

小而美，小而省——樹狀四方分割法之碎形影像壓縮

高中組應用科學科第二名

台北市立建國高級中學

作者：陳東傑、巫厚聰

指導指師：劉汝平

一、研究動機

我們一直對於資訊軟體有著濃厚的興趣。在這樣一個資訊爆炸的時代中，資料壓縮已經成為了非常重要的課題，而我們發現影像壓縮還有進步的空間。另一方面，在高一下學期因為閱讀混沌(1)一書而首次接觸到了混沌科學。由於這方面的興趣，使我們得知可以利用碎形原理來作影像壓縮，可是文獻上對於如何實際操作還是語焉不詳。所以我們想在這次研究計劃中，結合碎形理論與現有資訊科學，嘗試來作碎形影像壓縮。

二、研究目的

碎形影像壓縮的優勢，雖然在理論上已有多人探討，但是坊間可見的實用軟體多屬支離破碎、或效率甚低。此次研究的主要目的就是要探討碎形影像壓縮之樹狀四方分割法，並幾經試驗、計算數據後，嘗試為個人電腦發展出一套最有效率的碎形影像壓縮軟體，希望在這探討過程中學習軟體開發的技術，並讓大家能夠一同享用到這套獨到的影像壓縮方法。

三、文獻探討

(一) 碎形 (Fractals)

早在十九世紀末和二十世紀初，就已經有幾位數學家率先突破巢臼，挑戰幾何學中向來單純的體積、面積、長度之極限以及整數維度。這些學者¹都是以獨特的幾何模型去探討一個極吸引他們的全新數學領域，而這個領域就是我們現在所說的「碎形幾何學」及其延伸出的學問。一直到本世紀六十年代，B.Mandelbrot承襲、統整了先人的成果，正式提出「碎形」(fractals)一詞，並極力宣揚碎形幾何學，才學界間逐漸獲得了認同。如今碎形的研究雖然仍是一門新興的學問，但其發展迅速、已經成為學界中極受矚目的研究領域了。

¹ Cantor, Peano, Hilbert, Koch, Julia, Hausdorff, Menger等學者，詳見[2][7]。

碎形研究的範圍相當廣泛，我們在這邊只討論和碎形影像壓縮相關的部分。碎形很難以明確定義，但是我們可藉由其擁有的特性來作以下討論：

1. 碎形是自我擬似的。

碎形是由無數個相似的元件所構成，故在任意尺度下，均會呈現相同的影像，稱之為自我擬似(self-similar)。

2. 碎形可以用一簡單演算式來表示。

自我擬似性可以用影像的重複縮放、翻轉、傾斜等變換來表示，這些變換又可歸納成數學式子。以這些式子來表示碎形，就是將其轉變成「迭代函式系統」(IFS:Iterated Function System)。

(二) 影像壓縮 (Image Compression)

影像資料非常龐大、動輒達到數百萬位元，直接儲存如此大筆的資料很不符實際需求，於是減少儲存空間的影像壓縮就成了勢在必行的解決之道。在發展影像壓縮之初，先有人直接應用「無失真資料壓縮」來處理影像資料，但仍需要相當大的儲存空間。隨後有人提出「允許失真的影像壓縮」，因為視覺上可接受部分的失真、而資料卻不能有任何失真；這種方法雖然比無失真的壓縮法使用較少的儲存空間，但仍面臨相當的極限。在尋求突破的過程中，碎形影像壓縮法就成了一個大家重視的新方向。

(三) 碎形影像壓縮 (Fractal Image Compression)

研究碎形的學者發現週遭的影像都和碎形有關聯。就碎形的兩項特性而言，自我擬似性點出影像內部的關聯性，演算式能把紀錄影像所需的資料減少，所以利用這些特性來處理影像壓縮，就會有相當良好的功效。原本記錄構成一個碎形影像的千萬個像素(pixel)，需要用大量空間，但採用演算式來表示之後，記錄所需空間竟可縮減到數十位元。

為利用上述兩個特性，就必須採取特定的方法分割影像。我們研究後發現每個影像中都有許多部分相當相似，可以經由翻轉、放大或縮小，找出影像中各區塊之間的相似關聯性。若是從圖上多剪幾塊下來做互相比對，就是在執行碎形影像壓縮中所稱的「定義域(Domain)—值域(Range)比對」了。定義域區塊就是被剪下拿來和影像比對的區塊，值域區塊就是影像中的其他區塊。我們將每一個定義域區塊轉換，企圖把它變換得類似原圖上想要貼蓋住的值域區塊，利用這樣一個過程，就可以找出影像的自我擬似性，並記錄它的演算式。

碎形影像壓縮的理論雖已為人所知，但如何落實作成一個有效率的實用軟體，仍面臨許多值得探討的問題。最主的問題在於如何取得壓縮效率與影像品質之間的平衡，或依需要作某種取捨。與這個問題相關的就是要找出控制壓縮過程

的主要變因，以便分析如何經由這些變因，來取得壓縮效率與影像品質之間的平衡。

四、研究設備及器材

電腦硬體：CPU-Pentium 200。

電腦軟體：Turbo C++3.0。

五、研究過程及方法

(一) 名詞解說

1. 均方根誤差 (RMSE：Root Mean Square Error)

