

# 馬步的擴張

國中組數學科第三名

台北市立蘭雅國民中學

作者：林忠緯

指導教師：李信仲、黃蕙玲

## 一、研究動機

下棋時，將棋一顆顆排上棋盤，這時我想：是否能用各種棋子的走法排滿棋盤。但發現：馬的走法最有趣，於是想研究排滿 $m \times n$ 的可能，並推想在立體空間是否也如此？

## 二、研究目的

- (一) 是否能用馬的走法不中斷地走滿格子 $m \times n$ 。
- (二) 是否能用馬的走法不中斷地走滿格子 $m \times n \times h$ 。

## 三、研究設備與器材

- (一) 紙 (二) 筆 (三) 方格紙 (四) 電腦

## 四、研究過程與方法

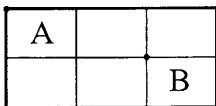
∵馬一步為3格∴本研究 $m、n \geq 3$ 。

完成：用馬步不中斷地填滿。

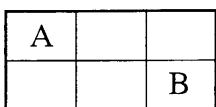
擴張： $m \times n \times h$ 最後一步能接至另一  $m \times n \times h$ 的第一步。

### (一) 研究方法

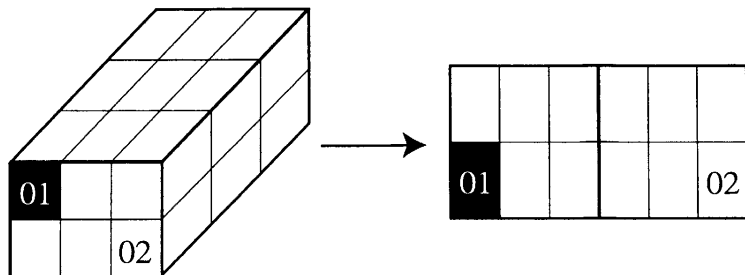
#### 1. 了解馬的走法



圖一



圖二



(1)在象棋中，馬是由A點走至B點（見圖一）

(2)為了方便紀錄，我們往右下移，移至格子中央。（見圖二）

(3)立體圖形， $m \times n \times 2$ 我們將 $m \times n$ 畫2次。

(4)任何由格子組成的四邊形中，第一步都從左上角開始

2.從方格數較少的開始研究，並找出規律。

3.研究  $m \times n \times h$  是否能完成。

## (二) 研究過程

### h=1 (平面)

#### 1. $3 \times n$

(1)  $3 \times 3$ 、 $3 \times 5$ 、 $3 \times 6$ 無法完成。

(2)  $3 \times n$  ( $n > 6$ )

①  $3 \times n$  ( $n > 6$ )

$$= 3 \times 4a \text{ or } 3 \times (4a+1) \text{ or } 3 \times (4a+2) \text{ or } 3 \times (4a+3)$$

$$= 3 \times 4b \text{ or } 3 \times (4b+9) \text{ or } 3 \times (4b+10) \text{ or } 3 \times (4b+7)$$

$$\uparrow b=a \quad \uparrow b=a-2 \quad \uparrow b=a-2 \quad \uparrow b=a-1$$

$$= b(3 \times 4) \text{ or } b(3 \times 4)+3 \times 9 \text{ or } b(3 \times 4)+3 \times 10 \text{ or } b(3 \times 4)+3 \times 7$$

$\therefore 3 \times 4$ 可向前擴張， $3 \times 9$ 、 $3 \times 10$ 、 $3 \times 7$ 可完成。

$\therefore 3 \times n$  ( $n > 6$ )只要走 $b$ 次 $3 \times 4$ 後再走1次 $3 \times 10$ 或 $3 \times 7$ （也許不用）即可完成。

②  $\therefore 3 \times 9$ 、 $3 \times 10$ 、 $3 \times 7$ 、 $3 \times 8$ 可向右擴張。

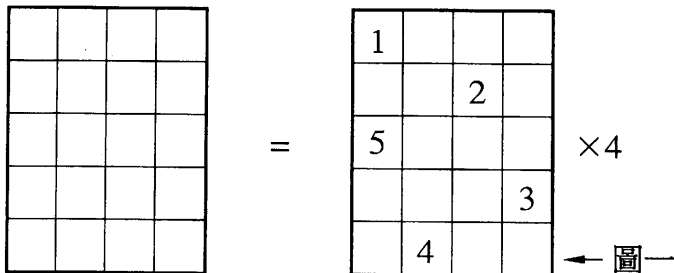
$\therefore 3 \times n$  ( $n > 6$ )可向右擴張。

