overline{CI}$（E、I兩點公式）

(6)$\overline{AD}*\overline{AB}=\overline{AG}*\overline{AC}$（A點公式）

(7)照妖鏡直徑= $\sqrt{\overline{EB}*\overline{IC}}$（D、E、I、G 、H、F六點共圓）

同理，我們亦可推出銳角三角形的類似母子定理，如圖(10)，△ABC為銳角三角形，$\angle A<90^\circ$，△DEF、△GHI為△ABC的兩個孫三角形，D、E、F、G、H、I六點共圖，$\overline{EH}$、$\overline{IF}$為其直徑。

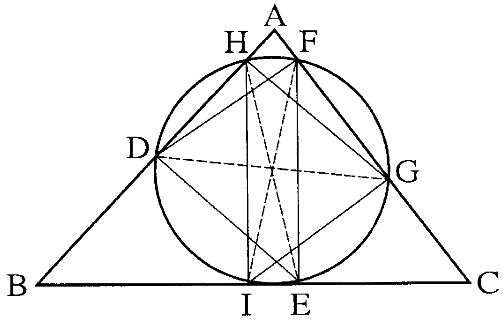


圖 (10)

則：(1)△ABC～△EBH～△IFC～△AGD（母子相似）

(2)△ABC～△DEF～△GHI （母孫相似）

(3)$\overline{BA}*\overline{BH}=\overline{BE}*\overline{BC}$（B點公

式）

(4) $\overline{CA}*\overline{CF}=\overline{CI}*\overline{CB}$（C點公式）

(5) $\overline{EH}*\overline{IF}=\overline{EB}*\overline{IC}$（E、I兩點公式）

(6) $\overline{AB}*\overline{AD}=\overline{AC}*\overline{AG}$（A點公式）

(7)照妖鏡直徑= $\sqrt{\overline{EB}*\overline{IC}}$（D、E、F、G、H、I六點共圓）

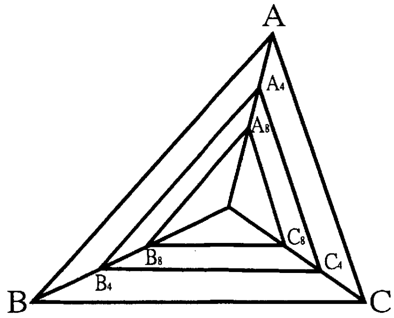


圖 (11)

綜合上述分析，我們可以簡單的敘述三代通則：

☆.三代通則：任意三角形與它的兩個孫三角形（垂直三角形）及三個子三角形（由照妖鏡導出）相似，且原三角形的各頂點及垂直三角形的各垂足組成各點公式。

接下來，我們想進一步的去探討這些孫三角形的特性：

甲.在任意三角形中，兩個孫三角形的的尤拉線重合。

乙.任意三角形的尤拉線和它兩個孫三角形的尤拉線互相垂直。

丙.任一三角形，若依同一方向連續操作無限多個孫三角形後，最後漸漸會縮成一個點，此點即為所有同位相似三角形的投影中心點，如圖（11）。

丁.(1)正三角形的邊長與第一個孫三角形的邊長比為3:1，如圖（12-1）。

(2)一般三角形的孫三角形邊長與原三角形的邊長比值，敘述如下：如圖（12-2）。

①銳角△：$k=a+b+c/(\cot\alpha+\csc\alpha)c+(\cot\beta+\csc\beta)a+(\cot\gamma+\csc\gamma)b$

②直角△：$k=a+b+c/c+(\cot\beta+\csc\beta)a+(\cot\gamma+\csc\gamma)b$

③鈍角△：$k=a+b+c/(\cot\beta+\csc\beta)a+(\cot\gamma+\csc\gamma)b-c(\tan\alpha+\sec\alpha)$

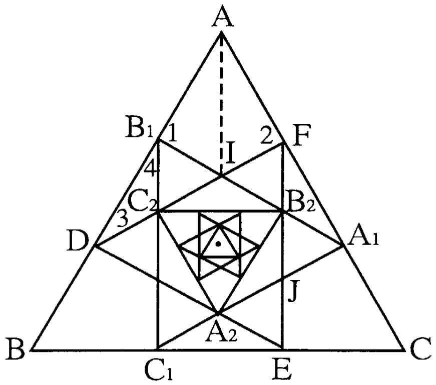


圖 (12-1)