當我們做「定義域—值域比對」時，必須判斷我們的定義域區塊到底和值域區塊有多相像，我們發現「均方根量尺」適用於計算區塊間的差異。已知有兩個由 $n \times n$ 個像素所構成的區塊 a_{ij} 、 b_{ij} 。則二者之間的均方根誤差可由以下的式子計算。

$$RMSE = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2}$$

2. 尖峰訊號雜訊比 (PSNR：Peak Signal-to-Noise Ratio)

尖峰訊號雜訊比是用來表示兩個影像之間的相似程度，使用相當普遍。PSNR是以分貝 (dB) 為單位。在下式中， b 是該訊息的可能最大值 (通常電腦中灰階的最大值是255)。尖峰雜訊比越高，表示品質越好。

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{b}{RMSE} \right)$$

3. 壓縮比 (Compression Ratio)

我們以此判斷壓縮的程度。其中，我們做壓縮前後之比較時會捨去不必要的資料 (例如檔頭資訊)，只比較影像本身所佔的容量，壓縮比可用下式表示。

$$\text{壓縮比} = \frac{\text{初始檔案大小}}{\text{壓縮後檔案大小}}$$

(二) 樹狀四方分割法 (Quadtree partition method)

影像的分割是碎形影像壓縮的關鍵所在。我們試圖利用特定的方式將影像分割成若干具有相似性的區塊，進而利用定義域區塊的變換來表示整個影像的所有區塊。此次研究我們所要討論的是「樹狀四方分割法」。

就如其名，這種分割方式是將整個影像分成一個個正方形的值域區塊，而這

些正方區塊又可逐層逐級的以同樣方式再分割下去。在進行值域—定義域比對時，若比對的結果超出了誤差容忍度，我們就可遵循「樹狀四分法」將該值域區塊再分割成四個方塊，將比對的步驟推到下一個層級進行。

(三) 樹狀四方分割法之基本流程

1. 決定壓縮後的影像與原始影像間可容忍的差異度。
2. 當壓縮後的影像與原始影像間的差異大於容忍度時：
 - ① 以樹狀四方分割法分割影像。
 - ② 進行分割後影像的「定義域—值域比對」。
 - ③ 若定義域—值域的均方根誤差在可容忍範圍以內，則記錄區塊變換資訊以表示該值域區塊，並將該值域區塊從比對清單中移除。
 - ④ 若定義域—值域的均方根誤差超出了可容忍的範圍，則將值域區塊再分割成四塊，重複①。
3. 當壓縮後的影像與原始影像間的差異小於容忍度時停止。
4. 輸出壓縮後的檔案。

(四) 實驗方法

在這部份，我們撰寫程式，為重要變因逐一分析、探討其影響，並尋求各變因的最佳選擇。除此之外，我們也嘗試採用不同的運作流程，試驗如何才能最有效的掌握以下這些變因。

1. 探討定義域區塊的取得
定義域區塊是「定義域—值域比對」的基礎，如何選出適用的定義域區塊是一項重要的關鍵，也是實驗的主要變因之一。
2. 探討對比資訊的選取範圍
我們進行「定義域—值域比對」時所賦予定義域區塊的變換 T_i ，是將原來的點像素值 a 乘上一對比值 s (scaling)、再加上一亮度值 o (offset)，可表為 $T_i(a) = s \cdot a + o$ 。我們以每一區塊變換式中的 s 與 o 值表示該區塊特性。若能規範對比值之範圍，則可有效的控制這些資料儲存時所需容量，進而提昇壓縮比。所以我們在實驗過程中會探討如何選取對比資訊的範圍。
3. 探討如何選取紀錄對比所用位元數(s_bits)及紀錄亮度所用位元數(o_bits)
紀錄每一個區塊變換的對比及亮度資訊的方法，是先各找出其最大與最小值，再在兩值間取等分刻劃，作為所用位元數；而紀錄對比或亮度資訊就是在這尺度中選取與其最近的刻劃。使用的刻劃數越多，就越能準確的紀錄對比和亮度，壓縮的影像品質當然也會更好。但是在影像「壓縮」的前提之下，不能一味的增加紀錄所用位元數，因為這會犧牲壓縮成效。所

