從畢氏定理談起

國中組數學科第一名

高雄縣立鳳山國民中學

作　　者：朱浩瑋

指導教師：杜鴻祥、谷瓊瓊

一、研究動機

有一次上數學課，老師告訴我們：「費馬最後猜想已經在最近一、兩年來獲得圓滿的解決：無解。」它引發了我的興趣。我想：若換個形式，是不是有解，，或是出現其他情況? 這個構想，使我展開了一連串的研究路程。

二、研究目的

改變$x^2+y^2=z^2$的係數及未知數形式；比較它的解和畢氏定理的解之間有什麼相同和不同之處?

三、研究內容

（一）$x^2+y^2=nxy$是否有解?

（二）$x^2+y^2=nz^2$是否有解?

（三）$x^2+y^2+z^2=nxyz$是否有解?

（四）$x^2-y^2=nz^2$是否有解?

（五）$x^2+y^2=nz^3$是否有解?

四、研究過程

（一）$x^2+y^2=nxy$是否有解?

經移項得$\therefore x=\dfrac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}y$

(1) $\sqrt{n^2-4}$為非負整數：

設$n^2-4=k^2$，k為非負整數 則$n\geqq 2$，or $n\leqq -2$

① 若$n\geqq 2$　$\therefore k$，2，n是直角三角形三邊長

以畢氏數組（l^2+m^2，$2lm$，l^2-m^2）而言，k只能等於0。

② 若$n\leqq -2$，亦同

故n只能等於± 2　$\therefore n=\pm 2$，$x=y$

(2) $\sqrt{n^2-4}$ 為無理數：

x必不是y的有理數倍，故只能$x=0, y=0$

故$n=\pm 2$, $x=\pm y$，有無限多組解，其他時候只有(0,0)

（二）$x^2+y^2=nz^2$是否有解?

(1)先代入幾個值試試看：

① $n=2$。只要$x=y=z$便有解而且解是無限多個。

② $n=3$。

設有z值最小的非負整數解（x_0，y_0，z_0） $x_0^2+y_0^2=3z_0^2$

$\therefore$ x_0，y_0皆為3之倍數，設$x_0=3x_1$，$y_0=3y_1$

可得z_0亦為3之倍數，設$z_0=3z_1$。

$\therefore$ $x_1^2+y_1^2=3z_1^2$，因還能找到一組x_1，y_1，z_1滿足條件且$z_1\leqq z_0$，也就是只有(0，0，0)這組解

③ $n=4$。

只要任意找一組畢氏數組（x，y，z），再使$x_0=2x$，$y_0=2y$，

所以，是無限多組解的。

④ $n=5$。$\therefore$設$x=2t$，$y=t$，$z=t$，故有無限多組解。

$\therefore$當n是一個完全平方數或兩個完全平方數和便能成立。

(2)驗證一般化

【預備定理】任意奇質數若能表為$4n+1$的形式，便能表為兩完全平方數之和，若是$4n+3$的形式，則必不能表為兩完全平方數之和參閱九章出版社「費馬猜想」P9~P14。

① $n=k^2$，$k\in N$。　∵畢氏數組有無限多組，故有無限多組解。

② $n=l^2+m^2$　l、$m\in N$。　設$x=lt, y=mt, z=t$ 故有無限多組解。

由上面可知，只要n是完全平方數或兩完全平方數之和，則原式必成立。

③ $n=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}$，$p_1<p_2<\cdots<p_k$ 為質數，q_1，q_2，$\cdots q_k\in N$，

且n無法化為k^2或l^2+m^2的形式。

∵x^2，y^2，z^2 除以$p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}$之餘數，與 x^2，y^2，z^2 除以$p_1^{q_1}$（或 $p_2^{q_2}$ …）的餘數，兩個餘數之間存在某種關係：

亦即前者再除以$p_1^{q_1}$（或 $p_2^{q_2}$…）後所得的餘數必為後者的一種，這是可以證明的。

【證明】設$x^2\div p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}=a\cdots b$，$x^2\div p_1^{q_1}=c\cdots d$，則

$$x^2=ap_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}+b=cp_1^{q_1}+d\ ，$$

假如$p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}=ep_1^{q_1}$，則

$b=(c-ae)\,p_1^{q_1}+d$，符合，∴得證。

∴在$x^2+y^2=p_1^{q_1}z^2$，$x^2+y^2=p_2^{q_2}z^2$，…，$x^2+y^2=p_k^{q_k}z^2$ 這些方程式中，只要一個無解，原式便無解。

