鏡射乾坤

國中組數學科第二名

國立高雄師大附中

作　　者：何思賢、康雅婷、陳瓏方

指導教師：張彥平、吳吉昌

一、研究動機

在平面幾何中，有一個重要且有趣的問題：平面上有兩點A、B，在直線L同側，在L上找一點P_0，使$\overline{P_0A}+\overline{P_0B}$有最小值，要解決這樣的問題，我們會將L視為一面鏡子，利用“鏡射”的方法，解決“不定折線段最小長度問題”受了此觀念的啟發，我嘗試利用多條直線，交替鏡射去探討“不定多邊形最小周長為何？”因此，展開了我的研究之旅……

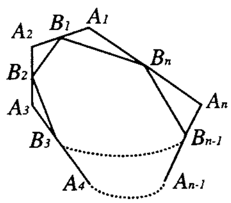
二、研究目的

（一）從一種新的角度（鏡射）來探討“凸n邊形內接最小周長之n邊形”的問題。

（二）發展一套有系統的方法，並利用此作法對一些特殊情況作完整討論。

【定義】

（一）如圖（1-1），$A_1A_2\cdots A_n(n\geq 3)$為凸$n$邊形，若對於（凸）$n$邊形$B_1B_2\cdots B_n$,$B_i$在$\overline{A_iA_{i+1}}$上（$i$=1,2,3, … n-1)B_n在$\overline{A_nA_1}$上，則稱$B_1B_2\cdots B_n$為$A_1A_2\cdots A_n$的內接n邊形（包含退化情況）。



圖（1-1）

（二）設P為$A_1A_2\cdots A_n$邊形上一點，則在本研究中以$f(p)$表“以P為其中一頂點的最小周長N邊形的周長”，設P在$\overline{A_1A_2}$上，若視P為在$\overline{A_1A_2}$上的動點，當P移動到某一點P_0所對應的$f(P_0)$值為最小，則min$f(p)$以表之。

【預備定理】

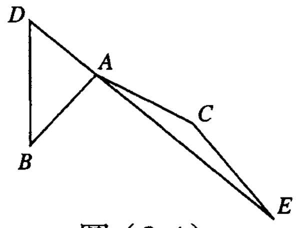
預備定理（一）n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中，存在m個點P_1 $P_2\cdots P_m$，使$A_1P_1P_2\cdots P_mA_n$為凸$(m+2)$邊形，則$A_1A_2\cdots A_n$之周長>$A_1P_1P_2\cdots P_mA_n$之周長

預備定理（二）在凸四邊形$ABCD$中，$\overline{AD}=\overline{BC}$

則(1)$\overline{AB}=\overline{CD} \Leftrightarrow \angle A+\angle B=180^\circ$

(2)$\overline{AB}<\overline{CD} \Leftrightarrow \angle A+\angle B>180^\circ$

預備定理（四）平面上有五點A,B,C,D,E滿足下列
關係：（如圖(2-4)）
(1)$\overline{AB}=\overline{AC}>0$,
(2)$\overline{BD}=\overline{CE}>0$
(3)$COS\angle ABD+COS\angle ACE<0$
則$\overline{AD}+\overline{AE}>\overline{AB}+\overline{AC}$



圖（2-4）

三、研究過程

PART.A 三角形，因限於篇幅，予以省略，研究結果詳見“結論”。

PART.B 四邊形

1. 四邊形的處理方式，依實際情形需要，基本鏡射法與連續鏡射法交互使用。
2. 從特殊的四邊形（矩形、平行四邊形）開始探討，推廣到一般四邊形。

（一）矩形，略，其結果被蘊含於“一般四邊形”的結論中。

（二）平行四邊形（在此指非矩形之平行四邊形）

設$ABCD$為▱，在不違背一般性之原則下，設$\angle ABC>90°$，作$\overline{AB}$對$\overline{AD}$之對稱圖形$\overline{A'B'}$；$\overline{AB}$對$\overline{BC}$、$\overline{CD}$之連續對稱圖形$\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$以下分兩種情形探討：

(1) $\angle ABC+\angle BDC\geqq 180°$下又分二情形：

(a.1) $\angle ADC+\angle BDC\geqq 180°$（如圖(3-2.3)）

(a.2) $\angle ADC+\angle BDC<180°$（如圖(3-2.4)）

(a.1)（如圖(3-2.3)）設P為$\overline{AB}$上之動點，對$\overline{AD}$之對稱點為P'，對$\overline{BC}$，$\overline{CD}$之二度對稱點為P_2

$\therefore \angle P'DB_2<360°-\angle ADC-\angle B_2DC$

$=360°-(\angle ADC+\angle BDC)$

$\leqq 360-180=180°$

$\leqq 360-180=180°$

則對於任意內接四邊形$PQRS$,

總有$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$

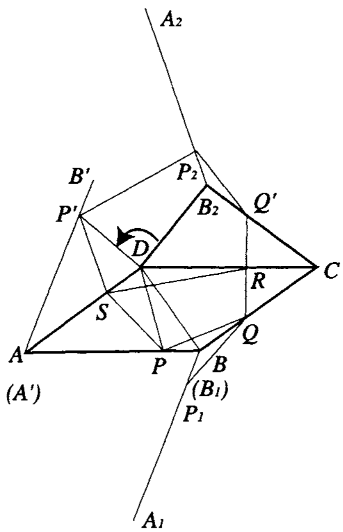
$=\overline{P'S}+\overline{SR}+\overline{RQ'}+\overline{Q'P_2}$