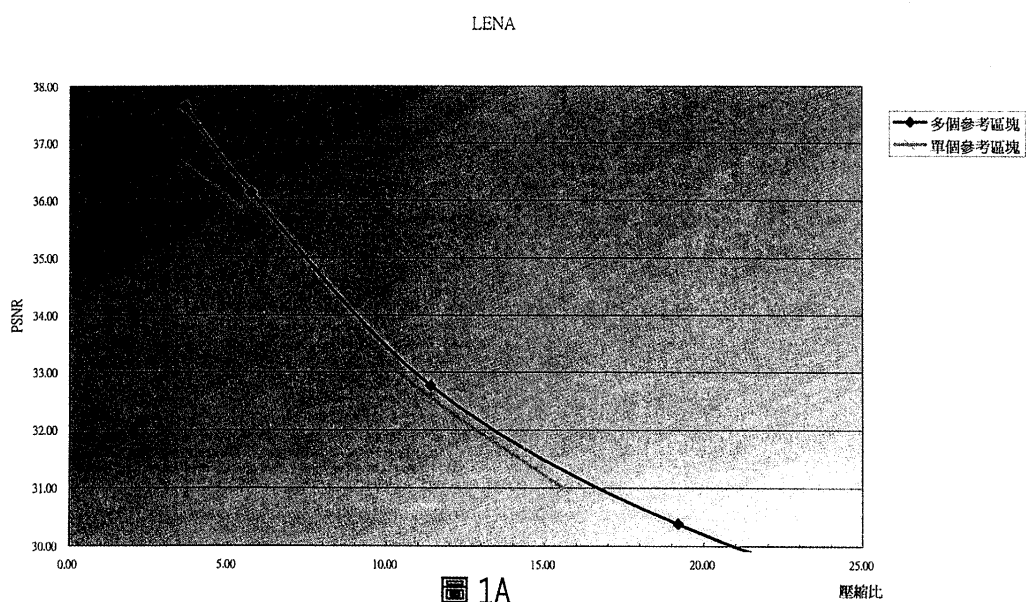
以，我們必須權衡壓縮品質與壓縮成效，為所用位元數尋找一個適當的數值。

4. 探討失真控制

採用失真影像壓縮時，應盡量將失真部分置於無礙視覺之處，如較小的值域區塊或不易發覺之處。若能有效的控制失真所在區域，則可減少許多不必要的比對步驟，而將大部分的時間用於大型區塊的壓縮。這樣不僅可保全影像在視覺上的逼真，還可減少壓縮的時間。因為失真控制攸關壓縮效率與品質之間的平衡，所以如何作最適的失真控制也是我們研究的重點之一。

六、研究結果

實驗（一）探討參考區塊的取得



多個參考區塊

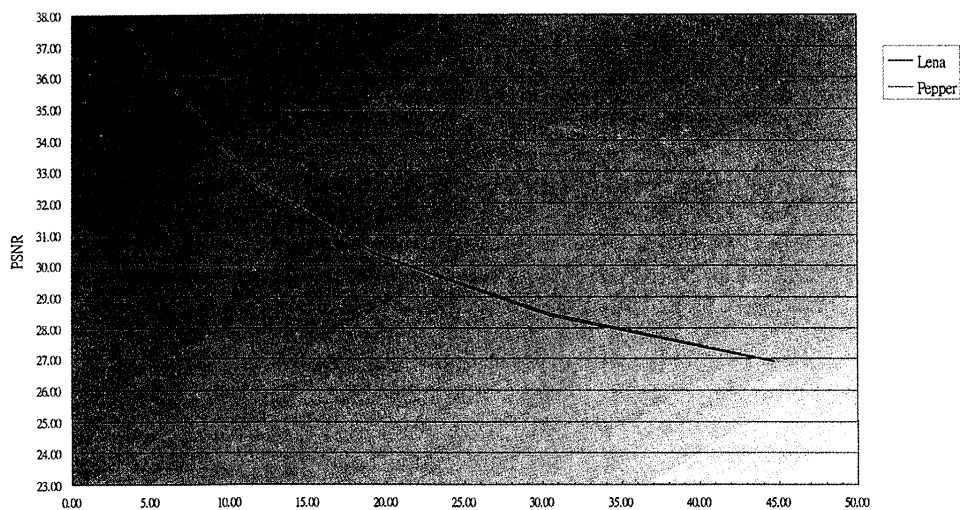
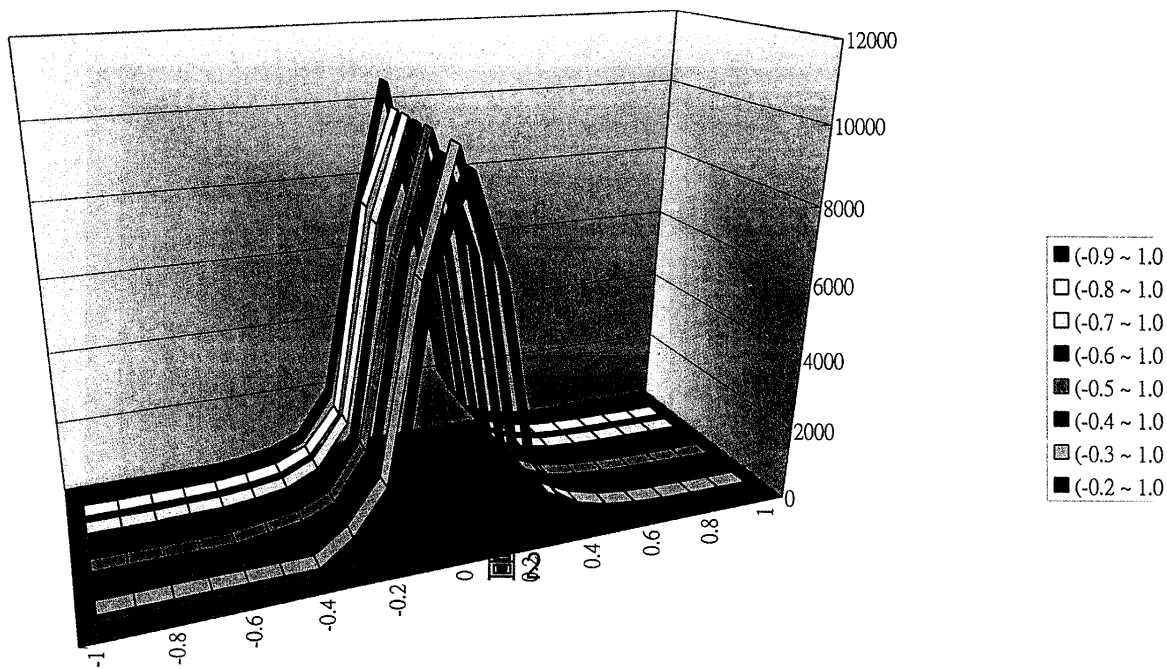