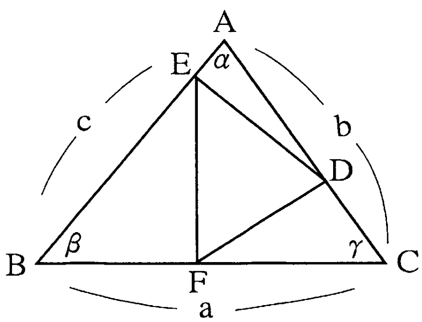


圖 (12-2)

戊.正三角形的順時針投影中心點與逆時針投影中心點為同一點。

己.利用垂直可逆特性，我們可由任一△，操作出祖先△。

已知：一△ABC，如圖（13）

求作：△ABC的父親△，祖父△（順時針方向），兄弟△

作法：⑴分別對A、B、C作L⊥$\overline{AB}$，L⊥$\overline{BC}$，L⊥$\overline{AC}$設L交L於E，L交L於F，L交L於D則△DEF即為△ABC的祖父△

⑵作△ABC的外接圓O，設圓O交△DEF於異，於A，B，C的三點K，I，J

⑶連$\overline{KI}$、$\overline{KJ}$、$\overline{IJ}$則△IJK即為△ABC的兄弟△

⑷連$\overline{IC}$、$\overline{BK}$、$\overline{AJ}$則△EBK、△AJD、△IFC，即為△ABC的父親△

B.四邊形：（求作任意四邊形的垂直四邊形）

當求作一四邊形的垂直四邊形而採用投影法時，如圖（14），有其困難，最主要是因為我們無法事先確定那垂直四邊形的形狀，但由逼近法，如圖（15），我們可預知那個垂直四邊形和原四邊形是不相似的，既然不相似，就無法知道它

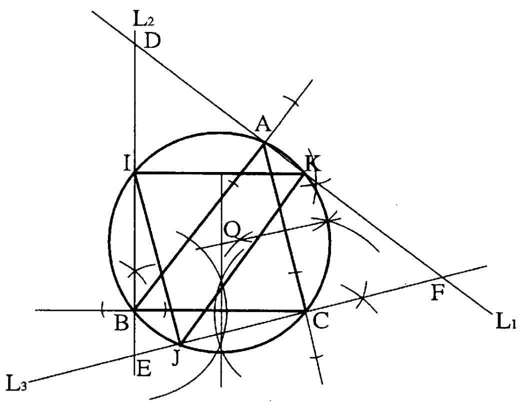


圖 (13)

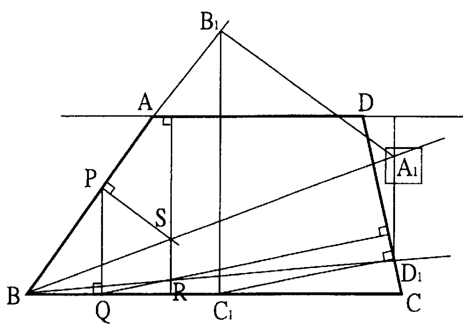


圖 (14)

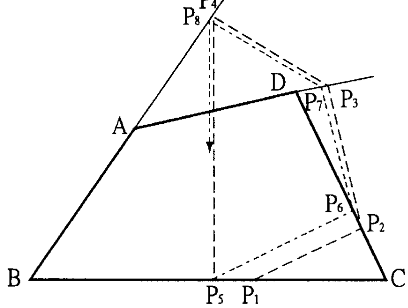


圖 (15)