$\geqq \overline{P'D}+\overline{DB_2}+\overline{P_2B_2}$

(預備定理（一），等式成立時，

S,D,R重合，Q',B_2重合）

$=\overline{PD}+\overline{PB}+\overline{BD}$



圖（3-2.3）

$f(p)=\overline{PD}+\overline{PB}+\overline{DB}$，其中$\overline{BD}$為定值

又顯然，P移動至B點時，

$\overline{PD}+\overline{PB}=\overline{BD}$有最小值，則$f(p)$最小值為$f(B)$

$\therefore \min f(p)=f(B)=\overline{BD}+\overline{BD}=2\overline{BD}$

此時，內接最小周長四邊形為短對角線之二倍長，

為退化四邊形。

(a.2)如圖(3-2.4)連$\overline{B_2D}$，並延長$\overline{B_2D}$交$\overline{AB'}$於P'_{01},（為P'_{01}定點），設P'_{01}對$\overline{AD}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$之連續對稱點為P_{01}，P'_1，P'_2，設P_{00}為$\overline{P_{01}B}$上之動點，P_{02}為$\overline{P_{01}A}$上之動點且P_{02}對$\overline{AD}$之對稱點為P'_{02}，對$\overline{AD}$，$\overline{BC}$之二度對稱點為P''_2。

① 對於$f(P_{00})$，仿(a.1)之討論，可得：

$f(P_{00})=\overline{P_{00}D}+\overline{P_{00}B}+\overline{BD}$

$\Rightarrow \min f(P_{00})=f(B)=2\overline{BD}$

② 又對於任意內接四邊形$P_{02}QRS$

總有$\overline{P_{02}Q}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP_{02}}$

$=\overline{P''_2Q'}+\overline{Q'R}+\overline{RS}+\overline{SP'_{02}}$

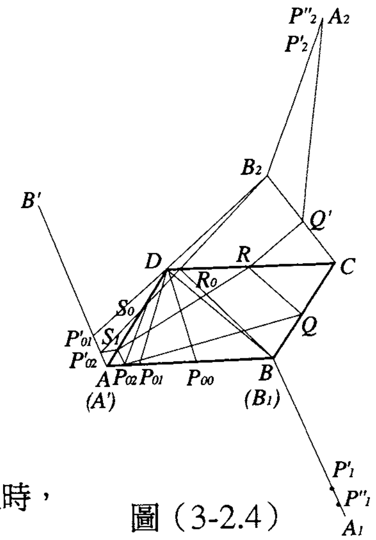
$\geqq \overline{P''_2Q'}+\overline{Q'P'_{02}}$

(等式成立時，P'_{02},S,R,Q'共線)

$\geqq \overline{P''_2B_2}+\overline{B_2P'_{02}}$

(由預備定理（一），等式成立時，Q',B_2重合)

$=\overline{P_{02}B}+\overline{BR_0}+\overline{R_0S_0}+\overline{S_0P_{02}}$



圖（3-2.4）

$\therefore f(P_{02})=\overline{P''_2B_2}+\overline{B_2P'_{02}}$

$=\overline{P''_2P'_2}+\overline{P'_2B_2}+\overline{B_2P'_{02}}$

$=(\overline{P'_{02}P'_{01}}+\overline{B_2P'_{02}})+\overline{P'_2B_2}$

$\geqq \overline{P'_{01}B_2}+\overline{B_2P'_2}$(等式成立時，$P_{02},P_{01}$重合)

$=\overline{P_{01}D}+\overline{P_{01}B}+\overline{BD}=f(P_{01})$

$\therefore \min f(P_{02})=f(P_{01})$

但P_{01}為P_{00}之特殊情形

$\therefore f(P_{01})<\min f(P_{00})=f(B)=2\overline{BD}$

此時內接最小周長四邊形為短對角線之二倍長，為退化四邊形

(2) $\angle ABC+BDC<180°$，下分二情形：

(b1) $ADC+\quad A_2DC>180°$，（即$\overline{AA_2}$和$\overline{CD}$不相交）如圖(3-2.5)

(b2) $\angle ADC+\angle A_2DC\leqq 180^\circ$，（即$\overline{AA_2}$和$\overline{CD}$相交）如圖(3-2.6)

而對於每一情形均有：

$\angle B'DB_2=360^\circ-(\angle ADB'+\angle ADB+\angle CDB+\angle CDB_2)$

$=360^\circ-2\angle ADC=2(180^\circ-\angle ADC)=2\angle BAD<180^\circ$

$\angle A'CA_2=\angle ACD+\angle A_2CD=\angle ACD+\angle A_1CD$

$=\angle ACD+\angle A_1CB+\angle BCD$

$=(\angle ACD+\angle ACB)+\angle BCD=\angle BCD+\angle BCD$

$=2\angle BCD=2\angle BCD<180^\circ$

(以上可解釋$\overline{AA_2}$和$\overline{CD}$相交與否的狀況）

(b1)(如圖(3-2.5)）延長$\overline{A_1B}$交$\overline{AD}$於E，設P為$\overline{AB}$上之動點，且

P對$\overline{AD}$之對稱點為P'，

P對$\overline{BC},\overline{CD}$之二度對稱點為$P_2$。

$\therefore \angle P'DP_2\leqq 360^\circ-\angle ADA_2<360^\circ-180^\circ=180^\circ$