因此，必須判定是否有解，全看p_1，p_2，…, p_k時是否有解。

故我們可以判斷一些值是否有自然數解。如：

$n=6=2\times3$，∵$n=3$不成立，所以不成立。

假如是合數時，以其因數中，質數的乘方代入即可。

④ $n=p^q$，q為奇數，p為質數。

【證明】假如n可以化為一平方數k^2或兩平方數l^2+m^2的和，

(1)$p=l^2+m^2$，l、m為非負整數：

設$q=2t+1$，∴$p^q=(lp^t)^2+(mp^t)^2$是兩完全平方數和。

(2)n不為完全平方數，也非兩完全平方數之和：

假如n是質數，由預備定理知必是$4n+3$的形式。

$(4u+3)^q=(4u+3)(4u+3)^{2t+1}=4r+3$也不能分為兩完全平方數的和。故亦不能。

因為在$n=4k+1$，且為質數時，由預備定理，必定可以化為兩完全平方數的和。

因此，我們需要探討的只剩下$n=4k+3$且為質數的情形。

⑤ $n=4k+3$且n為質數。

【證明】只需證明n無法化為兩完全平方數之和即可。

$z=1$時不成立。

(1)z為偶數時；z^2為4之倍數，x, y，亦為偶數。

此情況與z取一半之值是重複的，故省略。

(2)z為奇數時，設$z=2t+1$，

$(2t+1)^2(4k+3)=16t^2k+16tk+4k+12t^2+12t+3$，

故可知是不成立。

現在，$n=4k+3$時已得證，再回到③ $n=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_k^{q_k}$ $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 為質數，q_1，q_2，…，$q_k\in N$，看看n為合數時，是否n若無法表為k^2或l^2+m^2的形式即無自然數解即可。

因為兩個數若都能表為l^2+m^2的形式，則其乘積亦可表為兩完全平方和。

因此，我們可以知道，若一合數的所有因數皆能表為l^2+m^2的形式，則

可知此合數為兩完全平方的和，且只可能如此。故一合數只要不能表為k^2、l^2+m^2這兩種形式，便只有(0,0,0)。

（三）$x^2+y^2+z^2=nxyz$是否有解?

(1)先取幾個n值試試看?

①$n=1$：這有解。且所有的x，y，z皆需為3的倍數

(a) x，y，z中有一者為$3l\pm1$：

左式$=3k+1$，右式$=3k'$，∴不合

(b)有兩個為$3l\pm1$：

左式$=3k+2$，右式$=3k'$，∴不合

(c)皆為$3l\pm1$：

左式$=3k$，右式$=3k'\pm1$，∴不合

②$n=2$：

這是無解的。凡異出版社的「抽屜原則及其他」中有提過，以同樣的方法可以證明$n=2^k$都無解。

另外，我也發現了另一種證法。

【證明】$x^2-xyz+y^2+z^2=0$ 得 $z=xy\pm\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2}$

$\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2}$ 必須為整數，分三種討論。

(a)x，y皆為奇數或x，y為一奇數，一偶數時

$(xy)^2-x^2-y^2$皆為$4k+3$的形式，不可能為一個完全平方數

(b)x，y皆為偶數：

若把x，y一直除以2，直至其中至少有一個不為2的倍數，就會出現(a)的形式。

綜合(a)(b)，可知只有(0,0,0)一解。

③$n=3$：

這有解，且解與$n=1$之解關連極大：

若（x，y，z）為$x^2+y^2+z^2=xyz$之解

則（$\frac{x}{3}$，$\frac{y}{3}$，$\frac{z}{3}$）為$x^2+y^2+z^2=3xyz$之解。

∵$x^2+y^2+z^2=xyz$有x，y，z皆為3的倍數之解，故有解。

首先，(0,0,0)(1,1,1)為一眼便可看出的兩組解。

經移項得$z^2-3xyz+x^2+y^2=0$，$z=\dfrac{3xy\pm\sqrt{9x^2y^2-4x^2-4y^2}}{2}$

若$(a，b，c)$是一組解，且$c=\dfrac{3ab-\sqrt{9a^2b^2-4a^2-4b^2}}{2}$，

而固定x，y則z有兩種可能c,c'。

另一種可能是$c'=\dfrac{3ab+\sqrt{9a^2b^2-4a^2-4b^2}}{2}=\dfrac{3ab+3ab-2c}{2}=3ab-c$。

因此$(x，y，z)$若為一解，$(x,y,3xy-z)(x,3xz-y,z)(3yz-x,y,z)$皆為解。

$$
\begin{array}{c}
(1,1,1)\\
\downarrow\\
(1,1,2)\\
\downarrow\\
(1,2,5)\\
\swarrow \qquad \searrow\\
(1,5,13) \qquad (2,5,29)\\
\swarrow \quad \searrow \qquad \swarrow \quad \searrow\\
(1,13,34)(5,13,194)(2,29,169)(5,29,433)\\
\vdots
\end{array}
$$