圖 1B

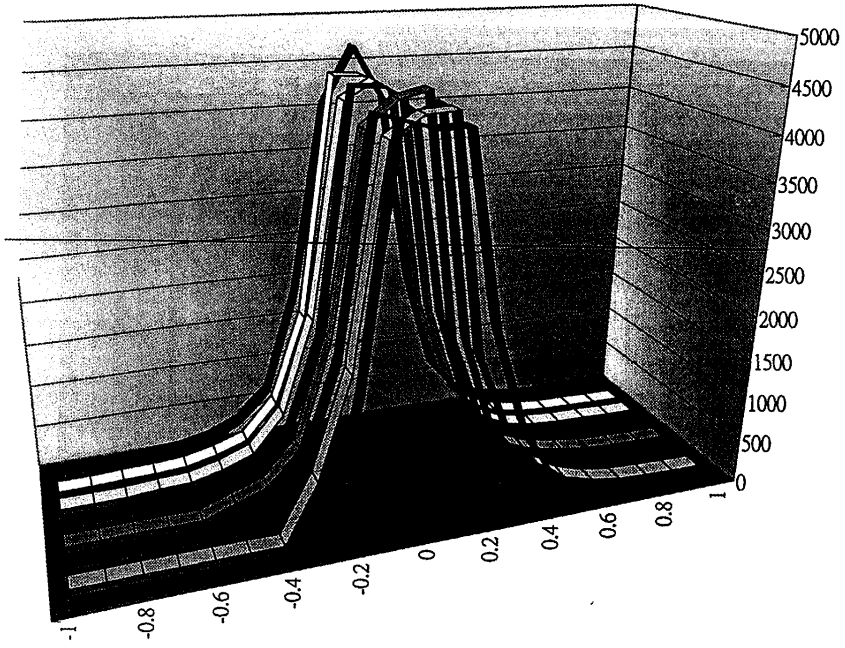
壓縮比

實驗 (二) 探討對比資訊的範圍

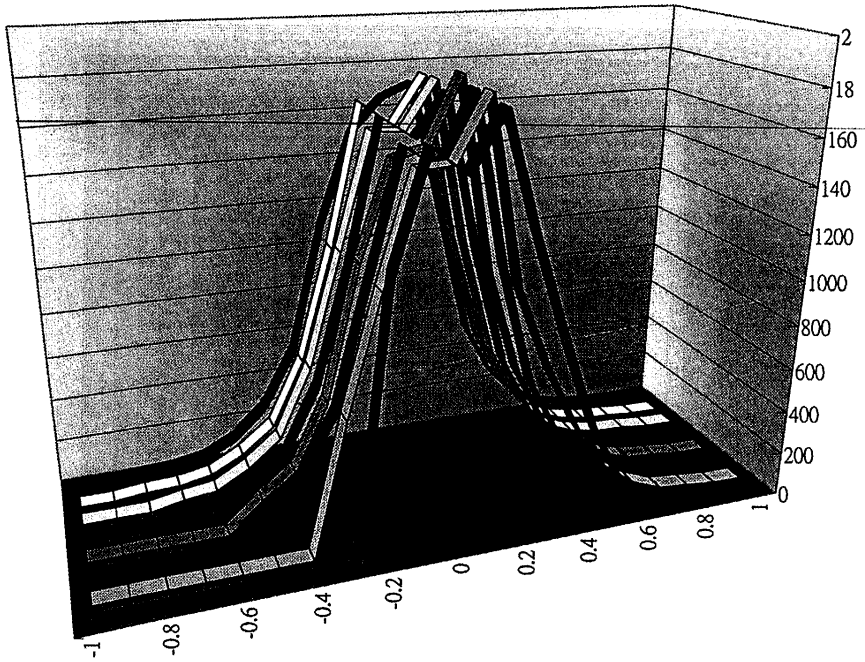
容忍度 = 3 對比範圍與目標區域個數圖



容忍度=5 對比範圍與目標區域個數圖