則$\overline{P'P_2}$和$\overline{CD}$不相交

對於任意內接四邊形$PQRS$

總有$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$

$=(\overline{P_1Q}+\overline{QR})+\overline{RS}+\overline{SP'}$

$\geqq \overline{P_1R}+\overline{RS}+\overline{SP'}$

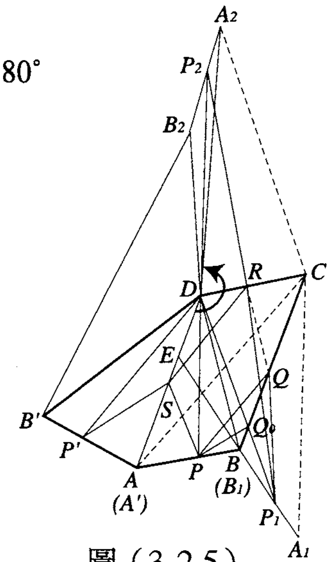
(等式成立時，P_1,Q,R共線）

$\geqq \overline{P_2D}+\overline{DP'}$ （由預備定理（一）

，等式成立時，R,S,D重合）

$=\overline{P_1D}+\overline{PD}$

$=\overline{PD}+\overline{PQ_0}+\overline{Q_0D}$



圖（3-2.5）

$\therefore f(p)=\overline{P_2D}+\overline{DP'}$

又$\overline{B'D}=\overline{B_2D},\overline{P'B'}=\overline{B_2P_2},$

$\cos\angle P'B'D+\cos\angle P_2B_2D=\cos\angle ABD+\cos\angle A_1BD$

$=\cos\angle ABD-\cos\angle EBD<0$

$\because$若$90^\circ\geqq\angle ABD$，則$90^\circ\geqq\angle ABD>\angle EBD$

則$\cos\angle ABD<\cos\angle EBD$，可得上

若$90^\circ<\angle ABD$，又$\angle EBD<180^\circ-90^\circ=90^\circ$

則$\cos\angle ABD<0,\cos\angle EBD>0$，可得上

$\therefore$由預備定理（四）得：

$\overline{P_2D}+\overline{DP}\geqq\overline{B_2D}+\overline{B'D}$（等式成立時，$P$，$B$重合）$=2\overline{BD}$

故$\min f(p)=f(B)=2\overline{BD}$

此時內接最小周長四邊形為短對角線之二倍長，為退化四邊形

(b.2)（如圖(3-2.6)）過D作$\overline{P'_{01}P'_2}$，交$\overline{B'A'}$，$\overline{B_2A_2}$於D,E，使$\overline{B'P'_{01}}=\overline{B_2P'_2}$

(具體作法見附錄（一））

若P'_{01}，P'_2不同時分別在$\overline{B'A'}$，$\overline{B_2A_2}$上，

則P'_{01}，P'_2同時不在$\overline{B'A'}$，$\overline{B_2A_2}$上，

$$\left(\begin{array}{l} \because \overline{B'A'}-\overline{B'P'_{01}}=\overline{B_2A_2}-\overline{BP'_2} \\ \Rightarrow \overline{B'A'}-\overline{B'P'_{01}},\overline{B_2A_2}-\overline{B_2P'_2}\text{必同號} \end{array}\right)$$

$\therefore \angle P'_{01}DP'_2<\angle ADA_2\leqq 180^\circ$，不合

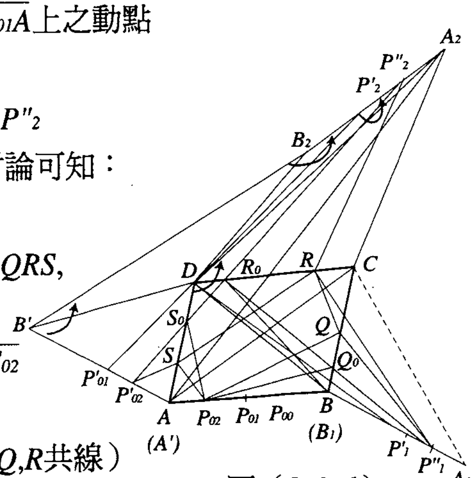
$\therefore P'_{01},P_2$必分別在$\overline{B'A'}$, $\overline{B_2A_2}$上

作P'_{01}對$\overline{AD}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$之連續對稱點P_{01}，P'_1，P'_2

設P_{00}為$\overline{P_{01}B}$上之動點，P_{02}為$\overline{P_{01}A}$上之動點

且P_{02}對$\overline{AD}$之稱點為P'_{02}，

對$\overline{BC},\overline{CD}$之二度對稱點為$P''_2$



圖（3-2.6）

① 對於動點P_{00}，仿(b.1)之討論可知：

$\min f(P_{00})=f(B)=2\overline{BD}$

又對於任意內接四邊形$P_{02}QRS$,

總有$\overline{P_{02}Q}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP_{02}}$

$=(\overline{P''_1Q}+\overline{QR})+\overline{RS}+\overline{SP'_{02}}$

$\geqq \overline{P''_1R}+\overline{RS}+\overline{SP'_{02}}$

（等式成立時，P''_1,Q,R共線）

$=\overline{P''_2R}+\overline{RS}+\overline{SP'_{02}}\geqq \overline{P''_2P'_{02}}$

（等式成立時，P'_{02}，S，R，P''_2共線）

② 又對於每一點P_{02}，$\overline{P'_{02}P''_2}$必和$\overline{AD}$，$\overline{CD}$相交

$$\left(\begin{array}{l} \because P'_{01}\text{，}D\text{，}P'_2\text{共線，}\overline{A'A_2}\text{和}\overline{CD}\text{相交，} \\ \quad\text{且}P'_{02}\text{，}P''_2\text{分別在}\overline{P'_{01}A'}\text{，}\overline{P'_2A_2}\text{上} \end{array}\right)$$