的邊長比，所以投影法較難畫出。

為改進投影法的缺點，我們經過多次嘗試後，發現一種共線作圖法，敘述如下：

已知：四邊形ABCD，如圖（16）

求作：ABCD的垂直四邊形EFGH

作法：(1)在$\overline{BC}$上取一點C_1

(2)過C_1，作直線L⊥$\overline{BC}$

(3)過C_1，作$\overline{C_1D_1}$⊥$\overline{CD}$於D_1

(4)過D_1，作$\overline{D_1A_1}$⊥$\overleftrightarrow{AD}$於A_1

(5)過A_1，作直線M⊥$\overleftrightarrow{AB}$於L於B_1

(6)仿上作法再作一四邊形$A_2B_2C_2D_2$

(7)連$\overline{B_1B_2}$，設交$\overline{AB}$於F

(8)過F，作$\overline{FG}$⊥$\overline{BC}$，設交$\overline{BC}$於G

(9)過G，作$\overline{GH}$⊥$\overline{CD}$，設交$\overline{CD}$於H

(10)過H，作$\overline{EH}$⊥$\overline{AD}$，設交$\overline{AD}$於E

(11)連$\overline{EF}$，則EFGH即為所求

我們亦可證明孫四邊形的四個角與原四邊形的四個角對應相等，由上述的共線作圖法，作出來的垂直四邊形可以很明顯的發現到，兩四邊形的四個對應角會相等，但四對對應邊不一定能成比例，但是連續操作出四個垂直四邊形EFGH、IJKL、MNOP、QRST後，我們發現亦有倒位相似及同位相似的現象。

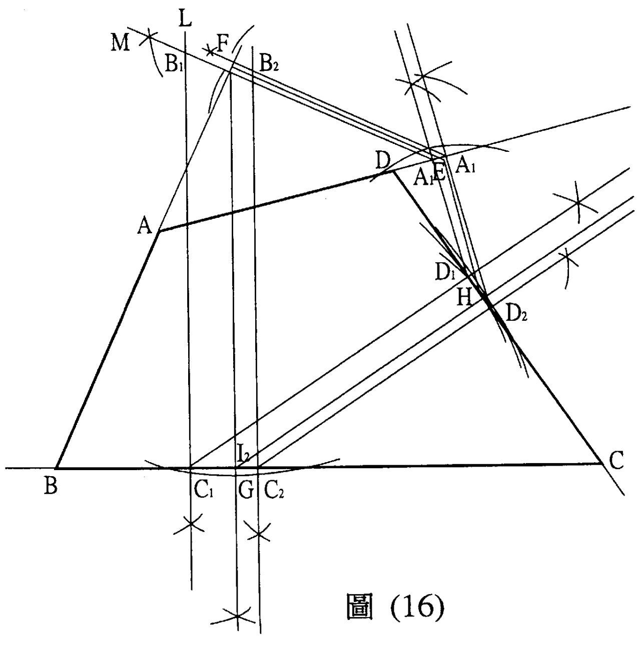


圖 (16)

接下來我們想知道任一四邊形的兩個孫四邊形是否八點共圓？答案是不一定，除非原四邊形的四點已經共圓，所以我們就以四點共圓的四邊形來觀察探討，看看是否它也具有

全等及共圓的現象，答案是肯定的。

由上述的共線作圖法，作出來的垂直四邊形可以很明顯的發現到，兩四邊形的四個對應角會相等，但四對對應邊可能無法成比例，也就是說，垂直四邊形不與原四邊形相似，既然不相似，就沒有什麼好討論的了，本來想就此打住，但後來想想，難道沒有一種四邊形是一作出來就會相似的嗎？這個問題使我們又燃起了希望，於是我們逐一的檢查了各種四邊形：正方形、長方形、平形四邊形、菱形、鳶形、梯形………如圖(17)至如圖(23)，我們發現正方形和長方形它們的垂

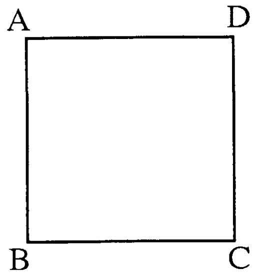


圖 (17)

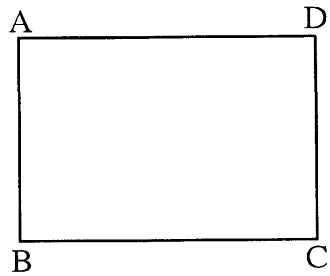


圖 (18)

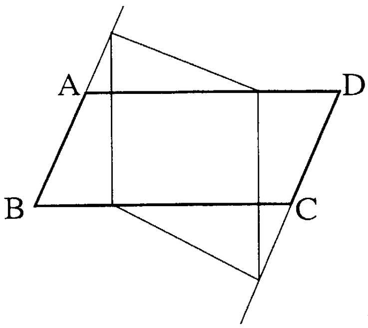


圖 (19)