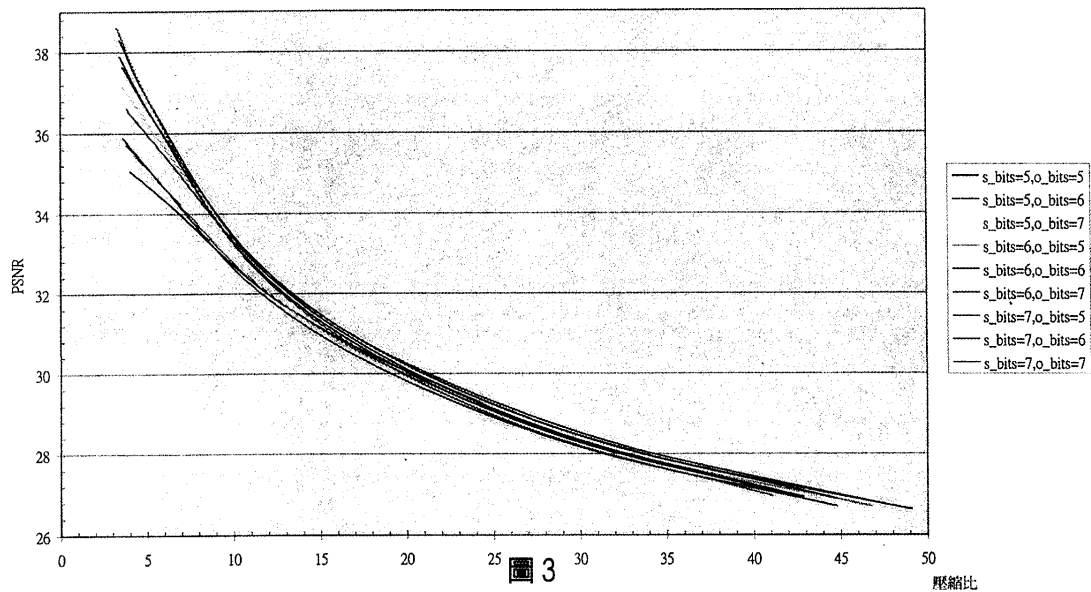


容忍度=10 對比範圍與目標區域個數圖

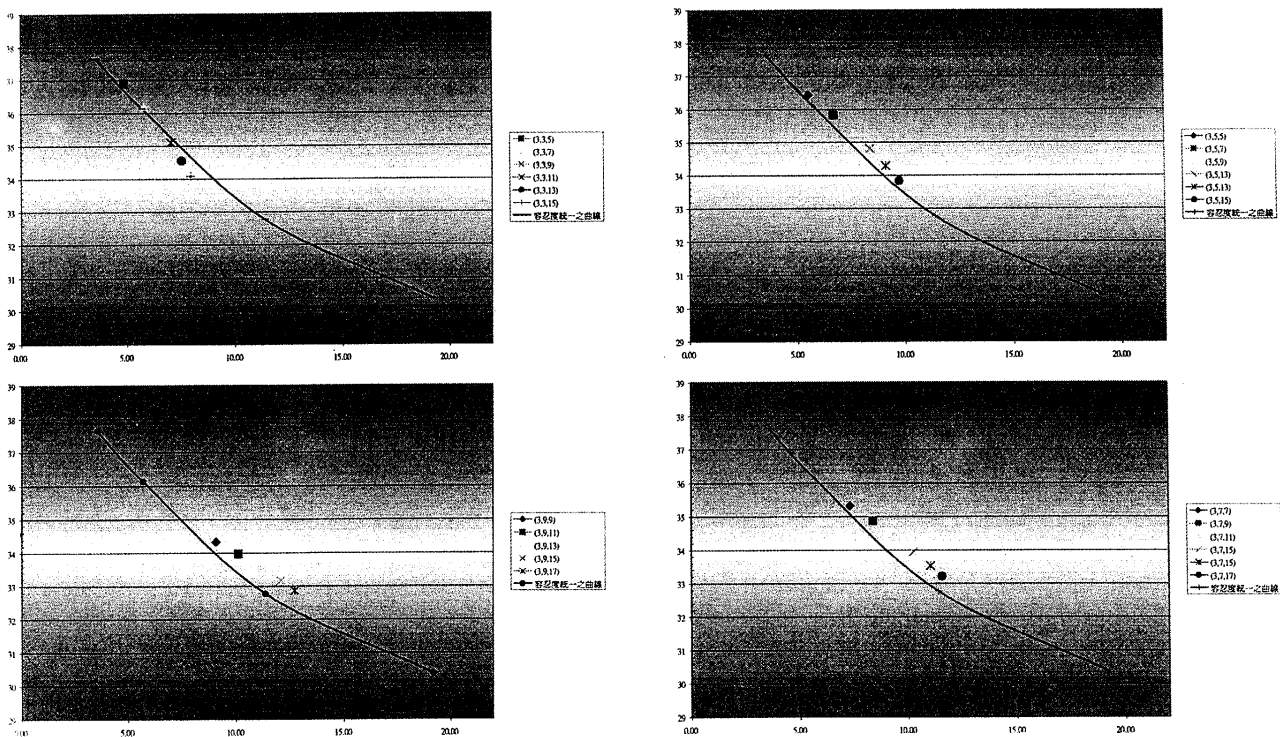


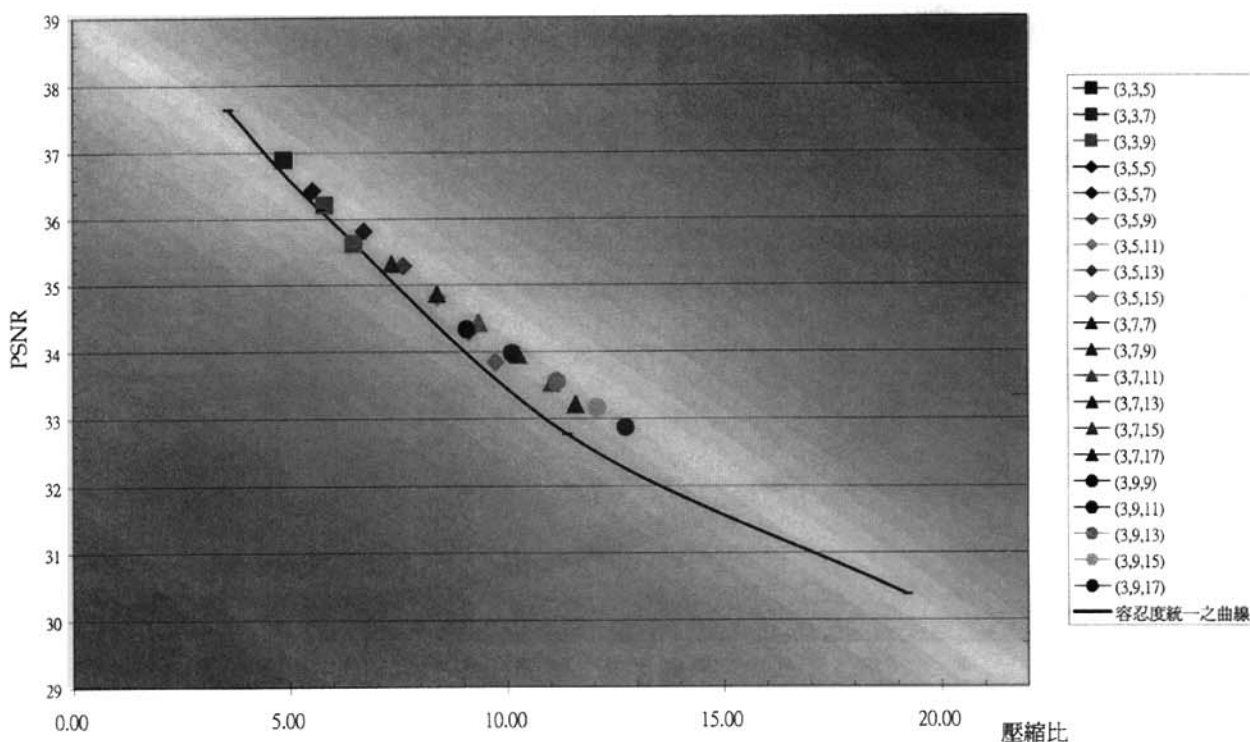
實驗（三）探討紀錄對比所用位元數(s_bits)及紀錄亮度所用位元數(o_bits)