故以(1,1,1)為基礎，便可得到一連串的解如上圖：

但以上的解是否能窮盡所有的解? 我們便來驗證它。

在前面的討論中，若$(x，y，z)$，$0\leqq x\leqq y\leqq z$為一解，則$(x,y,3xy-z)(x,3xz-y,z)(3yz-x,y,z)$皆為解。

但在我們所畫的圖中，應該可引出三組解的，卻只有兩組，觀察得知，原來$(x,y,3xy-z)$便是(x, y, z)的前一組解，即是指任兩組解可以互推。因為假如以z的二次方程$z=\dfrac{3xy\pm\sqrt{9x^2y^2-4x^2-4y^2}}{2}$，而$3xy-z$只會讓負改正，正改負而已。

意即$(x,y,3xy-z)$再操作一次變成$(x,y,3xy-3xy+z)$，也就是(x, y, z)，證明了其可逆性，因此可以知道，一組解一定可以回復至其前一部分的形式，如此一直回復下去，必回到(1,1,1)。

因此便證明了這張表格窮盡所有的解。

④$n=5$:

這是無解的。

x^2，y^2，z^2必為$5t$、$5t+1$或$5t+4$。但右式須為5的倍數，所以x^2，y^2，z^2除以5的餘數只有下列兩種可能：

(a)餘0,0,0：

設$x=5t$，$y=5u$，$z=5v$　$\therefore t^2+u^2+v^2=25tuv$

同理可證t，u，v亦為5的倍數；x^2，y^2，z^2為，5^2，5^3，$5^4\cdots$之倍數亦即只有(0,0,0)之解。

(b)餘0,1,4：

設$x=5t$，$t\in N$，$y^2-25tzy+z^2+25t^2=0$

因此$D=625t^2z^2-4z^2-100t^2$必須為完全平方數。

設$625t^2z^2-4z^2-100t^2=a^2$，$(25tz)^2=(2z)^2+(10t)^2+a^2$

$t=1$，$(625-4)z^2=621z^2$不可能表為兩完全平方數的和。

t為任意數時，$625t^2z^2-4z^2=(625t^2-4)z^2$

設$625t^2-4=k^2$ $(k\in N)$，則2，k，$25t$為直角三角形三邊長。

由畢氏數組$(m^2-n^2$，$2mn$，$m^2+n^2)$知不可能出現。y無整數解。

綜合前面(a)(b)，知只有(0,0,0)之解。

⑤$n=6$：

x^2，y^2，z^2除以6以後餘數有下列三種：

(a)0,0,0：

證法同前，只有在$(x,y,z)=(0,0,0)$才成立

(b)0,3,3：設$x=6t$，$y=6u+3$，$z=6v+3$。

左式$=36k+18$，右式$=36k'$，不合。

(c)餘1,1,4：設$x=6t\pm1$，$y=6u\pm1$，$z=6v\pm2$。

左式$=36k\pm12t\pm12u\pm24v+6$而右式$=36k'+12$

$\therefore$除以6以後的商數，左式必為奇數，右式必為偶數，

$\therefore$矛盾不合，無解。

綜合(a)(b)(c)，可知只有(0,0,0)解。

(2)驗證一般化 $n=k,k\in N$:

由$n=3$時的推論，$\forall n\in N$的一組解(x,y,z)，皆能滿足：

$\left(\frac{nx}{3},\frac{ny}{3},\frac{nz}{3}\right)$為$x^2+y^2+z^2=3xyz$的一解，

其他的n值的解都可以由$x^2+y^2+z^2=3xyz$得到。

欲知$x^2+y^2+z^2=kxyz$是否有整數解，從$x^2+y^2+z^2=3xyz$的整數解裡看看有無x,y,z皆為k的倍數即可。

但仍有一種特殊情況：當三者之中存在有一值為$\frac{ak}{3}$的形式時，$\frac{ak}{3}\cdot\frac{3}{k}$

$=a$也是整數，故先討論是否有這種情形。

設 $(x,y,z)=(\frac{ak}{3},\frac{bk}{3},\frac{ck}{3})$ 。

(ak,bk,ck)是$x^2+y^2+z^2=xyz$的一解。

因此，我們便須知道，是否ak,bk,ck皆需為3之倍數。

而最前面n=1時，已經證出了皆需為3之倍數，故只有x，y，z皆為整數的形式。

因此，我們可以一一推出，$x^2+y^2+z^2=xyz$的解有(3,3,3)(3,3,6)(3,6,15)(3,15,39)(6,15,87)…等。

現在，以(1,1,1)為基礎，用數學歸納法證明：

每一組解，最大公因數皆為1。

首先，對於(1,1,1)(1,1,2)(1,2,5)，皆成立。

假設對於任意一組解 (x,y,z) ，三數互質，

$\therefore 3xy-z$和x互質且$3xy-z$和y也互質。

因此$x^2+y^2+z^2=3xyz$所有的解都互質。

同乘 $\frac{3}{k}$ 以後，x，y，z不可能同為整數，因此得到結論：

$x^2+y^2+z^2=nxyz$除了n=1,3時有無限多組解以外，其餘的都只有(0,0,0)一解。

（四）$x^2-y^2=nz^2$是否有解?

假如n=1，得$x^2=y^2+z^2$又是畢氏定理。

(1)n=2:

若以$x+y=2z$，$x-y=z$，則$x:y:z=3:1:2$表示這有無限多組解。

證明一般化的情形：

(2)$n\in N$，n為任意數：

$(x+y)(x-y)=nz^2$，可設一有理數a，且$a>\frac{a}{n}$。

設$x+y=az$ ，$x-y=\frac{n}{a}z$：解得 $x=\frac{a^2+n}{2a}z$，$y=\frac{a^2-n}{2a}z$

因此一定可以找到無限多組滿足條件的自然數解。即

$(\frac{a^2+n}{2a}z,\frac{a^2-n}{2a}z,z)$，$a$為有理數$a>\frac{a}{n}$，$n\in N$

（五）$x^2+y^2=nz^3$是否有解?

(1)先取幾個n值試試看：

原式改為$x^2+y^2=(nz)z^2$

①$n=1$:

由前面得$x^2+y^2=z\cdot z^2$，因此可以由$x^2+y^2=nz^2$時的公式得知：只有在z為完全平方數或兩完全平方數的和時，才可能會有解。但因為z值已經確定，因此解不會是無限多個。

(a)z為一完全平方數：

因為z的值已經固定，設$z=t^2$，$(0,t^3,t^2)$即是一解。

(b)z為兩完全平方數之和：

可設$z=l^2+m^2$，求出兩個通解：

$(x，y，z)=(0,t^3,t^2)$和$(x，y，z)=(l(l^2+m^2),m(l^2+m^2),l^2+m^2)$

②$n=2$:

2是兩完全平方數的和，而因為$x^2+y^2=(2z)z^2$。

(a)z為兩完全平方數之和：

$z=l^2+m^2$，故$x=(l+m)(l^2+m^2)$，$y=(l-m)(l^2+m^2)$便有解。

(b)2為一完全平方數之一半：

設$z=\dfrac{k^2}{2}$，則（0，$\dfrac{k^3}{2}$，$\dfrac{k^2}{2}$）為一解，便得到所有的解。

因為$(0,t^3,t^2)$為$x^2+y^2=z^3$的通解之一，∴（0，$\dfrac{t^3}{2}$，$\dfrac{t^2}{2}$），t為偶數為$x^2+y^2=2z^3$的通解之一，因此若$(x'，y'，z')$為$x^2+y^2=z^3$的解，則（$\dfrac{x'}{2}$ ，$\dfrac{y'}{2}$ ，$\dfrac{z'}{2}$）為$x^2+y^2=2z^3$的解。同樣把2改成n也可得一樣的現象：$(\dfrac{x'^2}{n})^2+(\dfrac{y'^2}{n})^2=\dfrac{x'^2+y'^2}{n^2}=\dfrac{z'^3}{n^2}=n(\dfrac{z'}{n^2})^3$