#### 2. $4 \times n$

(1)  $4 \times 4$ 無法完成。

(2)  $4 \times n$  ( $n > 4$ )

$4 \times n$ 時，可分為四分之一（圖一），每四分之一皆可繞一圈完成，所以 $4 \times n$  ( $n > 4$ )皆可完成。



3.  $5 \times n$

$$\begin{aligned} &= 5 \times 5a \text{ or } 5 \times (5a+1) \text{ or } 5 \times (5a+2) \text{ or } 5 \times (5a+3) \text{ or } 5 \times (5a+4) \\ &= 5 \times 5b \text{ or } 5 \times (5b+6) \text{ or } 5 \times (5b+7) \text{ or } 5 \times (5b+8) \text{ or } 5 \times (5b+4) \\ &\quad \uparrow b=a \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow a=b \\ &= b(5 \times 5) \text{ or } b(5 \times 5)+5 \times 6 \text{ or } b(5 \times 5)+5 \times 7 \text{ or } b(5 \times 5)+5 \times 8 \\ &\quad \text{or } b(5 \times 5)+5 \times 4 \end{aligned}$$

$\therefore 5 \times 5$  可向前擴張， $5 \times 6$ 、 $5 \times 7$ 、 $5 \times 8$ 、 $5 \times 4$  可完成。

$\therefore 5 \times n$  ( $n > 4$ ) 只要走  $b$  次  $5 \times 5$  後再走 1 次  $5 \times 6$  或  $5 \times 7$  或  $5 \times 8$  或  $5 \times 4$  (也許不用) 即可完成。

4.  $m > 5$

(1) 其它 ( $m \times n$ ,  $m, n > 5$ )

①  $m \times n$  ( $m, n > 5$ )

$$\begin{aligned} &= 3a \times n \text{ or } (3a+1) \times n \text{ or } (3a+2) \times n \\ &= 3b \times n \text{ or } (3b+4) \times n \text{ or } (3b+5) \times n \\ &\quad \uparrow b=a \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1 \\ &= b(3 \times n) \text{ or } b(3 \times n)+(4 \times n) \text{ or } b(3 \times n)+(5 \times n) \end{aligned}$$

$\therefore 3 \times n$  可向右擴張， $4 \times n$ 、 $5 \times n$  可完成。

$\therefore m \times n$  ( $m, n > 5$ ) 只要走  $b$  次  $3 \times n$  後再走 1 次  $4 \times n$  或  $5 \times n$  (也許不用) 即可完成。

②  $\therefore 3 \times 6$  無法完成。

$\therefore$  只有  $6 \times 6$  不適用上述方法。

(2)  $6 \times 6$  可完成。

$h=2$  (立體)

1.  $3 \times n \times 2$

(1)  $3 \times 3 \times 2$  不能完成。

(2)  $3 \times n \times 2$  ( $n > 3$ )

①  $3 \times n \times 2$  ( $n > 3$ )

$$\begin{aligned} &= 3 \times (4a) \times 2 \text{ or } 3 \times (4a+1) \times 2 \text{ or } 3 \times (4a+2) \times 2 \text{ or } 3 \times (4a+3) \times 2 \\ &= 3 \times (4b) \times 2 \text{ or } 3 \times (4b+5) \times 2 \text{ or } 3 \times (4b+6) \times 2 \text{ or } 3 \times (4b+7) \times 2 \\ &\quad \uparrow b=a \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1 \\ &= b(3 \times 4 \times 2) \text{ or } b(3 \times 4 \times 2)+3 \times 5 \times 2 \text{ or } \\ &\quad b(3 \times 4 \times 2)+3 \times 6 \times 2 \text{ or } b(3 \times 4 \times 2)+3 \times 7 \times 2 \end{aligned}$$

$\therefore 3 \times 4 \times 2$  可向前擴張， $3 \times 5 \times 2$ 、 $3 \times 6 \times 2$ 、 $3 \times 7 \times 2$  可完

成。

$\therefore 3 \times n \times 2 (n > 3)$  只要走  $b$  次  $3 \times 4 \times 2$  後再走 1 次  $3 \times 5 \times 2$  或  $3 \times 6 \times 2$  或  $3 \times 7 \times 2$  (也許不用) 即可完成。