且R_0（設為$\overline{P'_{02}P''_2}$和$\overline{CD}$之交點）使

$\angle R_0BP''_1\leqq \angle DBP'_1<180^\circ$

則$\overline{R_0P''_1}$和$\overline{BC}$必相交（如圖中Q_0）

$\therefore f(P0_2)=\overline{P'_{02}P''_2}$，

如圖中$P_{02}Q_0R_0S_0$之周長即為$f(P_{02})$

③ $\because \angle A_2B_2B'+\angle A'B'B_2$

$=(\angle B'B_2D+\angle B_2B'D)+(\angle AB'D+\angle A_2B_2D)$

$=(180^\circ-2\angle BAD)+(\angle ABD+\angle A_1BD)$

$=180^\circ-2\angle BAD+2(180^\circ-\angle BAD)$

$=540^\circ-4\angle BAD$

$\therefore \angle A_2B_2B'+\angle A'B'B_2>540^\circ-4\times 90^\circ=180^\circ$

④ $\because$ 在四邊形 $P'_{01}P_2'A_2A'$ 中，$\overline{P'_{01}A}=\overline{P'_2A_2}$

$\angle AP'_{01}P'_2+\angle A_2P'_2P'_{01}=\angle A'B'B_2+\angle A_2B_2B'>180^\circ$

$\therefore$ 由預備定理（二）得：

$\overline{P'_{01}P'_2}\leqq\overline{AA_2}\Rightarrow\overline{P'_{01}P_2}\leqq\overline{P'_2P''_2}\leqq\overline{AA_2}$

$\therefore \min f(P_{01})=\overline{P'_{01}P'_2}=f(P_{01})$

⑤ 但 P_{01} 為 P_{02} 之特殊情形，

$\therefore f(P_{01})<\min f(P_{02})=f(B)=2\overline{BD}$

此時內接最小周長四邊形為短對角線之二倍長，為退化四邊形

故由(a)(b)可得：平行四邊形之內接最小周長為短對角線之二倍長，為退化四邊形。

註：在(b.2)④中，使用預備定理（一）之先決條件：“依 $P'_{01}A'A'_2P'_2$ 之次序可構成凸四邊形”，如此須證明：

(1) $\overline{P'_{01}P'_2}$，$\overline{A'A_2}$ 不相交，其方法如下：

反設 $\overline{P'_{01}P'_2}$，$\overline{A'A_2}$ 相交，則 P'_{01}，P'_2 在 $\overline{A'A_2}$ 異側

$\therefore \angle DP'_2A_2\geqq 180^\circ$ 但 $\angle DP'_2A_2=\angle DP'_1A_1=180^\circ-\angle DP'_1B<180^\circ$

矛盾，故假設錯誤，則 $\overline{P_{01}'P_2'}$，$\overline{A'A_2}$ 不相交

(2) $\angle AP'_{01}P'_2<180^\circ, \angle A_2P'_2P'_{01}<180^\circ, \angle P'_{01}AA_2<180^\circ, \angle P'_2A_2A<180^\circ$

這是很明顯的！

（三）一般四邊形

有了解決平行四邊形的方法做基礎，對於一般四邊形就較好解決了，我們試將一般四邊形的分類討論方式如下：（其中「>」表鈍角；「<」表銳角；「=」表直角）

(三個銳角)	(二個銳角)	(二個銳角)	(二個銳角)	(二個銳角)	(一個銳角)	(一個銳角)	(一個銳角)	(一個銳角)	(一個銳角)
< <	< >	< >	= <	< =	> >	< =	< >	< =	< >
< >	> <	< >	< >	< >	< >	> >	> =	= >	= =

解決處

(b2)	(a)	(b1).1	(a)	(b2)	(a)	(a)	(a)	(b1).1	(a)
		(b1).2			(b1).2	(b1).1			
		(b2)				(b1).2			

設$ABCD$為四邊形在不違反一般性之原則下，設$\angle ABC>90^\circ$，作$\overline{AB}$對$\overline{AD}$之對稱圖形$\overline{A'B'}\overline{AB}$對$\overline{BC}$，$\overline{CD}$之連續對稱圖形$\overline{A_1B_1}$，$\overline{A_2B_2}$，設$P$為$\overline{AB}$上之動點，下分二情形討論

(a) $\angle ABC\geqq 90^\circ$ 可分二情形：

(a1) $\angle ADC+\angle DBC\geqq 180^\circ$，如此類似（二）.(a)得$f(P)=2\overline{BD}$

(a2) $\angle ABC+\angle DBC<180^\circ$，如此類似（二）.(b)得$f(P)=2\overline{BD}$

(b) $\angle ADC<90^\circ$ 可分二情形：

(b1) $\angle B+\angle D\leqq 180^\circ$ ，由上表知：僅需討論$\angle C\leqq 90^\circ$之情形，可省略$\angle C>90^\circ$之情形

(b2) $\angle B+\angle D>180^\circ$ ，由上表知：僅需討論$\angle C\leqq 90^\circ$ ，$\angle D<90^\circ$，$\angle A<90^\circ$之情形