壓縮比-PSNR



實驗（四）探討知真控制





七、討論

(一) 探討定義域區塊的取得

1. 實驗說明

我們的值域區塊分割層級為 16×16 、 8×8 、 4×4 、 2×2 ，共四層。單個定義域區塊的取得方式是選取每層級內部變化量最大（與純白色之間的均方根誤差最大）者。多個定義域區塊的取得方式是利用餘弦變換，為每一 $w \times w$ （像素）層級創造出 $m \times n$ 個由 $x \times y$ 個像素所構成的定義域區塊。此變換式如下：

$$125 \cdot \left[\cos \left(\frac{m \cdot x \cdot \pi}{w} \right) \cdot \cos \left(\frac{n \cdot y \cdot \pi}{w} \right) + 1 \right]$$

餘弦變換可以創造多個定義域區塊，並且轉換區塊中的像素數值。因為cosine函數的值介於-1.0~1.0之間，所以先加上1使其介於0~2之間，再乘上125才可使像素的值介於0~250之間。

2. 實驗結果歸納

比較單個與多個定義域區塊實驗結果，我們發現使用多個定義域區

塊，在同樣的尖峰雜訊比之下壓縮比較高，所以具有明顯的優勢（見圖1A）。不同影像所得的結果都相當穩定（見圖1B）。

（二）探討對比資訊的範圍

1. 實驗說明

由於我們所能記錄的資訊取樣有限，必須找出一個不影響品質的取樣範圍。從-1.0~1.0之間擷取範圍時，必須保留正向才可利用對比轉換所有的亮度值，故我們在此只需探討負向的範圍限制，以便有效控制儲存空間。

2. 實驗結果歸納

從實驗結果可得知面對任意選取的對比範圍，取樣的值域區塊個數都是在-0.3之後才開始急遽增加（見圖2），表示-1.0到-0.3之間並不能帶給我們太多資訊，所以我們決定以-0.3~1.0作為比例資訊的範圍限制。

（三）探討紀錄對比所用位元數(s_bits)及紀錄亮度所用位元數(o_bits)

1. 實驗結果分析

① 企求高壓縮比時

以[s_bits=5、o_bits=7]，[s_bits=6、o_bits=6]，[s_bits=6、o_bits=7]，[s_bits=7、o_bits=6]，[s_bits=7、o_bits=7]的效果最好。

② 企求高器質時

以[s_bits=6、o_bits=6]，[s_bits=6、o_bits=7]，[s_bits=7、o_bits=6]，[s_bits=7、o_bits=7]的效果最好。

2. 實驗結果歸納

我們在選取一個標準時，需兼顧各種情況。普通壓縮時，各種變因的效果差不多，但在高品質及高壓縮時，就明顯的分出了高下。[s_bits=6、o_bits=6]，[s_bits=6、o_bits=7]，[s_bits=7、o_bits=6]，[s_bits=7、o_bits=7]在高品質、高壓縮時的表現都很突出（見圖3），而為了保有影像整體的流暢，修飾區塊之間相接時邊角的突兀，我們必須重視亮度偏移值的精確度。[s_bits=5、o_bits=7]，[s_bits=6、o_bits=7]，[s_bits=7、o_bits=7]對於影像之中漸層的詮釋最為平滑，而[s_bits=5、o_bits=7]所需總位元數最少，所以我們選用[s_bits=5、o_bits=7]作為往後壓縮時採用的參數。當然，還可依個人需求，選用不同的組合。

（四）探討失真控制

1. 實驗說明

以前面的實驗心得為基礎，我們在此進而希望能夠控制失真程度，將其侷限於較不為人注意之處。我們利用多道容忍門檻，控制每一層級的分割程度。我們一共分為三個層級， 16×16 至 8×8 是第一道門檻， 8×8 到 4×4 是第二道門檻， 4×4 到 2×2 是第三道門檻。