②  $\therefore 3 \times 4 \times 2$ 、 $3 \times 5 \times 2$ 、 $3 \times 6 \times 2$ 、 $3 \times 7 \times 2$  可向右擴張。

$\therefore 3 \times n \times 2 (n > 3)$  可向右擴張。

③  $\therefore 3 \times 4 \times 2$ 、 $3 \times 5 \times 2$ 、 $3 \times 7 \times 2$  可向下擴張， $3 \times 6 \times 2$  可向前擴張。

$\therefore 3 \times n \times 2 (n > 3)$  可向下擴張。(有  $3 \times 6 \times 2$  時，要先走 1 次  $3 \times 6 \times 2$ ，再利用  $3 \times 4 \times 2$  向下擴張)

## 2. $4 \times n \times 2$

(1) ①  $4 \times n \times 2 (n > 2)$

$$= 4 \times (4a) \times 2 \text{ or } 4 \times (4a+1) \times 2 \text{ or } 4 \times (4a+2) \times 2 \text{ or } 4 \times (4a+3) \times 2$$

$$= 4 \times (4b) \times 2 \text{ or } 4 \times (4b+5) \times 2 \text{ or } 4 \times (4b+6) \times 2 \text{ or } 4 \times (4b+3) \times 2$$

$$\uparrow b=a$$

$$\uparrow b=a-1$$

$$\uparrow b=a-1$$

$$\uparrow b=a$$

$$= b(4 \times 4 \times 2) \text{ or } b(4 \times 4 \times 2) + 4 \times 5 \times 2 \text{ or}$$

$$b(4 \times 4 \times 2) + 4 \times 6 \times 2 \text{ or } b(4 \times 4 \times 2) + 4 \times 3 \times 2$$

$\therefore 4 \times 4 \times 2$  可向前擴張， $4 \times 5 \times 2$ 、 $4 \times 6 \times 2$ 、 $4 \times 3 \times 2$  可完成。

$\therefore 4 \times n \times 2 (n > 2)$  只要走  $b$  次  $4 \times 4 \times 2$  後再走 1 次  $4 \times 5 \times 2$  或  $4 \times 6 \times 2$  或  $4 \times 3 \times 2$  (也許不用) 即可完成。

②  $\therefore 4 \times 4 \times 2$ 、 $4 \times 5 \times 2$ 、 $4 \times 6 \times 2$ 、 $4 \times 3 \times 2$  可向下擴張。

$\therefore 4 \times n \times 2 (n > 2)$  可向下擴張。

## 3. $5 \times n \times 2$

(1)  $5 \times n \times 2$

①  $5 \times n \times 2$

$$= 5 \times (3a) \times 2 \text{ or } 5 \times (3a+1) \times 2 \text{ or } 5 \times (3a+2) \times 2$$

$$= 5 \times (3b) \times 2 \text{ or } 5 \times (3b+4) \times 2 \text{ or } 5 \times (3b+5) \times 2$$

$$\uparrow b=a$$

$$\uparrow b=a-1$$

$$\uparrow b=a-1$$

$$= b(5 \times 3 \times 2) \text{ or } b(5 \times 3 \times 2) + 5 \times 4 \times 2 \text{ or } b(5 \times 3 \times 2) + 5 \times 5 \times 2$$

$\therefore 5 \times 3 \times 2$  可向前擴張， $5 \times 4 \times 2$ 、 $5 \times 5 \times 2$  可完成。

$\therefore 5 \times n \times 2$  只要走  $b$  次  $5 \times 3 \times 2$  後再走 1 次  $5 \times 4 \times 2$  或  $5 \times 5 \times 2$  (也許不用) 即可完成。

②  $\therefore 5 \times 3 \times 2$ 、 $5 \times 4 \times 2$ 、 $5 \times 5 \times 2$  可向下擴張。

$\therefore 5 \times n \times 2$  可向下擴張。

4.  $m \times n \times 2$  ( $m, n > 5$ )

(1)  $m \times n \times 2$

$$= 3a \times n \text{ or } (3a+1) \times n \text{ or } (3a+2) \times n$$

$$= 3b \times n \text{ or } (3b+4) \times n \text{ or } (3b+5) \times n$$

$$\uparrow b=a \quad \uparrow b=a-1 \quad \uparrow b=a-1$$

$$= b(3 \times n) \text{ or } b(3 \times n) + (4 \times n) \text{ or } b(3 \times n) + (5 \times n)$$