(2)驗證一般化$n=k$，$k\in N$：

兩數相乘，假如有一數不能表為兩完全平方數之和，則其積亦不可能表為兩完全平方數之和。

故分成兩種情形來討論：

① n不是完全平方數也不是兩完全平方數的和：

但當$z=\dfrac{k^2}{2}$時，nz可以是一完全平方數，故（0，$\dfrac{k^3}{2}$，$\dfrac{k^2}{2}$）為通解。

②n是兩個完全平方數之和：

若z為一完全平方數或兩完全平方數的和。

(a)z為兩完全平方數之和：

設$n=a^2+b^2$，$z=r^2+t^2$，

則$((ar+bt)(r^2+t^2)$，$(at-br)(r^2+t^2)$，$r^2+t^2)$便是一個通解。

(b)z為一完全平方數：

設$z=r^2$。又得到一組通解$(x，y，z)=(ar^3,br^3,r^2)$

③n為一完全平方數：

(a)z為一完全平方數：設$z=r^2$，$n=a^2$，得通解$(0,ar^3,r^2)$

(b)z為兩完全平方數的和：

設$z=r^2+t^2$，$n+a^2$，可得到通解$(ra(r^2+t^2)$，$ta(r^2+t^2)$，$r^2+t^2)$

因此便可以立下結論：

在$x^2+y^2=nz^3$中，對於每一個n值，$(x，y，z)$必定都有無限多組解。

如上述討論。

五、結論

（一）在$x^2+y^2=nxy$中，只有$n=\pm2,x=\pm y$才有無限多組解，其他時候只有$(0,0)$。

（二）在$x^2+y^2=nz^2$中，解可分為3種情況：

(1)n為一完全平方數：只要畢氏數組$(x，y，z)$，則（$\sqrt{n}x$，$\sqrt{n}y$ ， z）即為其解，所以有無限多組解。

(2)$n=l^2+m^2$為兩完全平方數的和：只要$x=lt$，$y=mt$，$z=t$，$t\in N$，即有解，故是無限多組解。

(3)n不是完全平方數也不是兩完全平方數的和：只有$(0,0,0)$一解。

（三）在$x^2+y^2+z^2=nxyz$中，有兩種情形：

(1)$n=1,3$：這有無限多組解。且$x^2+y^2+z^2=3xyz$的解從$(1,1,1)$起有一個規律：如前文所述。

而$n=1$時的解，只要把$n=3$時的解全部乘以3即可得出解。

(2)$n\neq1,3$的情形，只有$(0,0,0)$之解。

（四）在$x^2-y^2=nz^2$中，不管n是多少，必定都有無限多組解。而且解的形式可有無限多種。

即（$\frac{a^2+n}{2a}z$，$\frac{a^2-n}{2a}z$，z），a為有理數，$a>\frac{a}{n}$，$n\in N$。

（五）在$x^2-y^2=nz^3$中，對於每一個n值，都有無限多組解。

(1)n不為一完全平方數或兩完全平方數的和：

有一種通解，為（0，$\frac{t^3}{n}$，$\frac{t^2}{n}$）(但t為n之倍數）。

(2)n為兩完全平方數之和：設$n=a^2+b^2$。

它除了結論(1)中的通解之外，尚有兩種通解：

$((ar+bt)(r^2+t^2)$，$(at-br)(r^2+t^2)$，$r^2+t^2)$和(ar^3,br^3,r^2)。

(3)n為一完全平方數a^2：

它也是除了結論(1)所提到的通解外，另有兩種情形。

分別為：$(0,ar^3,r^2)$和$(ra(r^2+t^2)$，$ta(r^2+t^2)$，$r^2+t^2)$。

六、討論

（一）在$x^2+y^2=nz^2$的部份，若式中有無限多組解時，都已經找出了無限多組的解，但是究竟是否已經窮盡了所有的解？假如沒有，漏掉的解是否亦是無限多？有無規律？仍然有待研究。

（二）對於三次或以上的方程，還可以再研究，推廣到更高次。

（三）在$x^2+y^2+z^2=nxyz$中，可推廣到$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=nx_1x_2\cdots x_k$。

（四）在$x^2+y^2=nz^2$、$x^2-y^2=nz^2$中，也一樣可以加以推廣到$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=ay^2$的形式。

七、參考書目

（一）不定方程　九、無窮遞降法　單墫、余紅兵著　凡異出版社

（二）世界數學名題欣賞叢書一(9)費馬猜想　一-2；二-4 姚玉強編　九章出版社

（三）科學教育月刊　178期　對畢氏三元數的一番探討　黃敏晃　台灣師大科教中心

（四）高中數學資優生輔導教材研究　一-五　台灣師大科教中心編

（五）數學導引輯⑩——抽屜原則與其他　常庚哲著　凡異出版社

評語

研究主題為當前數論上熱門問題，內容頗具見解，分析能力頗佳，數學能力已達高中二年級之水準，頗值造就培養。