(b1) 1. $\angle C\leqq 90^\circ$ ，因限於篇幅，故僅列圖(3-2.9)(3-2.10)之推導過程和各圖結果

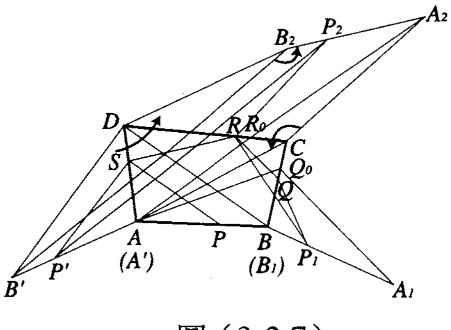
(1)如圖(3-2.7)，

$\angle ABC+\angle DBC\leqq 180^\circ$，$\angle DAB+\angle CAD\leqq 180^\circ$

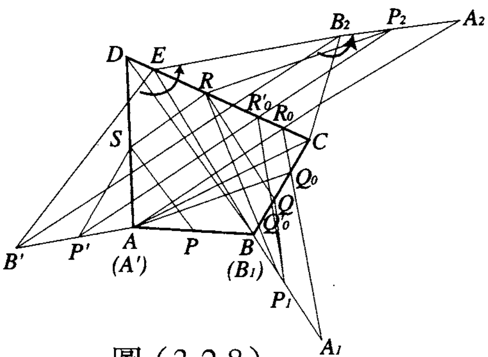
則$\overline{B'B_2}>\overline{A'A_2}$:min $f(P)=\overline{AA_2}$

此時內接最小四邊形為AAR_0Q_0，為退化四邊形；

$\overline{B'B_2}=\overline{A'A_2}$:$f(P)$為定值（均為最小值），有無限多組解



圖（3-2.7）



圖（3-2.8）

(2)如圖(3-2.8) $\angle ABC+\angle DBC>180^\circ$ ，$\angle DAB+\angle A_2AB\leqq 180^\circ$ ，結論同(1)

(3)如圖(3-2.9)(3-2.10)

$\angle BAD+\angle CAD>180°$，

我們重新鏡射，作法如下：

作$\overline{AD}$對$\overline{CD}$之對稱圖形$\overline{A'D'}$，

對$\overline{AB}$，$\overline{CB}$之連續對稱圖形$\overline{A_1D_1}$，$\overline{A_2D_2}$

設S為$\overline{AD}$上之動點，S對$\overline{CD}$之對稱點為S'，對$\overline{AB}$，$\overline{BC}$之二度對稱點為$S2$

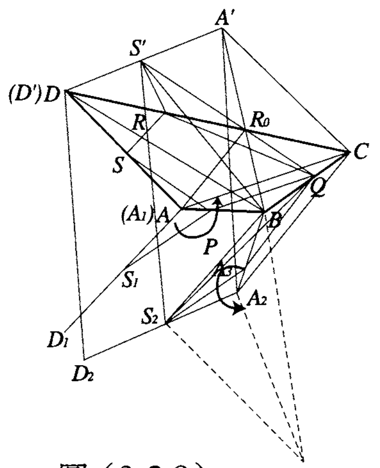
如圖(3-2.9)對於任意內接四邊形$PQRS$，

總有$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$

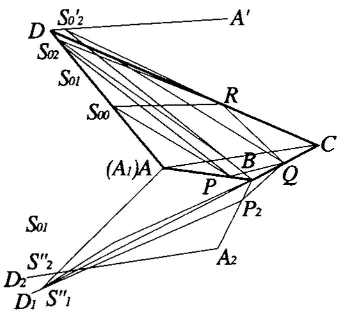
$=\overline{P_2Q}+\overline{QR}+\overline{RS'}+\overline{S_2P_2}$

$\geqq\overline{S_2Q}+\overline{QS'}$(等式成立時：$Q,R,S'$共線，$Q,P_2,S_2$共線)

$\geqq\overline{S_2B}+\overline{SB}$(等式成立時：$Q,B$重合)



圖（3-2.9）



圖（3-2.10）

如圖(3-2.10)，雖然$\overline{A_1D_1}$，$\overline{A_2D_2}$相交，

但可分區討論如下：（設區分點為S_{01}）

(i)設S_{00}為$\overline{S_{01}A}$上之動點，對於任意內接四邊形$RQRS_{00}$同上法可得：

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS_{00}}+\overline{S_{00}P}\geqq\overline{S_2B}+\overline{SB'}$

(ii)設S_{02}為$\overline{S_{01}B}$上之動點，對於任意內接四邊形$PQRS_{02}$

總有$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS_{02}}+\overline{S_{02}P}$

$=\overline{P_2Q}+\overline{QR}+\overline{RS'_{02}}+\overline{S''_1P}$

$\geqq\overline{S''_1Q}+\overline{S'_{02}Q}$

(等式成立時，Q，P_2，S''_1共線，Q，R，S'_{02}共線）

$\geq \overline{S''_1B}+\overline{S'_{02}B}$(等式成立時，$Q$，$B$重合）

由上可得：對於每一種情形，均有$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP} \geq \overline{S_2B}+\overline{S'B}$

現在考慮min $f(S)$:

∵四邊形$A'A_2D_2D'$中，

$\angle D'A'A_2+\angle D_2A_2A'=2(\angle BAD+\angle BCD)-180^\circ>180^\circ$

且$\angle D_2A_2A'<\angle D_2A_2C=\angle D_1A_1C=360^\circ-(\angle BAD+\angle CAD)<180^\circ$

$\angle D'A'A_2<\angle DA'C<\angle DAB<180^\circ$

∴$\overline{A'A_2} \leq \overline{D'D_2} \Rightarrow \overline{A'A_2} \leq \overline{S'S_2} \leq \overline{D'D_2}$

若$\overline{A'A_2}$和$\overline{BC}$相交，結論同(1)