$\therefore 3 \times n \times 2$  可向右擴張， $4 \times n \times 2$ 、 $5 \times n \times 2$  可完成。

$\therefore m \times n \times 2$  ( $m, n > 5$ ) 只要走  $b$  次  $3 \times n \times 2$  後再走 1 次  $4 \times n \times 2$  或  $5 \times n \times 2$  (也許不用) 即可完成。

②  $\therefore 3 \times n \times 2$ 、 $4 \times n \times 2$ 、 $5 \times n \times 2$  可向下擴張。

$\therefore m \times n \times 2$  可向下擴張。

### $h > 2$ (其它)

1.  $m \times n \times h$  ( $h > 2$ )

(1)  $m \times n \times h$

$$= m \times n \times (2a) \text{ or } m \times n \times (2a+1)$$

$$= m \times n \times 2a \text{ or } m \times n \times 2a + m \times n \times 1$$

$$= a(m \times n \times 2) \text{ or } a(m \times n \times 2) + m \times n \times 1$$

$\therefore m \times n \times 2$  可向下擴張，且  $m \times n \times 1$  可完成。

$\therefore m \times n \times h$  ( $h > 2$ ) 只要走  $a$  次  $m \times n \times 2$  後再走 1 次  $m \times n \times 1$  (也許不用) 即可完成。

(2)  $\therefore 3 \times 3 \times 1$ 、 $3 \times 5 \times 1$ 、 $3 \times 6 \times 1$ 、 $4 \times 4 \times 1$ 、 $3 \times 3 \times 2$  無法完成。

$\therefore 3 \times 3 \times h$ 、 $3 \times 5 \times h$ 、 $3 \times 6 \times h$ 、 $4 \times 4 \times h$ 、不適用上述方法。

2.  $3 \times 3 \times h$  利用  $3 \times 3 \times 4$  向下擴張完成。

3.  $3 \times 5 \times h$  利用  $3 \times 5 \times 2$  向下擴張完成。

4.  $3 \times 6 \times h$  利用  $3 \times 6 \times 3$  向下擴張完成。

5.  $4 \times 4 \times h$  利用  $4 \times 4 \times 2$  向下擴張完成。

## 五、研究結果

√:可以    ×:不可以

/:不必要

高	長	寬	完 成	擴張方向		
				前	右	下
1	3	3	×	×	×	×
		4	√	√	×	/
		5	×	×	×	×
		6	×	×	×	×
		7	√	/	√	/
		8	√	/	√	/
		9	√	/	√	/
		10	√	/	√	/
		n	√	/	√	/
		4	3	3	√	/
4	×			×	×	×
n	√			/	/	/
5	3	3	×	×	×	×
		4	√	/	/	/
		5	√	√	/	/
		6	√	/	/	/
		n	√	/	/	/
6	6	6	√	/	/	/
		m	n	√	/	/

高	長	寬	完 成	擴張方向				
				前	右	下		
2	3	3	×	×	×	×		
		4	√	√	√	√		
		5	√	/	√	√		
		6	√	√	√	/		
		7	√	/	√	√		
		n	√	/	√	√		
		4	3	3	√	/	/	√
				4	√	√	/	√
				5	√	/	/	√
				6	√	/	/	√
5	3	3	√	√	/	√		
		4	√	/	/	√		
		5	√	/	/	√		
m	n	√	/	/	√			

高	長	寬	完 成	擴張方向				
				前	右	下		
3	3	3	×	×	×	×		
		4	√	/	/	√		
		5	√	/	/	/		
		6	√	/	/	/		
		7	√	/	/	/		
		n	√	/	/	/		
		5	2	2	√	/	/	√
				3	√	/	/	/
				n	√	/	/	/
		6	2	2	√	/	/	/
3	√			/	/	√		
4	√			/	/	/		
n	2	2	√	/	/	/		
		3	√	/	/	/		
		n	√	/	/	/		
4	4	2	√	/	/	√		
		3	√	/	/	/		
		n	√	/	/	/		
h		n	√	/	/	/		