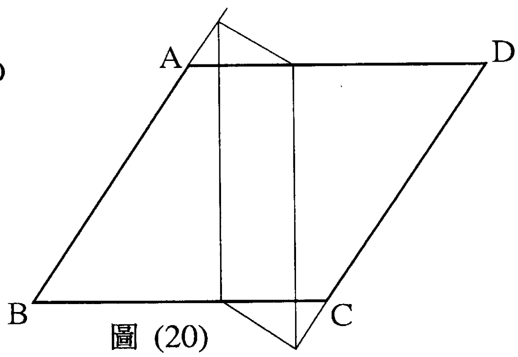


圖 (20)

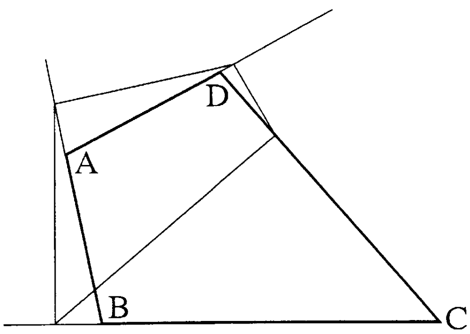


圖 (21)

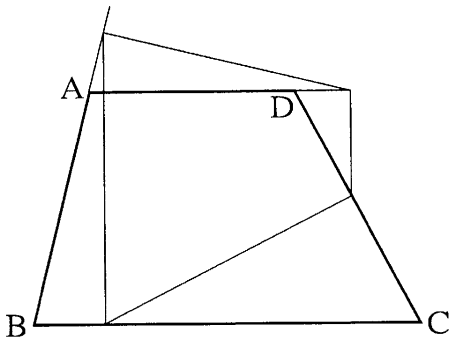


圖 (22)

直四邊形都是原來的正方形與長方形，自己當然和自己相似，其它都不相似，我們再仔細分析正方形和長方形，它們的對角都是直角，不但共圓，而且對角線剛好是這個圓的直徑，又此對角線將原四邊形分割成兩個直角三角形，而直角三角形具有最簡單的母子定理，那此種四邊形是否也具有類似直角三角形的公式呢？

如圖(24)，四邊形ABCD，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，我們先作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{CF}\perp\overline{AD}$，則四邊形AECF為四邊形ABCD的逆時針垂直四邊形，EAFC~ABCD，同理，在圖(25)中，作$\overline{AG}\perp\overline{CD}$，$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，則四邊形AHCG為四邊形ABCD的順時針垂直四邊形且GCHA~ABCD。

討論：(1)在直角三角形中，只過直角頂做一條線即可得到兩個與原三角形相似的三角形，且可以反覆的操作下去得到無限多個相似的孫三角形，而現在我們也可僅以兩條線就可以得到與原四邊形相似的孫四邊形，且亦可以反覆的操作下去得到無限多個相似的孫四邊形。

(2)在任意三角形中必存在著一面照妖鏡，但在任意四邊形內也有嗎？答案是有的，但此四邊形必須共圓。

(3)在直角三角形中，有著名的母子定理，那在我們這個特殊的四邊形（我

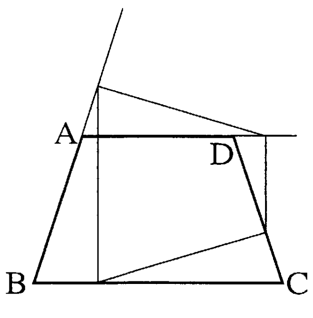


圖 (23)

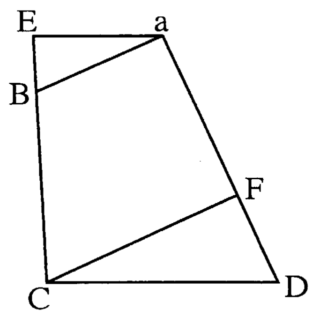


圖 (24)