若$\overline{A'A_2}$和$\overline{BC}$不相交，則$\overline{S'S_2}$和$\overline{BC}$必不相交。

於是對於每一點S，均有$f(S)=\overline{S'B}+\overline{S_2B}$

我們為求min $f(S)$，可作$\triangle ES_2A_2 \cong \triangle BS'A'$，

其中E，B位於$\overline{A_2D_2}$異側，連$\overline{BE}$。

$\therefore \angle BA_2E=\angle BA_2S_2+\angle EA_2S_2$

$=\angle BA_2A'+\angle S_2A_2A'\angle BA'S'$

$=(\angle A_2A'S'+\angle A'A_2S_2)+\angle BA'A_2+\angle BA_2A'>180^\circ$

∴A_2在$\triangle BS_2E$內部或和S_2重合

$\Rightarrow \overline{S'B}+\overline{S_2B}=\overline{S_2E}+\overline{S_2B} \geq \overline{A_2B}+\overline{A_2E}=\overline{A'B}+\overline{A_2B}$(等式成立時，$A_2$，$S_2$重合）

∴min $f(S)=f(A)=\overline{A'B}+\overline{A_2B}(=\overline{AR_0}+\overline{R_0B}+\overline{AB})$,

此時，內接四邊形為$f(A)$，為退化四邊形

(b1).$2\angle C>90^\circ$，由前討論知，此可省略

(b2)僅需考慮$\angle A<90^\circ$，$\angle B>90^\circ$，$\angle C \leq 90^\circ$，$\angle D<90^\circ$，請讀者自行討論之

（答案：min $f(P)=f(B)=\overline{B'B_2}$）

PART.C 正多邊形及其推廣

茲從正多邊形開始探討，解決了所有的情形後，再給予一種推廣。

（一）正n邊形

我們對n為偶數和n為奇數分別作討論，作法可參見PART.D

(a)n為偶數

如圖(3-3.1)，我們可由“正多邊形各內角相等”

得：$\angle A_{1,n-2}A_{2,n-3}A_{3,n-4}=\angle A_{2,n-3}A_{3,n-4}A_{4,n-5}=\cdots=\angle A_nA_1A'_2$

進而，$\overline{A_{1,n-2}A_{2,n-3}} // \overline{A_{3,n-4}A_{4,n-5}} // \cdots // \overline{A_{n-1}A_n} // \overline{A_1A_2}$

則對於任意內接n邊形$P_1P_2P_3\cdots P_n$

總有：$\overline{A_{1,n-2}P_{1,n-2}}=\overline{A_1P_1'}$，$\overline{A_{1,n-2}P_{1,n-2}} // \overline{A_1P_1'}$

$\therefore P_{1,n-2}P_1'A_1A_{1,n-2}$為$\square$，

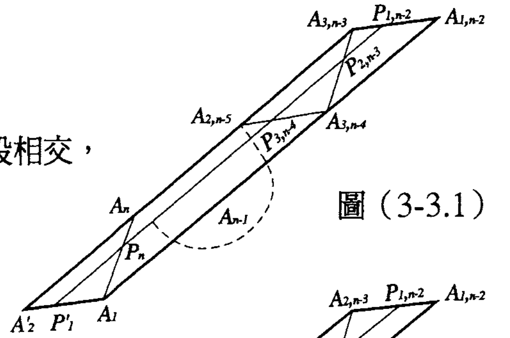
又$A_{1,n-2}A_1A_2'A_{2,n-3}$亦為$\square$

$\therefore \overline{P_{1,n-2}P_1'}=\overline{A_{1,n-2}A_1}=\overline{A_{2,n-3}A_2'}$，

此時，因$\overline{P_{1,n-2}P_1'}$所折線之每一線段相交，

則有：$\min f(P_1)=f(P_1)=\overline{P_{1,n-2}P_1'}$

$=\overline{A_{1,n-2}A_1}$



圖（3-3.1）

$(b)n$為奇數

如圖(3-3.3)，我們可說明

$\overline{P_{1,n-2}P_1'}$可和折線之各線段相交，

$\therefore f(P_1)=\overline{P_{1,n-2}P_1'}$

至於$\min f(P_1)$之值，

可據下引理得之。

引理：若$ABCD$為四邊形，

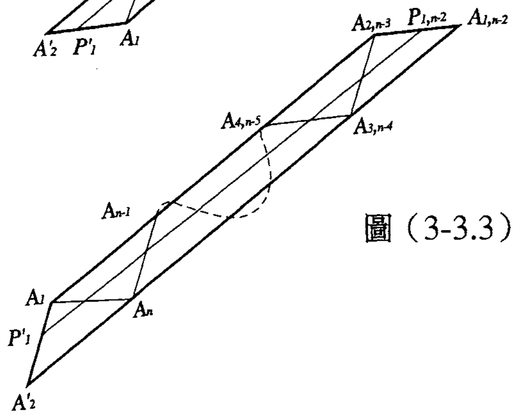
$\overline{AD} // \overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$

M, N 分別為$\overline{AB}$，$\overline{CD}$中點

E，F分別在$\overline{BM}$，$\overline{DN}$上，且$\overline{BE}=\overline{DF}$

連$\overline{MN}$，$\overline{EF}$

則$\overline{MN} \leqq \overline{EF}$



圖（3-3.3）

(二）推廣（如圖(3-3.7)）

我們可將解決正n邊形之方法應用於下，此情形可視為正n邊形之推廣：（設$A_1A_2\cdots A_n$為n邊形）

(1)$\overline{A_{1,n-2}A_{2,n-3}} // \overline{A_1A_2'}$，且$\overline{A_{1,n-2}A_1}$，$\overline{A_{2,n-3}A_2'}$不相交