2. 實驗結果歸納

為控制失真程度，操控 16×16 分割成 8×8 的第一道門檻應該最嚴謹，而接下來兩道可逐漸放鬆，允許較多誤差。這樣做可確保大塊影像的完整性，而將失真限於較小的區塊。我們以 $a/b/c$ 代表第一道門檻容忍度為 a ，第二道門檻容忍度為 b ，第三道門檻容忍度為 c 。

經實驗發現，有使用失真控制門檻的效果比沒有使用的效果好。我們發現 $3/3/5$ 失真容忍度的品質最好， $3/9/17$ 失真容忍度的壓縮比最高，而 $3/9/11$ 失真容忍度為折衷辦法（見圖4）。

八、結論

（一）具體成果

我們這個科展研究計劃得到了兩個具體成果。第一個成果是結合了碎形原理與現有資訊科學，並採用碎形影像壓縮之樹狀四方分割法，發展出了一套有效率的影像壓縮軟體，對不同參數壓縮所需時間會隨之改變，但大都在25秒左右，而解壓均在1秒以內。我們的軟體有解壓迅速的優勢，只要製成壓縮檔，使用者複製展現影像所費時間甚短，應用起來比現有程式更實用。我們在壓縮軟體中先採取一組參數組合，嘗試壓縮兩個常用的灰階影像：壓縮後再展現的雷娜(Lena)影像及青椒(Pepper)（請見附錄一），與原影像比較非常相近（兩影像的尖峰雜訊比為37左右）；但在資料的儲存上已大幅縮減所需容量（壓縮比為5:1左右）。雖然現階段我們只展現灰階影像，但是我們的程式再作修改亦可延伸去做全彩影像的壓縮。

這個研究計劃的第二個成果是在發展出的壓縮軟體中，經過多項有系統的實驗，尋找出幾組最佳的參數組合。從實驗中，我們歸納出兼顧壓縮比與品質的三種參數搭配方案。這三種方案相同的部分包含以下各項參數：以餘弦變換取得多個定義域區塊；對比資訊範圍(range of scaling values)在-0.3與1.0之間；儲存對比(scaling, s_bits)資訊所用位元數為5位元，儲存亮度(offset, o_bits)資訊所用位元數為7位元。這三種方案的不同在於失真控制的差異。

（一）方案一：控制失真部分，門檻為 $3/3/5$ 。

（二）方案二：控制失真部分，門檻為 $3/9/11$ 。

(三) 方案三：控制失真部分，門檻為3/9/17。

採用這三種方法壓縮Lena的效果分別為：(一) 方案一的尖峰雜訊比(PSNR)是36.89分貝，壓縮比4.88:1，(二) 方案二的尖峰雜訊比(PSNR)是33.97分貝，壓縮比10.11:1，(三) 方案三的尖峰雜訊比(PSNR)是32.87分貝，壓縮比12.74:1。

綜合來說，這三個方案再控制失真門檻方面不同，但其他參數都是經過實驗所選取的最佳組合(見第七節的討論)。方案一的品質較佳，但壓縮比較差。方案三的壓縮比較佳，但品質較差；方案二較為折衷，較可兼顧影像品質與壓縮效率。以後在使用這套軟體時，可依對壓縮品質或壓縮效率的要求，在這三個方案中做一選擇，或自行調整選取參數的方法。

(二) 創新之處

1. 壓縮方面注重定義域區塊的選取的方式與失真度的控制

以往的做法是取定義域區塊為值域區塊的兩倍大，必須花費額外的時間再做減取樣至相同大小進行比對。但是我們的定義域區塊是由餘弦變換為每一層級即時產生同樣大小的定義域區塊，所以比對時無須浪費時間作減取樣，可直接進行比對工作，節省了以前浪費掉的時間。

碎形影像壓縮向來是崇尚自然影像的壓縮，而且它做比對時需先減取部分樣本，故無法處理人造影像。採用餘弦變換創造的定義域區塊卻可解決這個問題，因為我們利用餘弦函數的週期性，可創造出網狀的區塊來處理人造影像中的網狀格。

其次，在失真度的控制方面，以往的壓縮方法在每一個層級比對時的容忍限制都是同樣的嚴苛，連再微小的區塊也加求達到標準。雖然說整體的品質獲得了較大的保證，但花費大量時間去完成視覺上並無差別之處，一般使用者感覺不到。

我們的理念是要利用失真控制將失真藏在看不見的地方，保有大塊影像的相似性。這樣不僅可確保視覺上的美感，還可以減少花費在較低層級的壓縮時間。

2. 解壓縮無需反覆迭代運作至收斂

以往解壓縮時需要反覆迭代運作至收斂，相當浪費時間。我們因為定義域區塊的產生方式是利用餘弦變換，故壓縮後的輸出檔已經是記錄了我們運作收斂的結果，亦即解壓縮時只需將定義域區塊資訊代入變換中一次就可得到結果。

綜合以上所述兩方面，我們嘗試實際運用碎形原理來作影像壓縮，並藉由實驗方法探討最佳軟體之開發技術。我們的新方法在較低壓縮比時可

達極佳的品質、而達到高壓縮比時亦可維持不錯的品質，可超越現有的品質及壓縮比極限。由我們的研究可以發現，樹狀四方分割法之碎形影像壓縮已經可以達到令人相當滿意的水準。展望未來，隨著科技的進步，個人電腦的速度會越來越快、功能也會更加強化。影像壓縮將可考慮更多的分割法與參數變化，並對品質做更高的要求。屆時，碎形影像壓縮將能發展到完美的境界，在影像壓縮的歷史中另闢新頁。

九、參考資料

- (1)胡宗義 著，碎形影像壓縮及其應用之研究，台灣大學資訊工程學研究所碩士論文，1994。
- (2)葛雷易克 著，（林和 譯），混沌—不測風雲的背後，天下文化，1991。
- (3)戴顯權 著，資料壓縮，松崗電腦圖書，1996。
- (4)M.F. Barnsley and L.P. Hurd, Fractal Image Compression, AK Peters Ltd., Wellesley, 1993.
- (5)Y. Fisher, ed., Fractal Image Compression, Springer-Verlag: New York, 1995.
- (6)Ning Lu, Fractal Imaging, Academic Press: New York, 1997.
- (7)H. Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe, Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer-Verlag: New York, 1992.