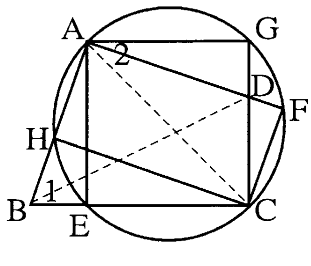


圖 (25)

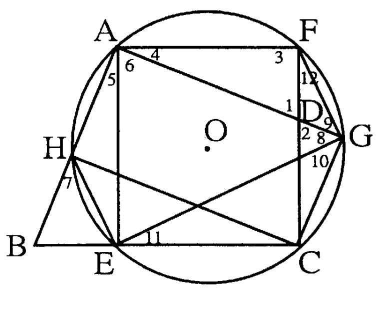


圖 (26)

們稱之雙直角共斜邊四邊形）中，是否也有類似的性質呢？簽案是肯定的，如圖(26)，四邊形中，$\angle A=\angle C=90^{\circ}$，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{CG}\perp\overline{AD}$，則在E、F、C、D、A、B、G七點各有一對應公式，為了導這些公式，我們又要引進那個『照妖鏡』：作AECG的外接圓，設與$\overline{AB}$交於H，與$\overline{CD}$交於F，連$\overline{AF}$，$\overline{EH}$，$\overline{GF}$，$\overline{FH}$

(1)ABCD~EAGC~FCHA（母孫相似）

(2)$\overline{AD}*\overline{AE}=\overline{AB}*\overline{AF}$（A點公式）

(3)$\overline{EA}*\overline{EH}=\overline{EB}*\overline{EG}$（E點公式）

(4)$\overline{DA}*\overline{DG}=\overline{DC}*\overline{DF}$（D點公式）

(5)$\overline{CH}*\overline{CD}=\overline{CG}*\overline{CB}$（C點公式）

(6)$\overline{BH}*\overline{BA}=\overline{BE}*\overline{BC}$（B點公式）

(7)$\overline{GF}*\overline{GC}=\overline{GD}*\overline{GE}$（G點公式）

(8)$\overline{FH}*\overline{FD}=\overline{FA}*\overline{FG}$（F點公式）

(9)$\overline{HE}*\overline{HC}=\overline{HB}*\overline{HF}$（H點公式）

對於上文中的雙直角共斜邊四邊形，我們可以輕易地作出其孫四邊形，但對於一般的四邊形，我們則需採用共線作圖法較方便。

C.五邊形：（求作任意五邊形的垂直五邊形）

首先我們一樣先來測試這種垂直五邊形是否存在，當使用逼近法操作後，得知這種垂直五邊形也是存在的，我們依然分成五點共圓與五點不共圓的五邊形，並且使用共線作圖法操作其垂直五邊形， 如圖(27-1)(27-2)。

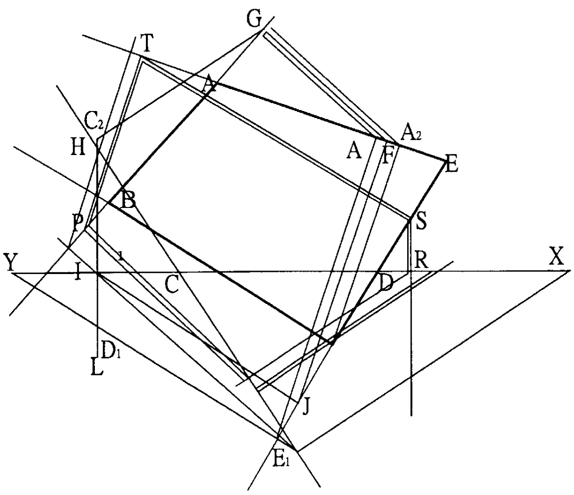
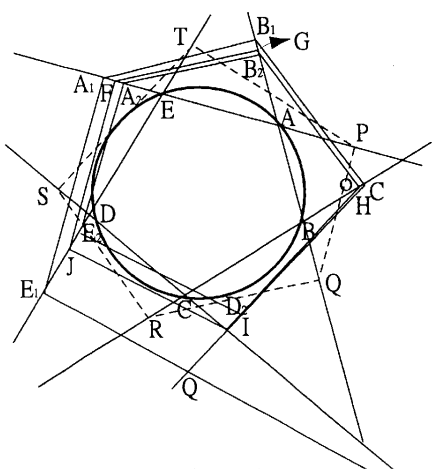