(2)存在二點$A_{k,n-k-1}$，$A_{j,n-j-1}$（此二點可重合）

（$1 \leqq k$，$j \leqq n$，且$n-k-1$，$n-j-1 \leqq 0$時，略去不寫）

有下列情形：

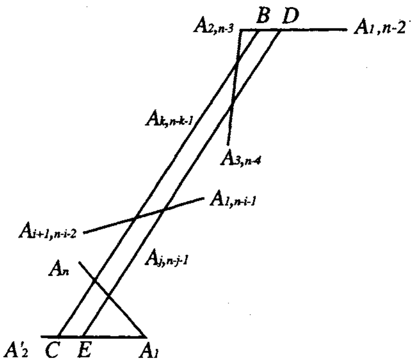
① 過$A_{k,n-k-1}$作$\overline{BC} // \overline{A_{2,n-3}A_2'}$交$\overline{A_{2,n-3}A_{1,n-3}}$於$B$，交$\overline{A_2'A_1}$於$C$（則$\overline{A_{2,n-3}B}=\overline{A_2'C}$）

② 過$A_{j,n-j-1}$作$\overline{DE} // \overline{BC}$交$\overline{A_{2,n-3}A_{1,n-2}}$於$D$，交$\overline{A_2'A_1}$於$E$（則$\overline{A_{2,n-3}D}=\overline{A_2'E}$）

③ $\overline{BC}$，$\overline{DE}$分別和折線之各線段均相交

則我們有：$\min f(P_1)=\overline{BC}=\overline{DE}$

對於$P_{1,n-2}$在$\overline{BD}$上，我們也有：



圖（3-3.7）

$\min f(P_1)=\overline{P_{1,n-2}P_1'}=f(P_{1,n-2})$

註：(1)，(2)同時成立時，則$n=2k$（$k\in N,k\geqq 2$）

且$\angle A_1+\angle A_3+\cdots+\angle A_{2k-1}=\angle A_2+\angle A_4+\cdots+\angle A_{2k}$

此可由PART.D得到

PART.D 凸多邊形

討論完成四邊形後便可進行多邊形的討論，如圖(3-4.1)，設$A_1A_2A_3\cdots A_n$為凸多邊形，($n\geqq 5$)，$P_1P_2P_3\cdots P_n$為任意內接（凸多邊形）後採下作法：

(1)作$\overline{A_1A_2}$對$\overline{A_nA_1}$，$\overline{A_2A_3}$之對稱圖形$\overline{A_1A'_2}$，$\overline{A_{1,1}A_2}$

(2)作折線$A_{1,1}A_2A_3$對$\overline{A_3A_4}$之對稱折線$A_{1,2}A_{2,1}A_3$

(3)對於折線$A_{1,i-2}A_{2,i-3}\cdots A_{i-2,1}A_{i-1}A_i$ ($i=4\sim n-1$)

作它對$\overline{A_iA_{i+1}}$之對稱折線$A_{1,i-1}A_{2,i-2}\cdots A_{i-1,1}A_i$

並設P_i連續鏡射j次所之點為$P_{i,j}$（$1\leqq i$，$j\leqq n-2$）

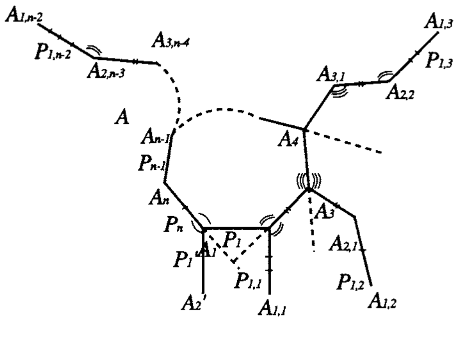
對於折線$A_{1,n-2}A_{2,n-3}\cdots A_{n-1}A_nA_1A_2'$，由對稱性知：

(1) $\angle A_{i,n-i-1}A_{i+1,n-i-2}A_{i+2,n-i-3}=\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}(1\leqq i\leqq n-3)$

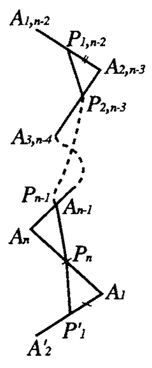
$\angle A_nA_1A_2'=A_nA_1A_2$（均指小於180°的角）

(2) $\overline{A_{i,n-i-1}A_{i+1,n-i-2}}=\overline{A_iA_{i+1}}$ ($1\leqq i\leqq n-2$) , $\overline{A_1A_2'}=\overline{A_1A_2}$

$\overline{P_{i,n-i-1}P_{i+1,n-i-2}}=\overline{P_iP_{i+1}}$ ($1\leqq i\leqq n-2$) , $\overline{P_nP_1'}=\overline{P_nP_1}$



圖（3-4.1）



圖（3-4.2）

如圖(3-4.2)，為折線$A_{1,n-2}A_{2,n-3}\cdots A_{n-1}A_nA_1A_2'$之放大圖，為求$n$邊形$P_1P_2P_3\cdots P_n$之周長最小值，則僅需求折線$P_{1,n-2}P_{2,n-3}P_{3,n-4}\cdots P_{n-1}P_nP_1'$之最小長度即可

且在當中：$\overline{P_{1,n-2}A_{1,n-2}}=\overline{P_1A_1}=\overline{P_1'A_1}$

PART.E 改變定義（一）的研究

完成了PART.D後二天，我赫然發現：

在第廿九屆全國科展專輯中，高中組第三名的研究題目為“n邊形內具有最小周長的內接n邊形”。乍看之下研究的問題似乎是相同的，但在看過其內容後，我發現：那件作品所討論的“內接n邊形”是指“不退化的n邊形”，和本研究的定義稍微不同，因此他們的研究範圍就小了很多。而且其研究方向與本研究之研究方向也有所不同。