## 六、討論

由研究結果可以顯示，馬的走法在平面上的自由度較立體中低。

## 七、結論 (m、n>2)

$m \times n \times h$  中除了  $3 \times 3 \times 1$ 、 $3 \times 5 \times 1$ 、 $3 \times 6 \times 1$ 、 $4 \times 4 \times 1$ 、 $3 \times 3 \times 2$ 、 $3 \times 3 \times 3$ ，其他皆能完成。

## 八、參考資料及其他

### (一) 參考資料

1. 第31屆中小學科學展覽會 —— 高小組 —— 天馬行空
2. 第32屆中小學科學展覽會 —— 國中組 —— 馬能走遍棋盤上各點嗎
3. 上海孝育出版社 —— 棋盤上的數學

### (二) 附圖

1	8	3
4	11	6
7	2	9
10	5	12
3×4		

1	6	13
14	19	2
17	12	15
20	3	18
9	6	11
4	21	8
7	10	5
3×7		

1	14	17
16	21	2
13	18	15
22	3	20
19	12	23
4	9	6
7	24	11
10	5	8
3×8		

1	8	3
4	11	6
7	2	9
10	5	12
13	20	15
16	23	18
19	14	21
22	17	24
3×8		

1	20	23
22	7	2
19	24	21
6	3	8
25	18	5
4	9	26
17	12	15
14	27	10
11	16	13
3×9		

1	20	23
22	17	2
19	24	21
16	3	18
25	28	5
4	15	26
17	6	29
14	9	12
11	30	7
8	13	10
3×10		

1	12	7	16	3
6	17	2	11	8
13	10	19	4	15
18	5	14	9	20
5×4				

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	23	4	21
18	25	6	11	16
7	12	17	22	5
5×5				

1	20	9	26	3
16	27	2	19	10
21	8	17	4	25
28	15	24	11	18
7	22	13	30	5
14	29	6	23	12
5×6				

1	18	27	10	3
28	9	2	19	26
17	32	25	4	11
8	29	20	33	24
21	16	31	12	5
30	7	14	23	34
15	22	35	6	13
5×7				

1	32	7	36	3
6	35	2	39	8
31	10	33	4	37
34	5	38	9	40
11	30	17	26	13
16	25	12	21	18
29	20	23	14	27
24	15	28	19	22
5×8				

1	28	17	20	3	30
16	19	2	29	10	21
35	8	27	18	31	4
26	15	36	9	22	11
7	34	13	24	5	32
14	25	6	33	12	23
6×6					

1	4	9	10	7	2
12	17	20	19	14	11
21	8	5	6	3	22
16	13	24	23	18	15
3×4×2					

1	8	3	22	17	20
4	11	6	19	14	23
7	2	9	16	21	18
10	5	12	13	24	15
$3 \times 4 \times 2$					

1	8	3	22	17	24
4	11	6	19	14	21
7	2	9	16	23	18
10	5	12	13	20	15
$3 \times 4 \times 2$					

1	10	15	16	3	8
14	19	26	7	24	17
11	2	13	4	9	6
30	25	20	23	18	27
21	12	29	28	5	22
$3 \times 5 \times 2$					

1	24	21	20	17	2
22	33	4	3	6	19
35	14	23	18	25	16
30	7	34	9	32	5
13	36	29	26	15	10
28	31	12	11	8	27
$3 \times 6 \times 2$					

1	12	15	16	19	22
14	7	38	21	40	17
11	2	13	18	23	20
6	39	10	41	8	37
3	34	5	24	29	26
32	9	36	27	42	31
35	4	33	30	25	28
$3 \times 7 \times 2$					

1	32	23	26	9	34
24	37	2	35	6	25
31	22	33	10	27	8
36	3	38	7	40	5
19	16	21	30	11	28
14	39	18	41	4	13
17	20	15	12	29	42
$3 \times 7 \times 2$					

1	4	7	10	22	19	16	13
8	11	2	5	17	14	23	20
3	6	9	12	24	21	18	15
$4 \times 3 \times 2$							

1	6	11	16	36	31	26	21
12	17	2	7	27	22	37	32
5	10	15	20	40	35	30	25
18	13	8	3	23	28	33	38
9	4	19	14	34	39	24	29
$4 \times 5 \times 2$							

1	30	5	18	28	15	22	11
8	19	2	31	21	12	25	14
29	4	17	6	16	27	10	23
20	7	32	3	9	24	13	26
$4 \times 4 \times 2$							