附錄一 範例影像



Lena原圖

檔案大小：262144位元



Lena1

失真控制：3/3/5

PSNR：36.89分貝

檔案大小：53767位元

壓縮比：4.88:1

Lena2

失真控制：3/9/11

PSNR：33.97分貝

檔案大小：25919位元

壓縮比：1011:1



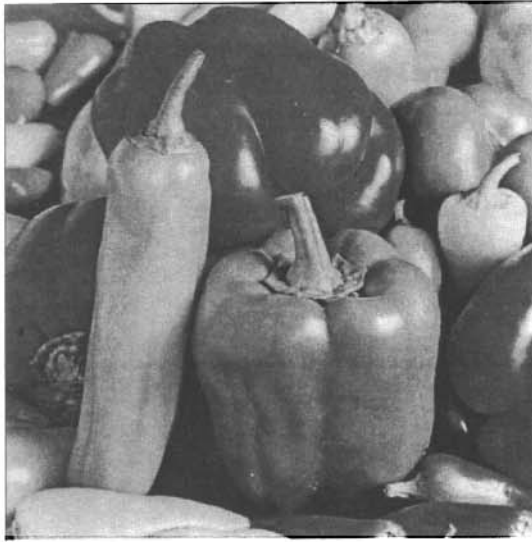
Lena 3

失真控制：3/9/17

PSNR：32.87分貝

檔案大小：20584位元

壓縮比：12.74:1



Pepper原圖

檔案大小：262144位元

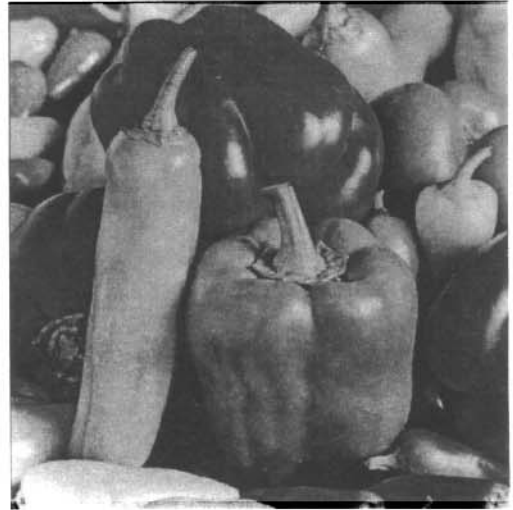
Pepper 1

失真控制：3/3/5

PSNR：36.41分貝

檔案大小：62262位元

壓縮比：4.21:1



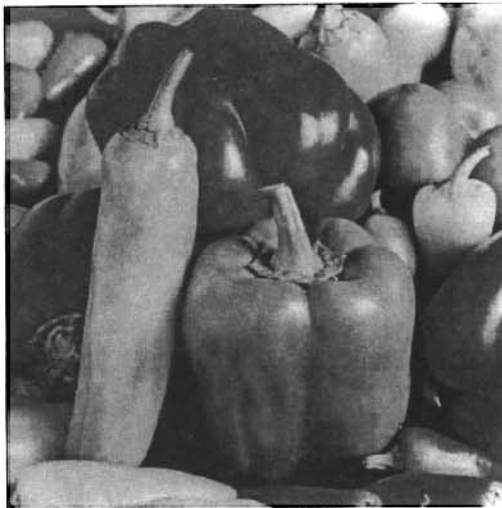
Pepper 2

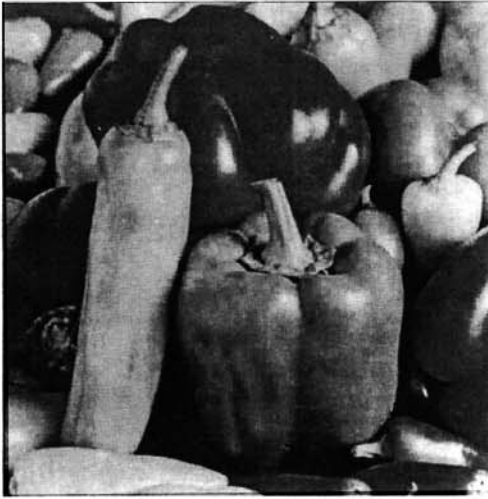
失真控制：3/9/11

PSNR：33.66分貝

檔案大小：27773位元

壓縮比：9.44:1





Pepper 3

失真控制：3/9/17

PSNR：32.73分貝

檔案大小：23105位元

壓縮比：11.35:1

評語

此作品對碎形影像壓縮演算法做進一步的改進，並且加入各種失真控制門檻做規劃性的控制實驗，顯示已具有數學理論運用的高度能力，及歸納，推演交互運用的科技成熟能力。