在看完研究過程後，我對作品的部分內容有些疑問，我不禁思考：本研究PART.D 處所發展出作法是否可圓滿的說明“多邊形”的問題呢? 底下即為我的研究……

新定義：在定義（一）的內接n邊形的條件後，增添一句話：“…B_1，B_2…B_n中任二點不重合，（且任三點不共線）”，如此討論所得之內接最小周長n邊形必不退化。

（一）若$P_1P_2P_3\cdots P_n$為$A_1A_2\cdots A_n$之內接最小周長n邊形則$P_{1,n-2}P_{2,n-3}\cdots P_{n-2,1}P_{n-1}P_nP_1'$共線。

（二）在新定義下，$\overline{A_{1,n-2}A_{2k-1,n-2k}}$，$\overline{A_{2,n-3}A_{2l,n-1-2l}}$ $(k,1\in N)$ 不相交，（若內接最小周長四邊形存在）。

（三）為n偶數，若內最小周長n邊形存在，$\overline{A_{1,n-2}A_{2,n-3}}//\overline{A_1A_2'}$

（四）在PART.C 正多邊形之推廣部分，若附加條件：$A_{j,n-i}$ 不$\overline{BC}$ 在上，那麼可說：此推廣即為“凸$2k$邊形具有內接最小周長之$2k$邊形（$k\in N$）”的充要條件。

（五）對於n為偶數，我們已有了完美解答（包括“存在性”的充要條件、作法、範圍、解的個數）對於n為奇數，我們也有底下結果：

(1)內接“最小周長n邊形”若存在，則必唯一。

(2)設min$\overline{P_{1,n-2}P_1'}$表$\overline{P_{1,n-2}P_1'}$之最小長度之線段，則“min$\overline{P_{1,n-2}P_1'}$和折線各段相交，且交點異於端點”的充要條件為“內接最小周長n邊形存在”。

四、結論

（一）三角形：

(1)若為銳角△，則內接最小△周長為垂足△。

(2)若為直角△或鈍角△，則內接最小周長△為最大邊所對之高的二倍長，為退化△。

（二）四邊形：

(1)若為矩形，則內接最小周長四邊形為一平行四邊形，此▱之二組對邊分別平行矩形之對角線，且對周長上任一點，均可作出內接最小四邊形

(2)若為平行四邊形，則內接最小周長四邊形為短對角線二倍長，為退化四邊形。

(3)對於任意四邊形，均可適用下結果：

① 若四邊形內接於一圓（二對角互補）

(i)內接最小周長四邊形有無限多個，包括二組退化四邊形，各退化四邊形之二頂點必重合於某一"非銳角"的角之頂點處，且對於以"二非銳角"的角之頂點為端點之邊上任一點，均可作內接最小四邊形。

或(ii)內接最小周長四邊形僅一個，則四邊形退化成△，且此△有二頂點分別位於原四邊形之二鈍角處。

② 若四邊形之二對角均不互補，則內接最小周長之四邊形必唯一且退化，且退化四邊形之二頂點必落於某一鈍角之頂點處，且此鈍角和其對角和大於180°。

（三）正n邊形：（$n \in N, n \geqq 3$）

(1)對於正n邊形，內接最小周長多邊形的周長為$na \cos \frac{180^\circ}{n}$（$a$為原正$n$邊形邊長），且依序連接原正多邊形之中點所成之正$n$邊形必為一組內接最小周長多邊形。

(2)對於正n邊形

① 若n為奇數，則內接最小周長n邊形是唯一的，即依序取各邊中點形成之（正）多邊形

② 若n為偶數，則內接最小周長n邊形有無限多組，包括二組退化多邊形（即"隔點相連所成之多邊形"）。且對於在周長上任一點，均可作出內接最小周長多邊形

（四）改變定義（一）後的討論：設$A_1A_2 \cdots A_n$為凸n邊形

(1)"n為偶數且內接最小周長之n邊形存在"的"充要條件"可見前文，且內接最小周長之n邊形有無限多個，範圍可以本研究介紹之作法得之

（必要條件可表為$\angle A_1+\angle A_3+\cdots+\angle A_{n-1}=\angle A_2+\angle A_4+\cdots+\angle A_n$）

(2)n為奇數，若其最小周長之n邊形存在則必唯一"存在性"之充要條件可見前文，而必要條件可簡單表示為：

（規定$p>n$時，A_p表A_{p-n}，）

$(p=i+1, i+2, \cdots, i+n-1)$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$

$$0^\circ<\angle A_i+(\angle A_{i+1}+\angle A_{i+2}+\cdots+\angle A_{i+n-2})-(\angle A_{i+2}+\angle A_{i+4}+\cdots+\angle A_{i+n-1})<180^\circ$$

五、展望

對於一般多邊形內接凸多邊形（包括退化情形），我們尚未完全討論出來，希望以後能繼續研究並加以完備，也歡迎更多高明讀者加入研究行列。要完整的解決此一問題，可能得先提出一類似預備定理（四）之預備定理為基礎，且此預備定理之結果應可蘊含預備定理（四）。又限於篇幅，許多推導過程均省略，欲知細節，歡迎和作者聯絡。

六、參考資料

(1)國民中學選修課本上、下冊。

(2)高級中學基礎數學第一冊第三章。

(3)高級中學基礎數學第二冊第二章，第三章。

(4)數學家的眼光（張景中著，凡異出版社出版）。

(5)第廿九屆科展專輯——高中組數學科第三名作品。

評語

本件作品，能將鏡射問題，經過嚴密的思考，而導一連串的結果，不論是學生的反應及作品之結果皆為上上之選，是件不可多得之作品。