圖 (27-1)



(五點共圓)

圖 (27-2)

如圖(28)，五邊形亦具有倒位相似五邊形，及同位相似五邊形，且第4k-1層孫五邊形亦相似第4k-3層孫五邊形，證明方式也與四邊形類似。

那麼順逆時針兩方向的垂直五邊形是否也是要原五邊形共圓才會全等且十個頂點共圓呢？答案是肯定的，證明方式也與四邊形類似。

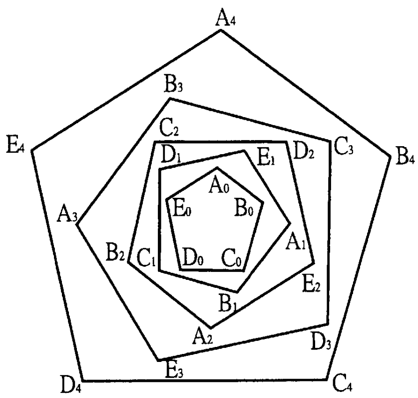


圖 (28)

四、結論

1.任一三角形有兩個垂直三角形（孫三角形），三個子三角形，且皆與原三角形相以。

2.任一三角形依同方向連續操作其孫三角形，則第4k-2層為倒位相似，第4k層為同位相似。

3.任一三角形的兩個垂直三角形必全等，且六個頂點共圓。

4.任意三角形內的『三代通則』：

任意三角形與它的兩個孫三角形及三個子三角形相似，且原三角形的各頂點及垂直三角形的各垂足組成各點公式，如前文所示。

5.母、子、孫三角形間的特性：

⑴兩個孫三角形的尤拉線重合。

⑵母、孫三角形的尤拉線互相垂直。

⑶在任一三角形中，若依同方向連續操作孫三角形，可得一極點，此點即為諸4k層孫三角形的投影中心點。

6.⑴正三角形的順逆時針方向的極點共點，且原三角形與孫三角形的邊長比為3:1。

⑵一般三角形的孫△與原△的邊長比值K，如前文所示。

⑶一般三角形的順逆時針方向的極點不共點。

7.任意四邊形依同方向用共線作圖法連續操作所得的諸孫四邊形，其第4k-2層為倒位相似，第4k層為同位相似，且4k-1與4k-3層相似，但不一定與原四邊形相似，且諸４Ｋ層孫四邊形有一投影中心點。

8.共圓四邊形的兩個垂直四邊形必全等，且頂點共圓。

9.雙直角共斜邊的四邊形可簡易的作兩條垂線即作出它的垂直四邊形，且此二垂直四邊形全等並與原四邊形相似，若連續操作，則每一層的孫四邊形皆與原四邊形相似。

10.雙直角共斜邊四邊形的邊上各點對應公式如前文所示。

11.任意五邊形依同方向連續操作所得的諸孫五邊形，其第4k-2層為倒位相似，第4k層為同位相似，且4k-1與4k-3層相似，但不一定與原五邊形相似，且諸4k層孫五邊形有一投影中心點。

12.共圓五邊形的兩個垂直五邊形必全等，且頂點共圓。

13.由上可推得：

①任意凸n邊多邊形有兩個垂直多邊形，它們可用共線作圖法操作出來，並且可用逆向垂直操作法作出諸祖先多邊形。

②任意凸n邊多邊形依同方向連續操作所得的諸孫多邊形，其第4k-2層為倒位相似，第4k層為同位相似，且4k-1與4k-3層相似，但不一定與原多邊形相似。

③共圓凸n邊多邊形的兩個垂直多邊形全等，且它們的2n個頂點共圓。

④任意凸n邊多邊形各依順逆時針方向連續操作垂直多邊形，各可得一極點，且此點即為諸４ｋ層孫多邊形的投影中心點。

五、參考資料

1.國民中學數學選修上、下冊（國立編譯館）

評語

由直角三角形直角頂至斜邊的垂線將原三角形分成二相似三角形做為動機，推廣至多邊形的情況，對三角形的性質及多邊形的性質均了解得很透澈，作品相當完整，以國中生而言是一很好的作品。