1	42	7	26	14	23	32	39
12	25	2	41	31	40	13	22
43	6	27	8	24	15	38	33
30	11	44	3	37	34	21	18
5	46	9	28	16	19	36	47
10	29	4	45	35	48	17	20
$4 \times 6 \times 2$							

1	14	11	20	29	16	7	4	27	22
10	19	2	25	12	3	26	9	18	5
15	24	13	30	21	8	17	6	23	28
$5 \times 3 \times 2$									



1	14	11	28	19	16	7	4	21	26
10	29	2	23	12	3	22	9	30	5
15	24	13	18	27	8	17	6	25	20
$5 \times 3 \times 2$									

1	32	7	40	3	30	11	24	15	28
6	37	2	33	8	25	16	29	20	23
31	10	35	4	39	12	21	18	27	14
36	5	38	9	34	17	26	13	22	19
$5 \times 4 \times 2$									

1	14	9	20	3	28	43	34	49	26
22	19	2	15	10	35	48	27	44	39
13	8	21	4	25	42	29	38	33	50
18	23	6	11	16	47	36	31	40	45
7	12	17	24	5	30	41	46	37	32
$5 \times 5 \times 2$									

1	8	3	4	11	6	7	2	9	10	5	12
22	17	24	19	14	21	16	23	18	13	20	15
25	32	27	28	35	30	31	26	33	34	29	36
$3 \times 3 \times 4$											

1	16	5	4	25	2	17	34	19	26	41	30	29	18	27
6	23	10	9	40	7	20	37	22	45	8	39	38	21	44
11	36	15	14	3	12	35	24	33	32	13	42	43	28	31
$3 \times 3 \times 5$														

1	46	7	6	31	12	47	22	45	32	13	30	23	44	53	52	33	24
4	19	10	11	14	5	18	43	20	15	34	17	54	21	26	25	16	51
9	42	3	2	35	8	41	48	39	38	29	36	27	40	49	50	37	28
$3 \times 3 \times 6$																	

1	12	15	14	7	42	11	2	13	6	41	10	3	34	5	32	9	36	35	4	33
16	19	22	21	38	17	18	23	20	39	8	37	24	29	26	27	40	31	30	25	28
55	58	43	44	61	56	57	54	59	60	45	62	53	48	51	50	63	46	47	52	49
$3 \times 3 \times 7$																				

1	10	27	26	3	8
28	23	18	7	16	25
11	2	29	4	9	6
22	17	12	15	24	19
13	30	21	20	5	14
$3 \times 5 \times 2$					

1	16	5	6	23	10	11	36	15
4	25	2	9	40	7	14	3	12
17	34	19	20	37	22	35	24	33
26	41	30	45	8	39	32	13	42
29	18	27	38	21	44	43	28	31
$3 \times 5 \times 3$								

1	24	21	20	17	2
22	29	4	3	6	19
27	14	23	18	25	16
32	7	28	9	30	5
13	26	33	34	15	10
36	31	12	11	8	35
$3 \times 6 \times 2$					

1	46	7	4	19	10	9	42	3
6	31	12	11	14	5	2	35	8
47	22	43	18	43	20	41	48	39
32	13	30	15	34	17	38	29	36
23	44	53	54	21	26	27	40	49
52	33	24	25	16	51	50	37	28
$3 \times 6 \times 3$								

1	24	21	20	17	2
22	29	4	3	6	19
27	14	23	18	25	16
32	7	28	9	30	5
13	26	33	34	15	10
36	31	12	11	8	35
71	44	49	46	57	70
48	39	72	69	60	47
43	50	41	54	45	52
40	61	38	59	68	63
55	42	65	64	53	58
66	37	56	57	62	67
$3 \times 6 \times 4$					

1	30	5	18	28	15	22	11
8	19	2	31	21	12	25	14
29	4	17	6	16	27	10	23
20	7	32	3	9	24	13	26
$4 \times 4 \times 2$							

1	40	5	26	12	31	24	41	33	46	13	20
8	27	2	39	23	42	9	30	14	17	34	47
37	4	25	6	32	11	44	21	45	36	19	16
28	7	38	3	43	22	29	10	18	15	48	35
$4 \times 4 \times 3$											

## 評語

將棋子佈滿棋盤之研究得簡明細緻，更進而推廣到立體情況，是件不錯的作品。